# 勾配、発散、回転　上級

## 参照　基礎編「ベクトルと勾配、発散、回転ほか」

1 勾配($\nabla\Phi$, grad $\Phi$)

電位と電界

2 発散($\nabla \cdot \mathbf{A}$, div $\mathbf{A}$)

電荷と電束

3 回転 ($\nabla \times \mathbf{A}$, rot $\mathbf{A}$, curl $\mathbf{A}$)

(1) 無限直線状電流 I を囲む半径 $r$ 長さ $L$ の円筒上の磁界とその回転

(2) 無限直線状電流 I を囲む直径 $L$ の球上の磁界とその回転

(3) ベクトル$\nabla\times\mathbf{A}$の方向について

(4) 任意のベクトル $\mathbf{X}$ が回転のない成分と発散のない成分に分解できること

ーヘルムホルツの定理ー

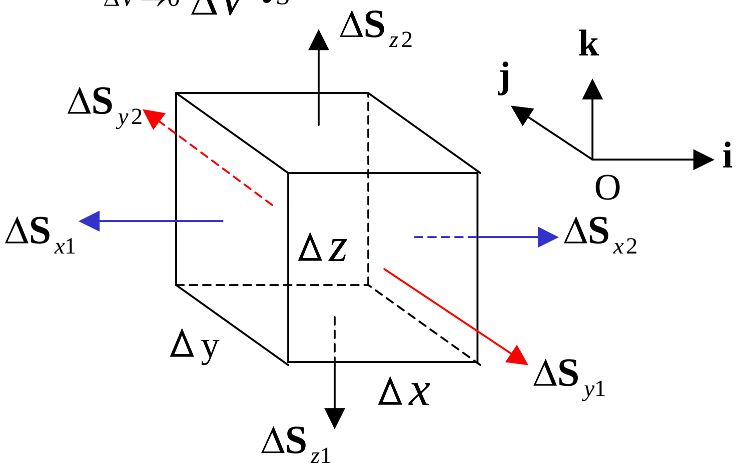
(5) ベクトルポテンシャルとビオ　サバールの法則

# 勾配 、発散、回転

## 1 勾配(∇Φ, grad Φ)

スカラー$\Phi(x,y,z)$に対し微小立体$\Delta V$とその表面面積ベクトル$dS$から$grad\,\Phi$ を定義する。

$$grad\,\Phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S d\mathbf{S}\,\Phi = \nabla\Phi \cdots (A-1)$$




$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Delta z + O(\varepsilon^2)$$

$$\Delta\mathbf{S}_{z1} = -\mathbf{k}\Delta x\Delta y,\ \Delta\mathbf{S}_{z2} = \mathbf{k}\Delta x\Delta y$$

$$\Delta\mathbf{S}_{x1} = -\mathbf{i}\Delta y\Delta z,\ \Delta\mathbf{S}_{x2} = \mathbf{i}\Delta y\Delta z$$

$$\Delta\mathbf{S}_{y1} = -\mathbf{j}\Delta z\Delta x,\ \Delta\mathbf{S}_{y2} = \mathbf{j}\Delta z\Delta x$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{S}_{z1}\Phi(x,y,z) + \Delta\mathbf{S}_{z2}\Phi(x,y,z+\Delta z)\\
&= \mathbf{k}\Delta x\Delta y\{\Phi(x,y,z+\Delta z) - \Phi(x,y,z)\}\\
&\cong \mathbf{k}\Delta x\Delta y\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Delta z = \mathbf{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Delta v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{S}_{x1}\Phi(x,y,z) + \Delta\mathbf{S}_{x2}\Phi(x+\Delta x,y,z)\\
&= \mathbf{i}\Delta y\Delta z\{\Phi(x+\Delta x,y,z) - \Phi(x,y,z)\}\\
&\cong \mathbf{i}\Delta y\Delta z\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Delta x = \mathbf{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Delta V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{S}_{y1}\Phi(x,y,z) + \Delta\mathbf{S}_{y2}\Phi(x,y+\Delta y,z)\\
&= \mathbf{j}\Delta z\Delta x\{\Phi(x,y+\Delta y,z) - \Phi(x,y,z)\}\\
&\cong \mathbf{j}\Delta z\Delta x\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Delta y = \mathbf{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Delta V
\end{aligned}$$

$$\therefore grad\,\Phi = \lim_{\Delta v \to 0}\oint_S d\mathbf{S}\,\Phi = \mathbf{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$= \nabla\Phi$$

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$は、$\Phi$の$x,y,z$方向の勾配(それぞれの方向に単位長進 んだときの増加量 )を表している。

したがって、(1)式で表される $grad\,\Phi$ は、$\Phi$の勾配に等しいことが分 かる。

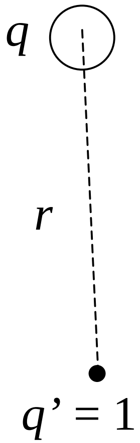
$grad\,\Phi$は$\nabla\Phi$とも書ける。

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ である。

(1)式は、$\int_V \nabla\Phi dV = \oint_S d\mathbf{S}\Phi = \oint_S \mathbf{n}\Phi dS \cdots (A-2)$

とも書ける。 $\mathbf{n}$は面の単位法線ベクト ルである。

# 電位と電界




電荷$q$から$r$の位置の電場$\mathbf{E}$はクーロンの法則からその位置の単位正電荷$q'=1$に働く力として、(ここでは$q$を$r$の原点として計算)

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\left(\mathbf{i}\frac{x}{r}+\mathbf{j}\frac{y}{r}+\mathbf{k}\frac{y}{r}\right)\cdots(1.1)$$

$\dfrac{\mathbf{r}}{r}$は$\mathbf{r}$の向きを持つ単位ベクトル。この位置の電位$\phi$は、無限遠すなわち、$q$の影響のないところから、$r$の位置まで$\mathbf{E}$に逆らって単位正電荷を運ぶのに要するエネルギーとして次のように求められる。

$$\phi=\int_\infty^r(-E)dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_\infty^r\frac{-1}{r^2}dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

$\phi$の勾配を求める。$\left(r^2=x^2+y^2+z^2\right)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{x}{r},\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{y}{r},\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{z}{r}$$

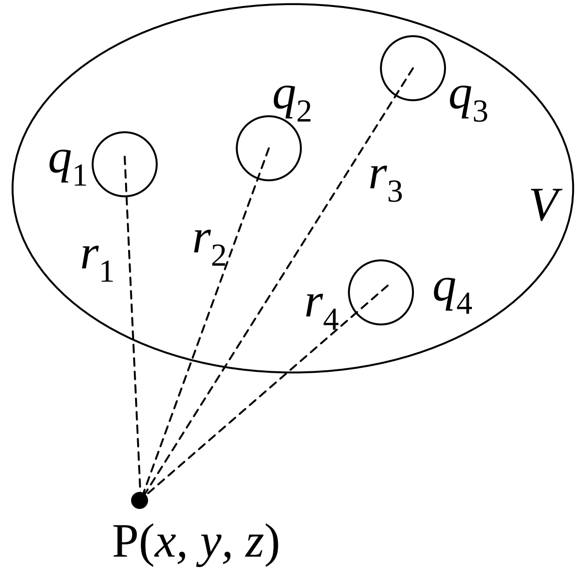
これから、

$$grad\,\phi=\frac{-q}{4\pi\varepsilon r^2}\left(\mathbf{i}\frac{x}{r}+\mathbf{j}\frac{y}{r}+\mathbf{k}\frac{z}{r}\right)=-\mathbf{E}$$

すなわち、

$$\mathbf{E}=-grad\,\phi=-\nabla\phi\cdots(1.2)$$

電場の強さ(電界)は、電位勾配に等しく、電位の高い方から低い方に向かうことが分かる。




つぎに、上図のように立体Vの内部に電荷が分布している場合のP点の電位は、電位がスカラーであることから、それぞれの電荷が作る電位の和として、

$$\phi=\sum_k\phi_k=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_k\frac{q_k}{r_k}$$となる。

電荷が電荷密度$\rho(x,y,z)$で分布しているときは積分形で、

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho}{r}dV\cdots(1.3)$$

と書ける。

これから電界は

$$E=-\nabla\phi$$

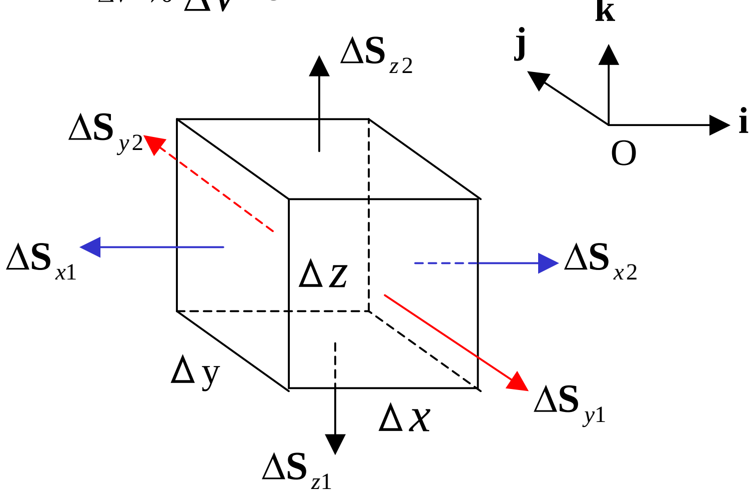
として求められる。

すなわち、電界は、スカラーポテンシャル$\phi$の微分値として得られる。

## 2 発散($\nabla\cdot\mathbf{A}$, div $\mathbf{A}$)

同じく、ベクトル$\mathbf{A}$について$div\,\mathbf{A}$を定義。

$$div\,\mathbf{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S d\mathbf{S}\bullet\mathbf{A}=\nabla\bullet\mathbf{A}\cdots(B-1)$$




$$\Delta\mathbf{S}_{z1}=-\mathbf{k}\Delta x\Delta y,\ \Delta\mathbf{S}_{z2}=\mathbf{k}\Delta x\Delta y$$
$$\Delta\mathbf{S}_{x1}=-\mathbf{i}\Delta y\Delta z,\ \Delta\mathbf{S}_{x2}=\mathbf{i}\Delta y\Delta z$$
$$\Delta\mathbf{S}_{y1}=-\mathbf{j}\Delta z\Delta x,\ \Delta\mathbf{S}_{y2}=\mathbf{j}\Delta z\Delta x$$

$\mathbf{i}$方向

$\Delta\mathbf{S}_{x1},\Delta\mathbf{S}_{x2}$と同方向の$\mathbf{A}$の成分は、$A_x$

$$\Delta\mathbf{S}_{x1}\bullet\mathbf{i}A_x(x,y,z)+\Delta\mathbf{S}_{x2}\bullet\mathbf{i}A_x(x+\Delta x,y,z)$$
$$=\Delta y\Delta z\{A_x(x+\Delta x,y,z)-A_x(x,y,z)\}$$
$$\cong\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta v$$

$\therefore\mathbf{i}$方向の面積分は、$\dfrac{\partial A_x}{\partial x}\Delta V$

同様にして、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$方向の面積分は、

$\dfrac{\partial A_y}{\partial y}\Delta V,\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\Delta V$となる。

$$\therefore div\,\mathbf{A}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S d\mathbf{S}\bullet\mathbf{A}$$
$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\nabla\bullet\mathbf{A}$$

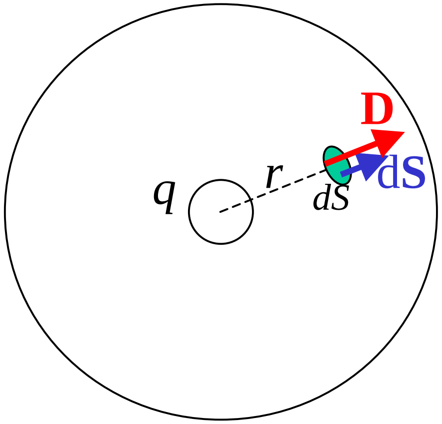
これはスカラーである。

$div\,\mathbf{A}$は、ベクトル$\mathbf{A}$の微小立体$\Delta V$内での増加量であり、それはまた、$\Delta V$の表面からの発散量でもある。

(2)式は、$\displaystyle\int_V div\mathbf{A}dV=\oint_S d\mathbf{S}\bullet\mathbf{A}=\oint_S\mathbf{n}\bullet\mathbf{A}dS\cdots(B-2)$

とも書ける。これは、ガウスの定理に等しい。

## 電荷と電束




**D**,dS はベクトルの向きが一致

$(1.1)$式を再掲する。

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\left(\mathbf{i}\frac{x}{r}+\mathbf{j}\frac{y}{r}+\mathbf{k}\frac{y}{r}\right)$$

両辺に$\varepsilon$を乗じて、それを$\mathbf{D}$と書く。

$$\mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdots(2.1)$$

大きさだけの式にすると、$D=\dfrac{q}{4\pi r^2}$,

両辺に$4\pi r^2$を掛けると,$4\pi r^2 D=q$,

$4\pi r^2$は半径$r$の球の表面積$S$に等しいので、

$q=SD\cdots(2.2)$

上図で、$\mathbf{D}$と微小面積$d\mathbf{S}$とは向きが一致しているので、$DdS=\mathbf{D}\bullet d\mathbf{S}$と書いて,$(2.2)$式を積分形にすると、

$$q=\oint_S \mathbf{D}\bullet d\mathbf{S}=\oint_S d\mathbf{S}\bullet\mathbf{D}\cdots(2.3)$$

$q=\int_V \rho\, dV$ ($\rho$ は電荷密度)とも書けるので

$$\int_V \rho\, dV=\int_S d\mathbf{S}\bullet\mathbf{D}\cdots(2.4)$$

これと,$(B-2)$式を比較すると,$(B-2)$の$\mathbf{A}$を$\mathbf{D}$と書き直して,$\int_V div\mathbf{D}dV=\oint_S d\mathbf{S}\bullet\mathbf{D}$ から、

$\rho=div\,\mathbf{D}\cdots(2.5)$

が予想される。

実際、この$(2.5)$式が、一般の場合でも成り立つというのが、マクスウェルの同形の方程式である。

電荷$q$から$q$本の電束が放射状に出ると仮定すると、距離が$r$の位置での電束の密度は、$q/4\pi r^2=D$となり、$D$は「電束密度」と呼ばれるのが相応しいことも理解できよう。方向も含めて$\mathbf{D}$を電束密度を表すベクトルとしている。

次に,$(2.5)$式と$(1.2)(1.3)$式との比較すると、

$\mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E}=-\varepsilon\nabla\phi$

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho}{r}dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\nabla\bullet\mathbf{D}}{r}dV=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla\bullet\nabla\phi}{r}dV$$

すなわち、

$$\phi=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla^2\phi}{r}dV\cdots(2.6)$$

が得られる。

$\nabla^2\phi=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ である。

この式はスカラー$\phi$に関する恒等式である。

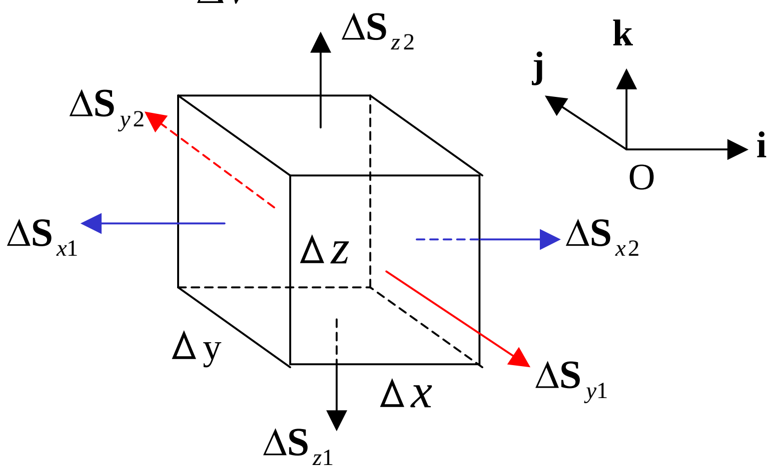
これを任意のベクトル$\mathbf{X}$の成分ごとに適用すると、

$$\mathbf{X}=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla^2\mathbf{X}}{r}dV\cdots(2.7)$$

## 3 回転 ($\nabla\times\mathbf{A}$, rot $\mathbf{A}$, curl $\mathbf{A}$)

同じく、ベクトル$\mathbf{A}$について$rot\,\mathbf{A}$を定義

$$rot\,\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A}\cdots(C-1)$$




$$\Delta\mathbf{S}_{z1} = -\mathbf{k}\Delta x\Delta y,\ \Delta\mathbf{S}_{z2} = \mathbf{k}\Delta x\Delta y$$
$$\Delta\mathbf{S}_{x1} = -\mathbf{i}\Delta y\Delta z,\ \Delta\mathbf{S}_{x2} = \mathbf{i}\Delta y\Delta z$$
$$\Delta\mathbf{S}_{y1} = -\mathbf{j}\Delta z\Delta x,\ \Delta\mathbf{S}_{y2} = \mathbf{j}\Delta z\Delta x$$

ベクトル積は同方向の ベクトル間では 0 なので、(3)式の計算はベクトル $\mathbf{A}$とそれに垂直な面積ベクトル間 で計算すればよい

$\mathbf{i}A_x$に対しては、$\Delta\mathbf{S}_{z1}, \Delta\mathbf{S}_{z2}, \Delta\mathbf{S}_{y1}, \Delta\mathbf{S}_{y2}$が関わり、

$$\Delta\mathbf{S}_{z1}\times\mathbf{i}A_x(x,y,z) + \Delta\mathbf{S}_{z2}\times\mathbf{i}A_x(x,y,z+\Delta z)$$
$$= -\mathbf{k}\times\mathbf{i}\Delta x\Delta y A_x(x,y,z) + \mathbf{k}\times\mathbf{i}\Delta x\Delta y A_x(x,y,z+\Delta z)$$
$$= \mathbf{k}\times\mathbf{i}\Delta x\Delta y\{A_x(x,y,z+\Delta z) - A_x(x,y,z)\}$$
$$= \mathbf{j}\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$\Delta\mathbf{S}_{y1}\times\mathbf{i}A_x(x,y,z) + \Delta\mathbf{S}_{y2}\times\mathbf{i}A_x(x,y+\Delta y,z)$$
$$= -\mathbf{j}\times\mathbf{i}\Delta z\Delta x A_x(x,y,z) + \mathbf{j}\times\mathbf{i}\Delta x\Delta y A_x(x,y+\Delta y,z)$$
$$= \mathbf{j}\times\mathbf{i}\Delta z\Delta x\{A_x(x,y+\Delta y,z) - A_x(x,y,z)\}$$
$$= -\mathbf{k}\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

以上計は、$\Delta V\left(\mathbf{j}\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \mathbf{k}\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

同様にして、$A_y, A_z$についても、

$$\Delta V\left(\mathbf{k}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$$
$$\Delta V\left(\mathbf{i}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \mathbf{j}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$1/\Delta V$を掛けて整理すると、

$$\mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

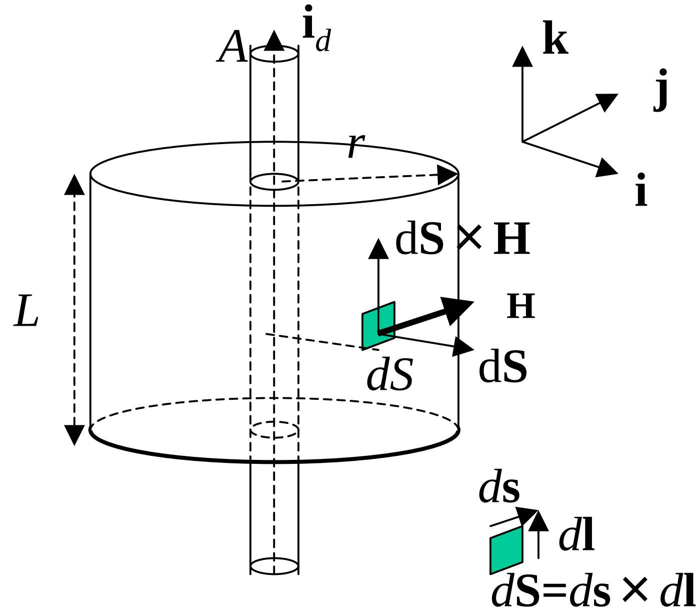
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla\times\mathbf{A},$$

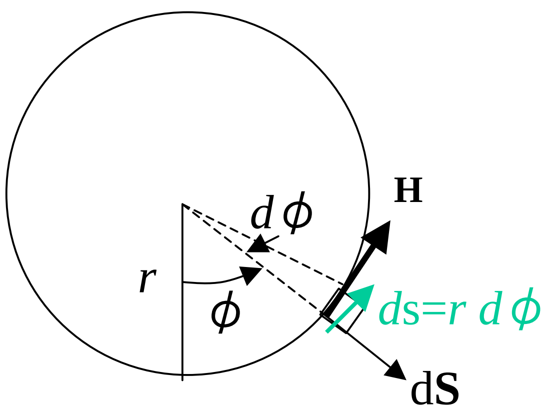
下記のようにも書ける。

$$\int_V \nabla\times\mathbf{A}\,dV = \oint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$
$$= \oint_S (\mathbf{n}\times\mathbf{A})dS\cdots(C-2)$$

## (1) 無限直線状電流 I を囲む半径 $r$ 長さ $L$ の円筒上の磁界とその回転

$$\mathbf{I} = \int_A \mathbf{i}_d \, dA$$




右ねじの法則により磁界**H**は円筒の接線方向にできる。

$(C-2)$式から、

$$\int_V \nabla\times\mathbf{H}dV = \oint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{H}$$

右辺 $= \oint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{H} = \mathbf{k}\int_0^L\int_0^{2\pi} H(rd\phi)dl = \mathbf{k}2\pi r\,L\,H$

マクスウェル方程式により、$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{i}_d$(電流密度)

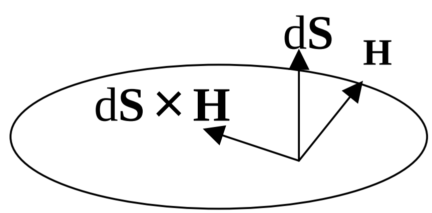
左辺 $= \int_V \nabla\times\mathbf{H}dV = \int_V \mathbf{i}_d dV = \mathbf{k}\,I\,L$

$\nabla\times\mathbf{H}$ の体積積分は、電流の体積積分に等しく $IL$になる。また、円筒表面の磁界は

$2\,\pi\,r\,L\,H = I\,L$から

$$H = \frac{I}{2\pi\,r}$$

となる。向きは**I**と一致する(**I** を軸とする回転)。



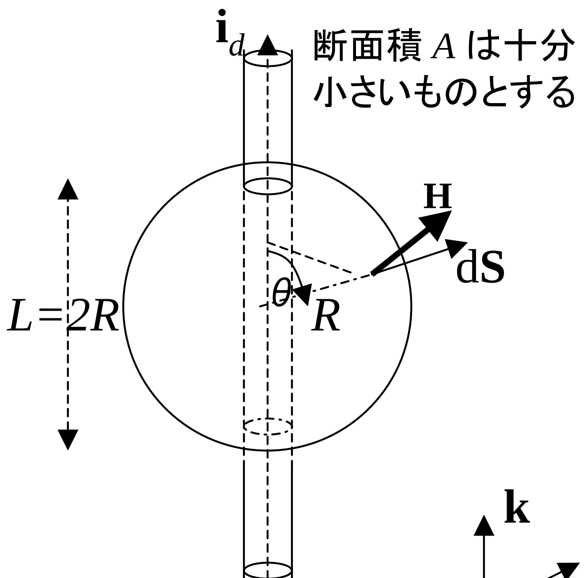

上面および下面の表面では $d\mathbf{S}\times\mathbf{H}$ は面内にあり**I**には垂直で、面内の中心点に関して対称なところの値と相殺され合計値は0になる(左図)。

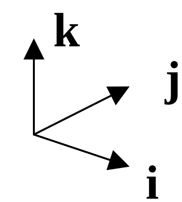
この問題は、一次元下げたストークスの定理を使う方が簡単である。すなわち、高さ $l=1$ (微小値 $d\,\mathbf{l}$)の円筒について円周方向の微小長さベクトルを $d\mathbf{s}$ とし、ベクトル3重積の公式から、$((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = -\mathbf{A}(\mathbf{B}\bullet\mathbf{C})+\mathbf{B}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{C}))$

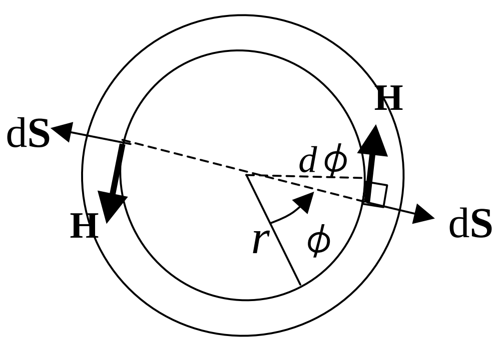
$$d\mathbf{S}\times\mathbf{H} = (d\mathbf{s}\times d\mathbf{l})\times\mathbf{H} = -d\mathbf{s}(d\,\mathbf{l}\bullet\mathbf{H}) + d\,\mathbf{l}(d\mathbf{s}\bullet\mathbf{H}) = \mathbf{k}(d\mathbf{s}\bullet\mathbf{H})$$

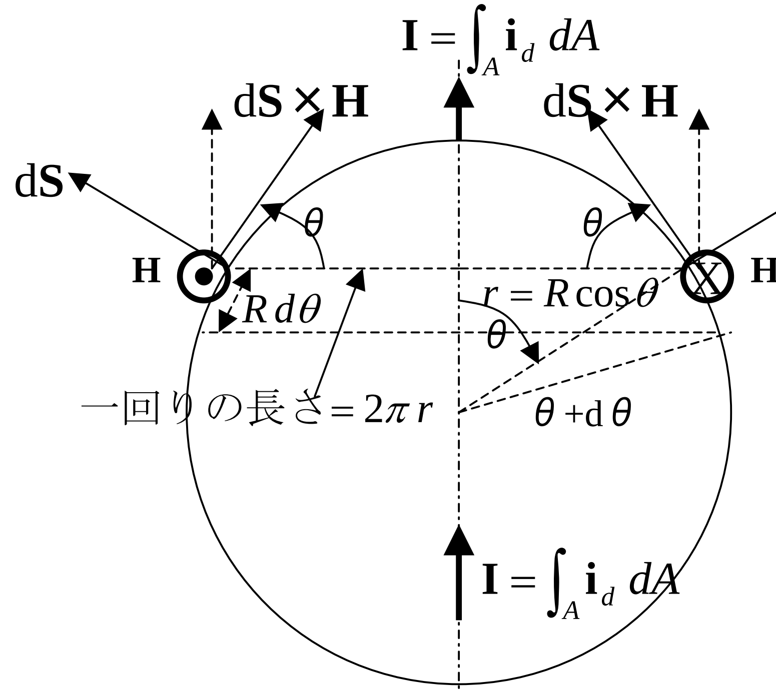
$$\int_A \nabla\times\mathbf{H}dA = \mathbf{k}I = \mathbf{k}\oint_S d\mathbf{s}\bullet\mathbf{H} = \mathbf{k}2\pi\,r\,H \rightarrow H = I/(2\pi\,r)$$

## (2) 無限直線状電流 I を囲む直径 $L$ の球上の磁界とその回転




前頁の結果から、$r=R\cos\theta$として、

$H=\dfrac{I}{2\pi r}$, また、$dS=rd\phi\, Rd\theta$

$d\mathbf{S}\times\mathbf{H}$の水平成分は相殺し垂直成分$(\sin\theta)$だけが残る。

したがって、$\oint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{H}=\mathbf{k}\oint_S \dfrac{I}{2\pi r} rd\phi\, Rd\theta\sin\theta$

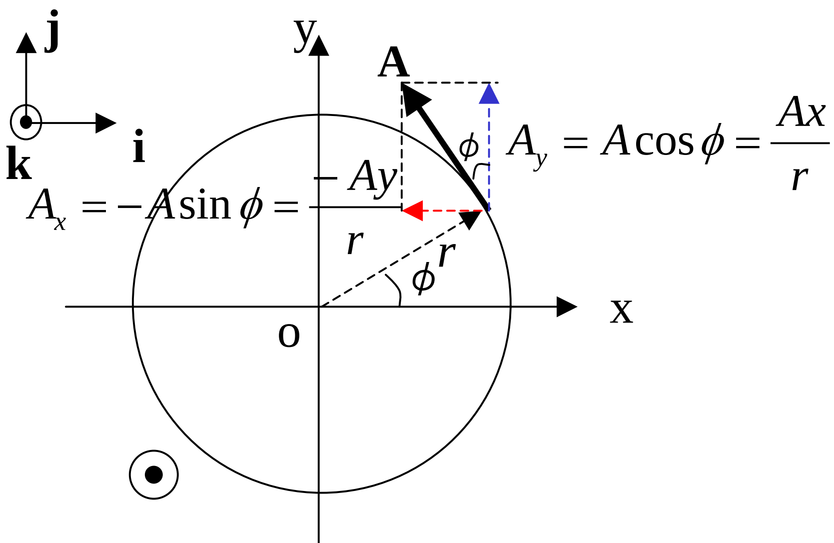
$=\mathbf{k}\int_0^\pi \dfrac{I}{2\pi r} 2\pi r R\sin\theta d\theta=\mathbf{k}IR\left[-\cos\theta\right]_0^\pi$

$=\mathbf{k}2IR=\mathbf{k}IL$

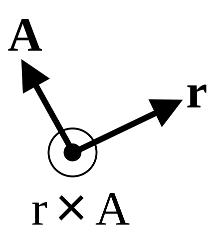
前頁の結果と同じく、$\nabla\times\mathbf{H}$の体積積分は立体が囲む電流の体積積分に等しい。

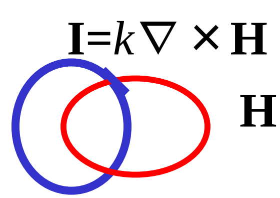
## (3) ベクトル∇×Aの方向について

ベクトル $\mathbf{A}$ の回転 $\nabla\times\mathbf{A}$ の方向について考えてみる。図のように、$\mathbf{A}$ が半径 $r$ の円周上にあり、$x, y$ 成分のみで、$z$ 成分を持たない場合を考える 。
($z$ 成分がある場合は座標 変換で、図のような状態に移行するこ とができる。)




ベクトル∇×Aの方向




$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-Ay}{r} & \dfrac{Ax}{r} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(0 - \frac{\partial}{\partial z}\frac{Ax}{r}\right)$$

$$+\mathbf{j}\left(0 + \frac{\partial}{\partial z}\frac{Ay}{r}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{Ax}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{Ay}{r}\right)$$

$$= \mathbf{k}\left(\frac{2A}{r}\right)$$

これから、ベクトル $\nabla\times\mathbf{A}$ の方向は紙面に垂直手前向きである ことが分かる。
すなわち、$\nabla\times\mathbf{A}$ の方向は、ベクトル $\mathbf{A}$ と直交する。ベクトル $\mathbf{A}$ がある円周に沿って存在しているときは 、沿う円の面積ベクトルの向きと一致し ている。
$A = r\omega$ と置ける場合は、 $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{k}2\omega$ となる。
ベクトル $\mathbf{A}$ が直線上(半径大の円周 )にあるときは、$\nabla\times\mathbf{A}$ は、これを囲んで回る 円の接線の向きである。

## (4) 任意のベクトル X が回転のない成分と発散のない成分に分解できること

$(2.7)$式を再掲すると、

$$\mathbf{X}=-\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla^2\mathbf{X}}{r}$$

ベクトルの微分公式の一つである

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{X})=\nabla(\nabla\bullet\mathbf{X})-\nabla^2\mathbf{X}$$

から、

$$-\nabla^2\mathbf{X}=-\nabla(\nabla\bullet\mathbf{X})+\nabla\times(\nabla\times\mathbf{X})$$

$$\mathbf{X}=-\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla(\nabla\bullet\mathbf{X})}{r}+\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla\times(\nabla\times\mathbf{X})}{r}$$

$$=-\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla\bullet\mathbf{X}}{r}\right)+\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla\times\mathbf{X}}{r}\right)$$

$$\equiv-\nabla\phi+\nabla\times\mathbf{A}$$

ただし、

$$\boxed{\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla\bullet\mathbf{X}}{r}\\ \mathbf{A}&=\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla\times\mathbf{X}}{r}\end{aligned}}$$

同じく微分公式から、$\nabla\times(\nabla\phi)=0$

$\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A})=0$

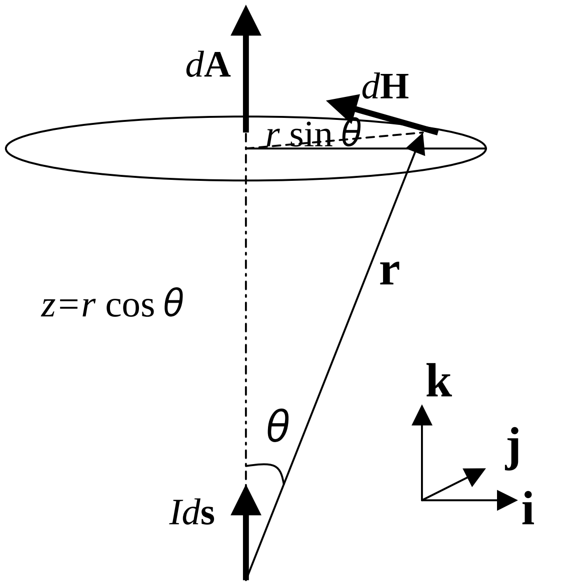
であるため、

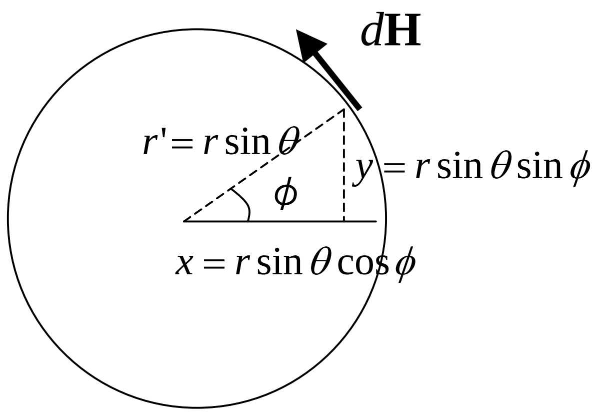
$$\boxed{\mathbf{X}=-\nabla\phi+\nabla\times\mathbf{A}\cdots(D)\ \text{ヘルムホルツの定理}}$$

任意のベクトル$\mathbf{X}$は回転のない成分$-\nabla\phi$と、
発散のない成分$\nabla\times\mathbf{A}$とに分解できる。
ただし、体積積分箇所以外では$\nabla^2\phi=0$が前提。

電界では、$\mathbf{E}=-\nabla\phi$として、ポテンシャル$\phi$を予め求めて$\mathbf{E}$を得ることが出来た。
磁界では、マクスウェルの方程式から、
$\nabla\bullet\mathbf{B}=0$、よって、$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$としても常に$\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A})=0$であるから矛盾は生じない。
$\mathbf{A}$をベクトルポテンシャルと呼んでいる。
何らかの方法で$\mathbf{A}$を求めることが出来れば、それを微分して$\mathbf{B}(=\nabla\times\mathbf{A})$を得ることができる。

# (5) ベクトルポテンシャルとビオサバールの法則




$$d\mathbf{s}\times\frac{\mathbf{r}}{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & ds\\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\end{vmatrix}$$
$$=ds\ \sin\theta\left(-\mathbf{i}\sin\phi+\mathbf{j}\cos\phi\right)$$

ビオサバールの法則は、微小線分電流 $Id\mathbf{s}$ が任意の点に作る磁界 $d\mathbf{H}$を次式で与える。

$$d\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

ここでは、この式をベクトルポテンシャルから導いてみる。
ベクトルポテンシャルを $\mathbf{A}$ とし、

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A}$$

とする。ベクトルに関する恒等式

$\mathbf{A}=\frac{-1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla^2\mathbf{A}}{r}$ と $\nabla\times\mathbf{B}=\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)-\nabla^2\mathbf{A}$ から

$\nabla\bullet\mathbf{A}=0$ とすれば、$\nabla\times\mathbf{B}=-\nabla^2\mathbf{A}$となり、

$$\mathbf{A}=\frac{-1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla^2\mathbf{A}}{r}=\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\nabla\times\mathbf{B}}{r}$$

マクスウェルの方程式により、$D=0$ のとき、$\nabla\times\mathbf{B}=\mu\nabla\times\mathbf{H}=\mu\mathbf{i}_d$ だから$\left(\mathbf{i}_d=\right.$電流密度,断面積$=dS$と置く$\left.\right)$

$\therefore\ \mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\int_V dV\,\frac{\mu\,\mathbf{i}_d}{r}$,微小分をとり、$\mathbf{i}_d dV=\mathbf{i}_d dS ds=\mathbf{I}ds=Id\mathbf{s}$ を用い

$d\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{I}{r}d\mathbf{s}=\mathbf{k}\frac{\mu}{4\pi}\frac{I}{r}ds=\mathbf{k}dA_z$, $d\mathbf{A}$ は $z$ 成分($d\mathbf{s}$ 方向)のみ。

$$d\mathbf{B}=\mu d\mathbf{H}=\nabla\times d\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 0 & 0 & dA_z\end{vmatrix}=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}dA_z-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x}dA_z$$

$$=\mathbf{i}\frac{\partial dA_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}ds-\mathbf{j}\frac{\partial dA_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}ds=-\mathbf{i}\frac{\mu}{4\pi}\frac{I}{r^2}\frac{y}{r}ds+\mathbf{j}\frac{\mu}{4\pi}\frac{I}{r^2}\frac{x}{r}ds$$

$$=\frac{\mu}{4\pi}\frac{I}{r^2}ds\sin\theta\left(-\mathbf{i}\sin\phi+\mathbf{j}\cos\phi\right)=\frac{\mu}{4\pi}\frac{I}{r^2}d\mathbf{s}\times\frac{\mathbf{r}}{r},\therefore\ d\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}$$