ベクトル、勾配、発散、回転ほか

1.ベクトル

1.1 和、差

1.1.1 ベクトルとは

ベクトル(vector)は大きさと方向を持つ量である。これに対し、スカラー(scalar)は,大きさだけを持つ量、すなわち1個の数値である。

1.1.2　ベクトルの成分

ベクトルは、直交座標系の各軸に平行な成分で表す。ベクトルを **A** としその x, y. z 成分を、Ax, Ay, Az とすると、各軸に平行な大きさ 1 の基本ベクトル、**i, j, k**　を用いて、

$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$

あるいは、

$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$

と表す。

また、行列を使って、

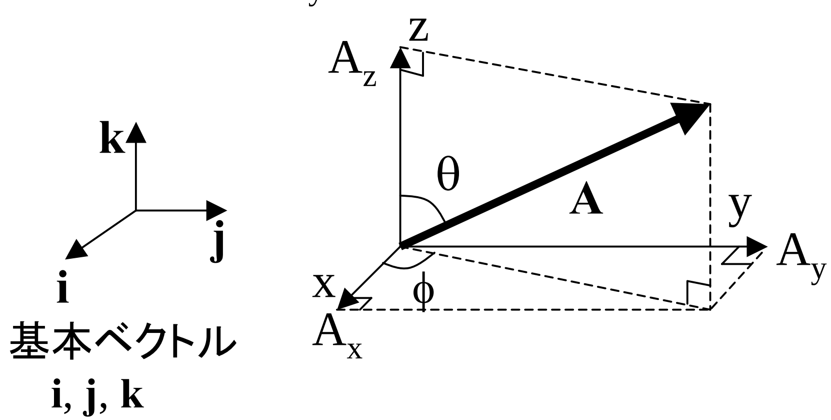
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \text{または} \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}^T \text{と表す}$$

こともある。

図 1.参照

図 1. ベクトル**A**とその成分

$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$
$=(A_x, A_y, A_z)$



1.1.3 ベクトルの和、差（図2 参照）

和(差): 成分ごとの和(差)

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{B} = (A_x \pm B_x)\mathbf{i} + (A_y \pm B_y)\mathbf{j} + (A_z \pm B_z)\mathbf{k}$$
$$= (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z)$$

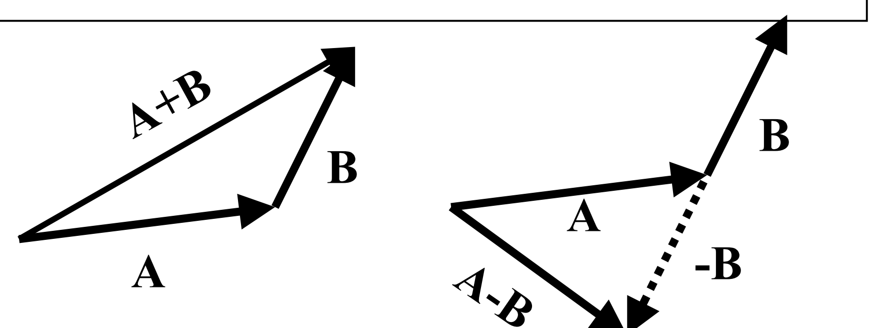


図 2. ベクトルの和　　差

1.2 スカラー積（内積）、ベクトル積（外積）

1.2.1 スカラー積（定義、図. 3 参照）

ベクトル A とベクトル B とのスカラー積は、**A･B** と書き、値は成分ごとの積和で定義される 1 個のスカラーである。すなわち、

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

これは、ベクトル**A, B** のなす角度を θ とすれば、<u>$AB\cos\theta$</u> に等しい。A, B は両ベクトルの大きさである。

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = AB\cos\theta$$
$$= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\cos\theta$$

これから、次式が成り立つ。

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

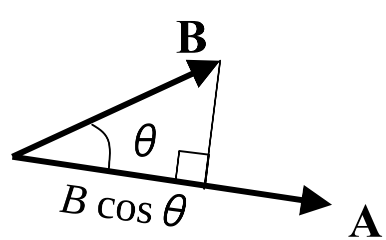


図 3. スカラー積

1.2.2 ベクトル積（定義、図. 4 参照）

ベクトル A とベクトル B とのベクトル積は、**A×B** と書き、成分が次式で定義される1個のベクトルである。

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y,\, A_z B_x - A_x B_z,\, A_x B_y - A_y B_x\right)$$

A×B の方向は、**A, B** に垂直で、かつ **A** から **B** に右ねじを回したとき右ねじの進む向きとする。ベクトル積は<u>**行列式**</u>を使って次のようにも表せる。

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

A×B の大きさは、**A, B** が作る平行四辺形OAPBの面積に等しい。

B×A ＝－ A×B が成り立つ。(順序が変ると符号が変る)

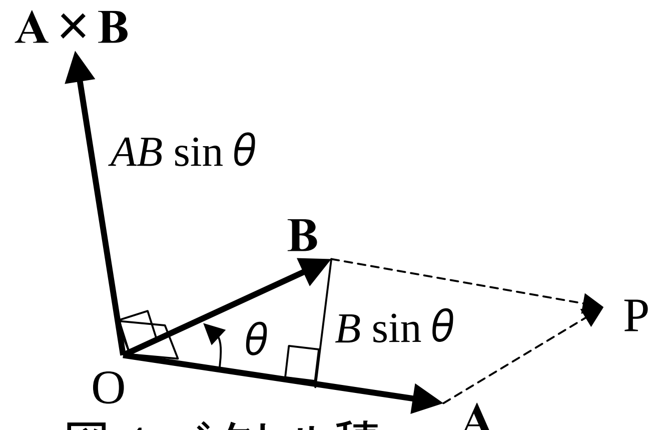
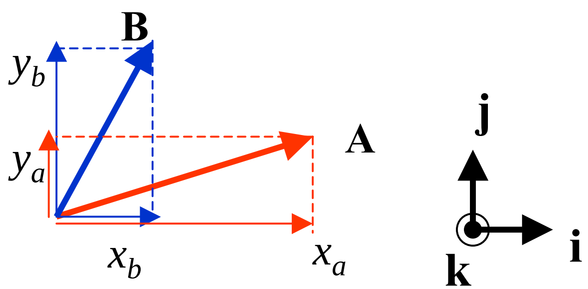


図 4. ベクトル積

1.2.3 二次元複素数表示ベクトルのスカラー積、ベクトル積



[行列表示]

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\begin{bmatrix}x_a & y_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_b\\ y_b\end{bmatrix}=x_ax_b+y_ay_b$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_a & y_a & 0\\ x_b & y_b & 0\end{vmatrix}=\mathbf{k}\begin{vmatrix}x_a & y_a\\ x_b & y_b\end{vmatrix}=\mathbf{k}\left(x_ay_b-x_by_a\right)$$

[複素数表示]

$\mathbf{A}^*\mathbf{B}$を作って見ると($\mathbf{A}^*$は$\mathbf{A}$の共役値)、

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B}=\left(x_a+jy_a\right)^*\left(x_b+jy_b\right)=\left(x_a-jy_a\right)\left(x_b+jy_b\right)$$
$$=\left(x_ax_b+y_ay_b\right)+j\left(x_ay_b-x_by_a\right)$$

上の行列表示の場合と 比較して、

スカラー積 $=\mathrm{Re}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{B}\right)=\mathbf{A}^*\mathbf{B}$の実数部

ベクトル積 $=\mathrm{Im}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{B}\right)=\mathbf{A}^*\mathbf{B}$の虚数部

に等しいことが分かる 。

ベクトル積のベクトル の向きは、$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$の向きとして、$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$回転で右ねじの進む方 向すなわち、紙面に垂直 手前向きである。

(行列表示から、 $\mathbf{k}$成分 $=z$方向)。

$\mathbf{A},\mathbf{B}$が回転機の電流、磁束などのように、$\theta=\omega t$で回転しているような場合のベクトル積も同じ考え方で計算できる。

例えば、トルクは電流と磁束のベクトル積なので

$$\mathbf{i}\times\boldsymbol{\varphi}=\mathrm{Im}\left\{\mathbf{i}^*\boldsymbol{\varphi}\right\}$$
$$=\mathrm{Im}\left\{\left(i_r+ji_j\right)^*\left(\varepsilon^{j\omega t}\right)^*\left(\phi_r+j\phi_j\right)\varepsilon^{j\omega t}\right\}$$
$$=\mathrm{Im}\left\{\left(i_r-ji_j\right)\varepsilon^{-j\omega t}\left(\phi_r+j\phi_j\right)\varepsilon^{j\omega t}\right\}$$
$$=\mathrm{Im}\left\{\left(i_r-ji_j\right)\left(\phi_r+j\phi_j\right)\right\}$$

$=i_r\phi_j-i_j\phi_r$, 向きは $\mathbf{k}$ 方向

電力 p の計算にはこの考え方は適用できない。

なぜなら、$p=\mathrm{Re}(\mathbf{v})\mathrm{Re}(\mathbf{i})$であって、スカラー積でもベクトル積でもないからである。

(「有効電力と無効電力」参照)

$\mathbf{v}=V_m\varepsilon^{j(\omega t+\alpha)},\mathbf{i}=I_m\varepsilon^{j(\omega t+\alpha-\phi)}$ とすれば、

$$p=\mathrm{Re}(\mathbf{v})\mathrm{Re}(\mathbf{i})=\frac{\mathbf{v}+\mathbf{v}^*}{2}\frac{\mathbf{i}+\mathbf{i}^*}{2}$$
$$=V_m\cos(\omega t+\alpha)I_m\cos(\omega t+\alpha-\phi)$$
$$=\frac{V_mI_m}{2}\left\{\cos(2\omega t+2\alpha-\phi)+\cos\phi\right\}$$
$$=\frac{V_mI_m}{2}\cos\phi\left\{1+\cos\left(2(\omega t+\alpha)\right)\right\}+\frac{V_mI_m}{2}\sin\phi\sin\left(2(\omega t+\alpha)\right)$$
$$=P\left\{1+\cos\left(2(\omega t+\alpha)\right)\right\}+Q\sin\left(2(\omega t+\alpha)\right)$$

このP,Qは、$\mathbf{V}=V_e\varepsilon^{j\alpha}$と$\mathbf{I}=I_e\varepsilon^{j(\alpha-\phi)}$から、($V_e,I_e$は実効値)

$P+jQ=\mathbf{V}\mathbf{I}^*$、または、$P-jQ=\mathbf{V}^*\mathbf{I}$として求められる。

1.3 スカラー三重積、ベクトル三重積

1.3.1 スカラー三重積(図. 5 参照)

ベクトル積と別のベクトルとのスカラー積をスカラー三重積といい、三つのベクトルが作る平行 6 面体の体積に等しい。

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\bullet\mathbf{C} = ((A_yB_z - A_zB_y)C_x + (A_zB_x - A_xB_z)C_y + (A_xB_y - A_yB_x)C_z)$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\bullet\mathbf{C} = (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\bullet\mathbf{B} = (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\bullet\mathbf{A}$$
$$= ABC\sin\theta\cos\phi$$

$AB\sin\theta$ は底面の面積、 $C\cos\phi$は高さ、この二つを掛け合わせ ると体積。

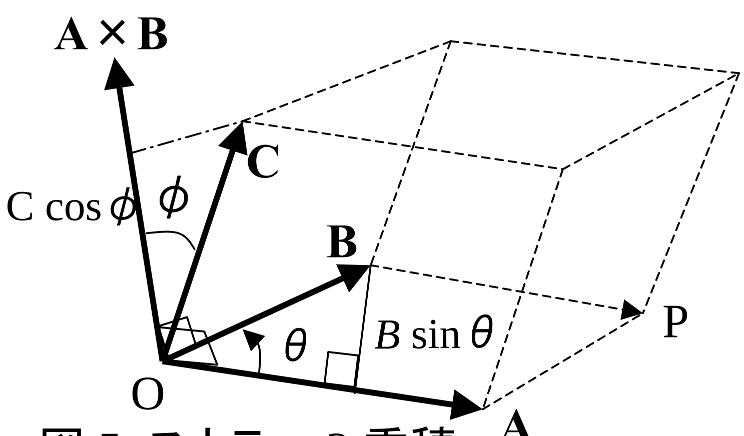


図 5. スカラー 3 重積

1.4 ベクトル三重積

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})$$

これはベクトルである

1.4 いろいろなベクトル

軸性ベクトルと極性ベクトル

速度、電界など元々大きさと方向を持つベクトルを<u>**極性ベクトル**</u>といい、これに対し、面積ベクトルや角速度ベクトルのように、回転方向と右ねじの関係で方向を定義するベクトルを<u>**軸性ベクトル**</u>という。

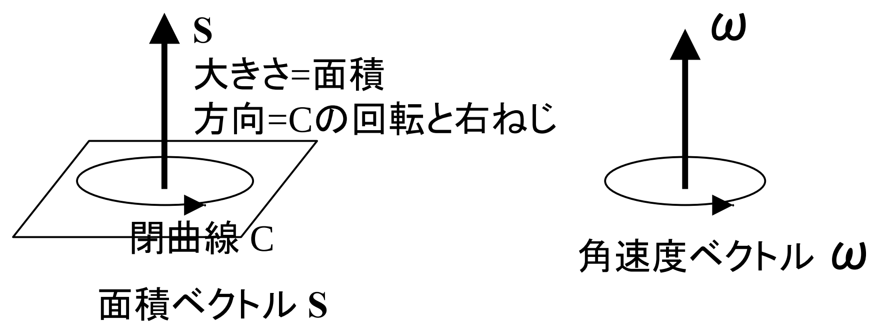


図 6.軸性ベクトル

2. 勾配 、発散、回転

2.1 勾配($\nabla\Phi$, grad Φ)

2次元座標(x,y)対応してあるスカラー量、例えば山の高さΦが決まるとき、$\Phi(x,y)$は、位置(x,y)における高さが$\Phi(x,y)$であることを示す。位置(x,y)から$(x+dx,y+dy)$に移ったとき、高さは、$\Phi(x+dx,y+dy)$になる。
高さの変化量$d\Phi$は、

$$\Phi(x+dx,y+dy)-\Phi(x,y)\approx\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy$$

$dy=0$のときは、$d\Phi\approx\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx\rightarrow\frac{d\Phi}{dx}\approx\frac{\partial\Phi}{\partial x}$

$\frac{\partial\Phi}{\partial x}$は$x$軸に平行な方向の勾配$(\tan\theta)$を表す。

同様に、$\frac{\partial\Phi}{\partial y}$は$y$軸に平行な方向の勾配である。

3次元座標に対し、温度などが位置の関数で表されるときは、同様に、
$\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}$はそれぞれの軸に平行な方向の勾配を表す。

(注)$\frac{\partial}{\partial w}$は$w$以外の変数を定数とみなした微分 ＝$w$で偏微分

$\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}$を$x,y,z$成分とするベクトルを$\Phi$の勾配 $grad\ \Phi$と定義する。$(grad\leftarrow gradient$, 傾き$)$

$$grad\ \Phi=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi=\nabla\Phi$$

すなわち、$grad\ \Phi$, あるいは、$\nabla\Phi$ (∇は、*nabla*, ナブラ と読む)

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$ で以下ベクトルのように扱う。

勾配の例1. 一次元熱流束$q(x)[J/s]$

丸棒などの一次元物体の位置xにおける温度を、$T(x)$とすると、qは温度勾配に比例し、

$$q(x)=-kA\nabla T=-kA\frac{dT}{dx},\ \nabla=\left(\frac{d}{dx},0,0\right)\rightarrow\frac{d}{dx}$$

k:熱伝導率、A:断面積、$-$がつくのは温度が高い方から低い方に向かって熱流が生じるため。y,z成分がないので$\frac{\partial}{\partial x}\rightarrow\frac{d}{dx}$

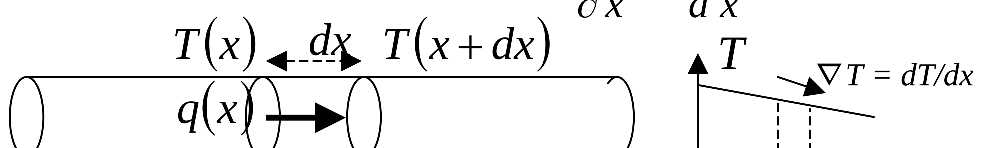


図 7. 一次元熱流と温度

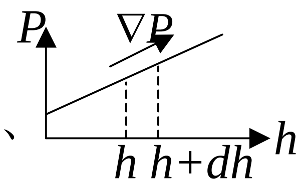
勾配の例2.　位置エネルギーと重力

重力場で重力の加速度をgとすれば、
基準点から$h[m]$の高さにある質量m
の物体の持つ位置エネルギーPと、
物体に働く重力fは、

$P = mgh$

$f = -mg$

これから、



$$f = -\frac{dP}{dh}$$

すなわち、$f = -\nabla P$

重力$= -$(位置エネルギーの勾配)

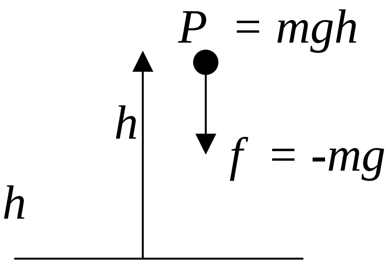


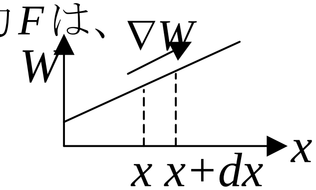
図 8. 重力場

勾配の例3.　バネのエネルギーWと力F

バネの伸びがx、
バネ定数がkのとき、
蓄えられる位置エネルギーWと力Fは、

$W = \frac{1}{2}kx^2$,

$F = -kx$



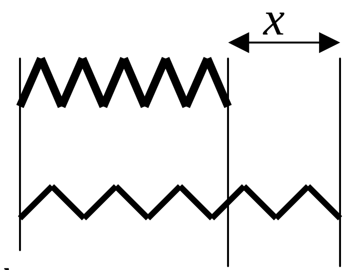


図 9. つるまきバネ

これから、$F = -\frac{dW}{dx}$ が成り立つことが分かる。

すなわち、$F = -\nabla W$

バネに働く力$= -$(位置エネルギーの勾配)

勾配の例4.　半球状の丘の勾配

2次元座標 $p(x, y)$における高さHが、$H = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ で表されるとき、

pにおける勾配は、$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy = -\frac{x}{H}dx - \frac{y}{H}dy$ から、

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \left(-\frac{x}{H}, -\frac{y}{H}\right)$$

具体的な点の例で示すと、

$$\nabla H(0,0) = (0,0), \nabla H\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)、\nabla H\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

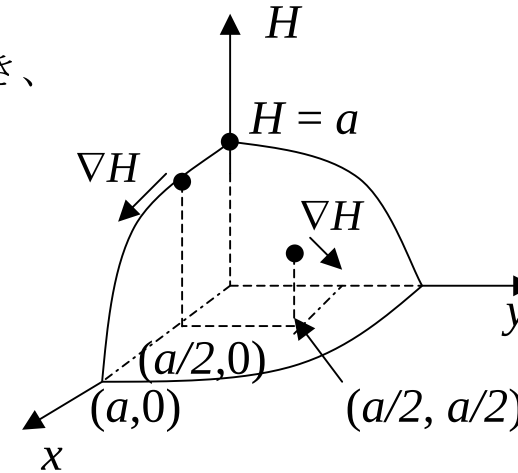


図 10. 半球状の丘の勾配

2.2 発散(∇ ･A, div A) 図11. 参照

流体の流れや、電束、磁束などの密度を表すベクトル**A**を考え、そのベクトル場で第8図に示すような微小立体、
$\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ に着目する。
この立体の表面から流出する**A**のx成分と表面に流入する**A**のx成分との差をとると、

$$A_x(x+\Delta x, y, z)\Delta y \Delta z - A_x(x, y, z)\Delta y \Delta z$$
$$= \{A_x(x+\Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)\}\Delta y \Delta z$$
$$\approx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta v$$

同様に、y, z成分については、$\dfrac{\partial A_y}{\partial y}\Delta v$,
$\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\Delta v$ が得られる。これらを合計すると、

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta v = (\nabla \bullet \mathbf{A})\Delta v$$ となる。

立体表面Sの法線ベクトルを外向きに**n**とすると、流入部分は$(-)$になるので、
$\int_s \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} ds \approx \nabla \bullet \mathbf{A} \Delta v$ と書くことができ、

$$\to \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \int_s \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} ds = \nabla \bullet \mathbf{A}$$

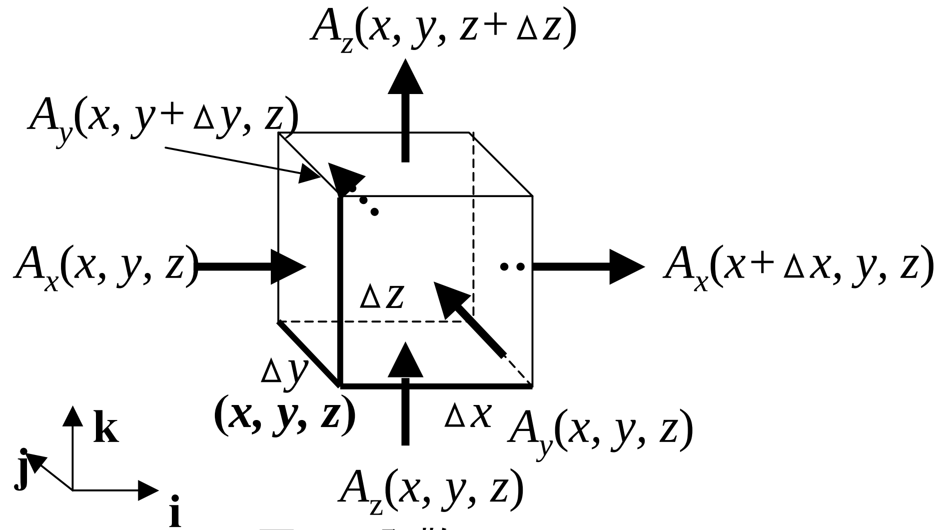


図 11. 発散 ∇ ･A

$\nabla \bullet \mathbf{A}$ は微小立体からの単位 体積当りの流出量 (湧き出し量)を表すので、 <u>「**A**の発散(*divergence*, *div* **A**)」</u>と呼んでいる。
すなわち、$\lim_{dv \to 0} \dfrac{1}{\Delta v} \int_s \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} ds = \nabla \bullet \mathbf{A} = div\, \mathbf{A}$

この式の形から、両辺をある立体全体について積分すると、隣接する微小立体表面では、**n**が相殺されるので、結局 立体Vとそれを包む閉曲面Sについて次式が得られる。
<u>$\int_S \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \bullet \mathbf{A} dv \cdots$ガウスの定理</u>

2.3 回転 ($\nabla \times \mathbf{A}$, rot **A**, curl **A**) 図12 参照

∇とベクトル **A**から作られるベクトル積 $\nabla\times\mathbf{A}$をベクトル **A**の「回転(*rotation*)」と呼び、*rot* **A**,*curl* **A**などと表記する。
すなわち、$rot\,\mathbf{A}=curl\,\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}$ である。

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

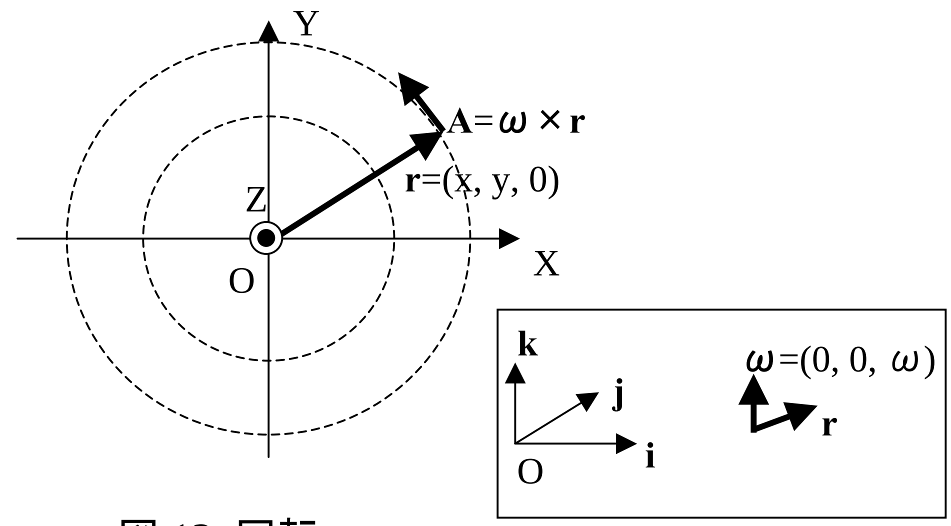


図 12. 回転

回転の意味を調べるため、 XY平面内を一定角速度 ω(成分0, 0, ω) で回転する物体があって、物体内の一点を位置ベクトル**r**(成分　x, y, 0)で表すと、その点の速度ベクトル**A**は、**A**=ω×**r** となる(図 12)。**A**を求めると、

$$\mathbf{A}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & 0\end{vmatrix}=-\omega y\mathbf{i}+\omega x\mathbf{j}+0\mathbf{k}$$

これから、

$$rot\,\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial\omega x}{\partial z}\mathbf{i}+\frac{\partial\omega y}{\partial z}\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\omega x}{\partial x}+\frac{\partial\omega y}{\partial y}\right)\mathbf{k}=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+2\omega\mathbf{k}=2\omega\mathbf{k}$$

すなわち、速度ベクトル **A** の回転(rot **A**) は角速度ベクトルの2倍を表し、回転に関係していることがわかる。

3. ガウスの定理(体積分 ←→面積分)

立体 V とそれを包む閉曲面 S について次式が成り立つ。これをガウスの定理という。

$$\int_V \nabla \bullet \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} dS$$

$\mathbf{n}$ は閉曲面 S の外向き単位 (長さ1)法線ベクトル

$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \int_s \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} ds = \nabla \bullet \mathbf{A}$ から、一つの微小立体で、

$$\int_v \nabla \bullet \mathbf{A} dv = \int_s \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} ds,$$

v : 微小立体の体積 , s : 同表面積

図13.に示すように、これを 立体 V 全体について積分すると 、微小立体どうしが接触する部分は $\int_s \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} ds$ が 0 になるので、接触が起き ない一番外側の閉曲面 S の部分だけの積分と等 しくなる。すなわち、

$$\int_V \nabla \bullet \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} dS$$

が成り立つ。この物理 的意味は、立体内部の発散の総和は、 立体表面から出て行く量に等しいとい うことである。

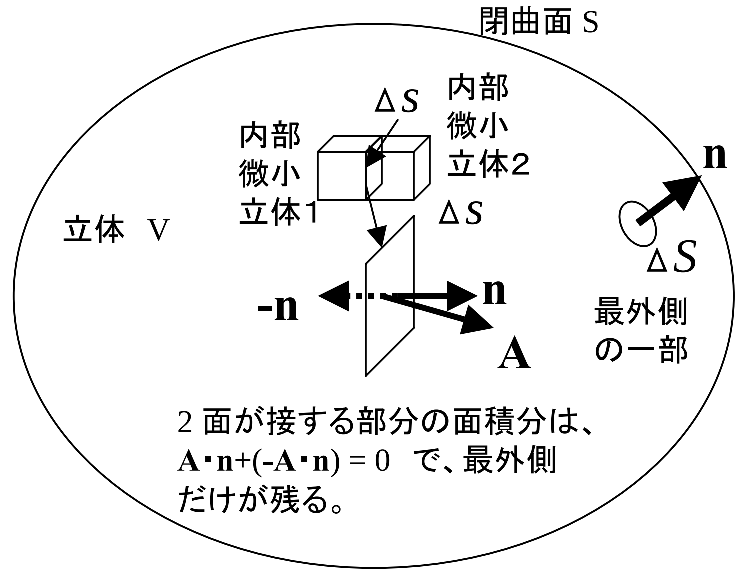


図 13. ガウスの定理

ガウスの定理の応用例

(1)マクスウェルの電磁方 程式で、磁束密度 $\mathbf{B}$ で

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0, \to \int_V \nabla \bullet \mathbf{B} dV = \int_S \mathbf{B} \bullet \mathbf{n} dS = 0$$

すなわち、立体の表面 に入る磁束と出る磁束の代数和は 0 である。

(2)マクスウェルの電磁方 程式で、電束密度 $\mathbf{D}$ で

$\nabla \bullet \mathbf{D} = \rho, \quad \rho =$ 立体内の電荷密度

$$\to \int_V \nabla \bullet \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV = Q$$

から、$Q = \int_S \mathbf{D} \bullet \mathbf{n} dS$

立体から出る電束の総 和は、立体内の電荷の総和に等しい。

4. ストークスの定理(面積分←→線積分)

曲面 S とそれを囲む閉曲線 C について次式が成り立つ。これをストークスの定理という。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \bullet \mathbf{t} dC$$

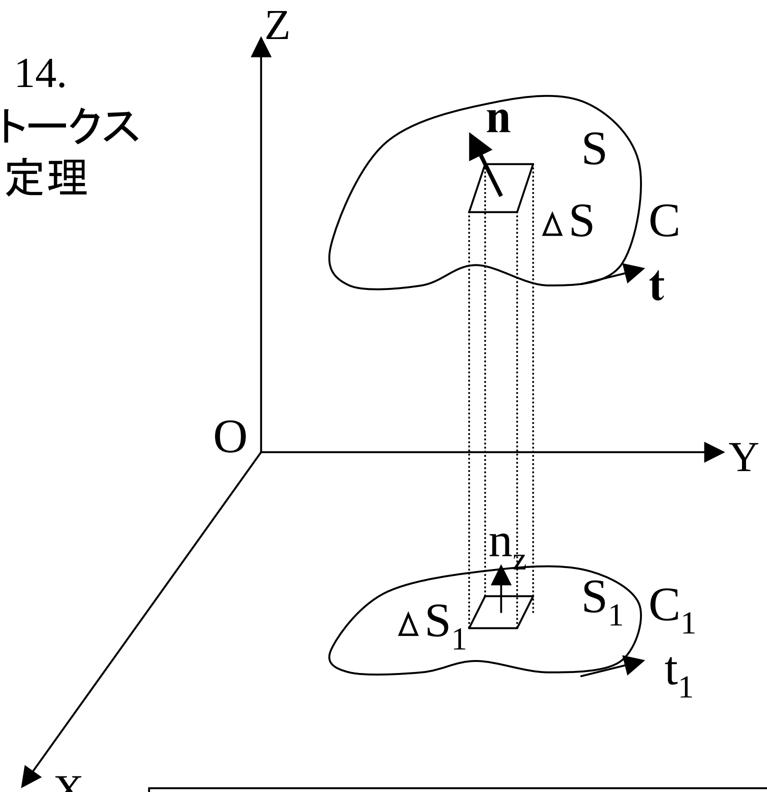
$\mathbf{n}$ は曲面 S の単位(長さ1)法線ベクトル
$\mathbf{t}$ は閉曲線 C の単位接線ベクトル

図15に示すように、閉曲線 C で囲まれた曲面 Sと、その中の微小面積 ΔSを考え、その $X-Y$ 平面への射影を下図に示す。
下図で、ΔS_1を囲む閉曲線に沿って、反時計廻りに$\mathbf{A}$の線積分を行うと、

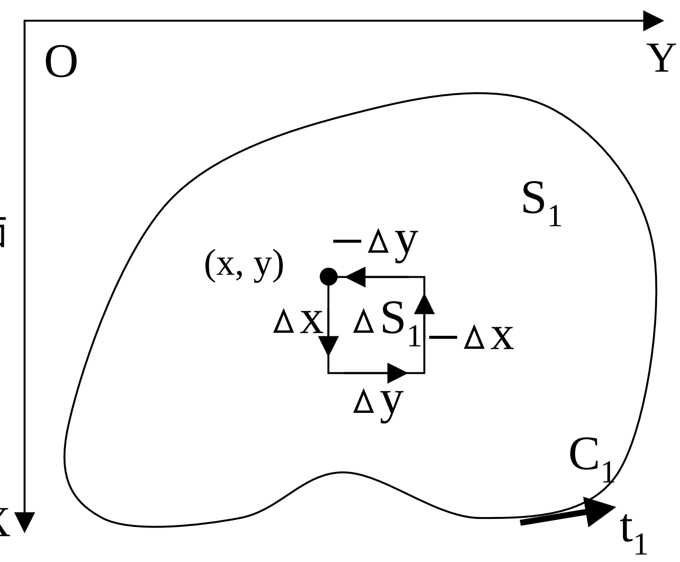
$$A_x(x,y)\Delta x + A_y(x+\Delta x, y)\Delta y$$
$$- A_x(x, y+\Delta y)\Delta x - A_y(x,y)\Delta y$$
$$= \{A_y(x+\Delta x, y) - A_y(x,y)\}\Delta y$$
$$- \{A_x(x, y+\Delta y) - A_x(x,y)\}\Delta x$$
$$\approx \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x \Delta y - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$
$$= (\nabla \times \mathbf{A})_z \Delta S_1 = (\nabla \times \mathbf{A})_z n_z \Delta S$$

S_1を無数の無限小長方形に分割して、それぞれについて線積分を実行しそれらを合計すると隣接部分は打消しあい、最外側の分だけが残る。すなわち、

図 14.
ストークスの定理



X-Y平面
拡大図



$$\oint_{C_1}\mathbf{A}\bullet d\mathbf{C}_1=\oint_C \mathbf{A}\bullet\mathbf{t}_1 d\mathbf{C}$$
$$=\int_{S_1}(\nabla\times\mathbf{A})_z dS_1=\int_S(\nabla\times\mathbf{A})_z n_z dS$$

$n_z:\mathbf{n}$ の z 成分

これを、$y-z$射影、(X成分)、$z-x$射影(Y成分)について行い合計すると、

$$\oint_C \mathbf{A}\bullet\mathbf{t}_1 dC+\oint_C \mathbf{A}\bullet\mathbf{t}_2 dC+\oint_C \mathbf{A}\bullet\mathbf{t}_3 dC=$$
$$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})_z n_z dS+\int_S(\nabla\times\mathbf{A})_x n_x dS+\int_S(\nabla\times\mathbf{A})_y n_y dS$$

$\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3$ はCの単位接線 $\mathbf{t}$ の$x-y, y-z, z-x$成分。

すなわち、

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\bullet\mathbf{n}dS=\oint_C\mathbf{A}\bullet\mathbf{t}dC$$

が得られる。この意味は、ベクトルの回転の曲面上の面積分が、その曲面を囲む線上でのベクトルの線積分に等しいということである。

スカラー三重積の性質を使うと、

$$\int_S\mathbf{A}\bullet(\mathbf{n}\times\nabla)dS=\oint_C\mathbf{A}\bullet\mathbf{t}dC$$ とも書ける。

ストークスの定理の応用例 1、図 15

マクスウェルの電磁方程式のひとつに、

$rot\ \mathbf{H}=\mathbf{i}+\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ がある。$\mathbf{H}$:磁界、$\mathbf{i}$:電流密度

$\mathbf{D}$:電束密度、　これから、$\mathbf{D}=0$ のとき、

$rot\ \mathbf{H}=\mathbf{i}$

ある曲面 Sとそれを囲む閉曲線 Cについて
ストークスの定理を適用すると、

$$\int_S rot\ \mathbf{H}\bullet\mathbf{n}dS=\int_S\mathbf{i}\bullet\mathbf{n}dS=\oint_C\mathbf{H}\bullet\mathbf{t}dC$$

これを利用して、無限長直線状電流 $\mathbf{I}$ から半径 R の点での磁界 $\mathbf{H}$ を求める。

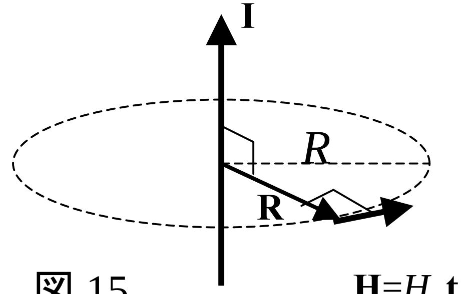


図 15.

$$\int_S\mathbf{i}\bullet\mathbf{n}dS=I=\oint_C\mathbf{H}\bullet\mathbf{t}dC$$
$$=\oint_\theta H_R R d\theta=H_R R\oint_\theta d\theta$$
$$\cdots(\text{対称性から})$$
$$=2\pi RH_R$$

すなわち、円周方向に、

$$H_R=\frac{I}{2\pi R}$$

ストークスの定理の応用例 2、図 16

同じくマクスウェルの電磁方程式のひとつから、

$$rot\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\rightarrow$$

$$-\int_S\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\bullet\mathbf{n}dS=\oint_C\mathbf{E}\bullet\mathbf{t}dC$$

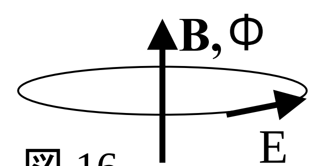


図 16.

これから、$V=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial t},\quad V=\oint_C\mathbf{E}\bullet\mathbf{t}dC,\ \Phi=\int_S\mathbf{B}\bullet\mathbf{n}dS$

すなわち、誘起電圧＝ －磁束の時間的変化率

5. グリーン(・ガウス)の定理(部分積分)

領域 V とそれを囲む閉曲面 S において
スカラー関数を $\varphi(x,y,z), \phi(x,y,z)$とすれば次式が成り立つ。これをグリーン(またはグリーン・ガウス)の定理という。

(i) $\int_V \left(\phi\nabla^2\varphi + \nabla\phi \bullet \nabla\varphi\right)dV = \int_S \phi\frac{d\varphi}{dn}dS$

(ii) $\int_V \left(\phi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\phi\right)dV = \int_S \left(\phi\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d\phi}{dn}\right)dS$

$\mathbf{n}$ は曲面 S の単位(長さ1)法線ベクトル

ガウスの定理で、$\mathbf{A} = \phi\nabla\varphi$ とおけば、

(iii) $\int_V \nabla \bullet (\phi\nabla\varphi)dV = \int_S \phi\nabla\varphi \bullet \mathbf{n}dS$

左辺は、$\nabla \bullet (\phi\nabla\varphi) = \phi\nabla^2\varphi + \nabla\phi\nabla\varphi$

右辺は、$\nabla\varphi \bullet \mathbf{n} = \dfrac{d\varphi}{dn}$ から(i)が得られる。

(iii)式は、一次元では、部分積分公式となる。

すなわち、$\dfrac{d}{dx}\left(\phi\dfrac{d\varphi}{dx}\right) = \phi\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \dfrac{d\phi}{dx}\dfrac{d\varphi}{dx}$ から、

両辺を $x = a$〜b で積分して、

$$\int_a^b \left(\phi\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right)dx = \phi\frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{x=b} - \phi\frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{x=a}$$

グリーン(・ガウス)の定理または部分積分公式は、有限要素法で活用される。

6. その他の主要公式

積分公式

① $\int_V \nabla u dV = \int_S \mathrm{n} u dS$

② $\int_V \nabla \times \mathrm{A} dV = \int_S \mathrm{n} \times \mathrm{A} dS$

③ $\int_S \mathrm{n} \times \nabla u dS = \int_C \mathrm{t} u ds$

④ $\int (\mathrm{n} \times \nabla) \times \mathrm{A} dS = \int_C \mathrm{t} \times \mathrm{A} ds$

微分公式

① $\nabla(\mathrm{uv}) = (\nabla \mathrm{u})\mathrm{v} + \mathrm{u}(\nabla \mathrm{v})$

② $\nabla \bullet (\mathrm{u}\mathbf{A}) = (\nabla \mathrm{u}) \bullet \mathbf{A} + \mathrm{u}(\nabla \bullet \mathbf{A})$

③ $\nabla \times (\mathrm{u}\mathbf{A}) = (\nabla \mathrm{u}) \times \mathbf{A} + \mathrm{u}(\nabla \times \mathbf{A})$

④ $\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$

⑤ $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \bullet \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \bullet \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \bullet \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \bullet \mathbf{A})$

⑥ $\nabla(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \bullet \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \bullet \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$

⑦ $\nabla \times (\nabla \mathrm{u}) = 0$

⑧ $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

⑨ $\nabla \times (\nabla \times \mathrm{A}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$