

公式その1

三角関数の諸公式

$$(i) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$(ii) \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$(iii) \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

$$(iv) \frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$$

$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$(3) 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

加法定理(複号同順)

$$(a) \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$(b) \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$(c) \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

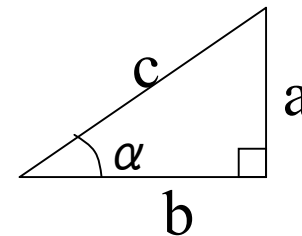
$$(d) \cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$$

説明

$$(i) \text{は、} \sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c},$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

(ii)~(iv)は定義。



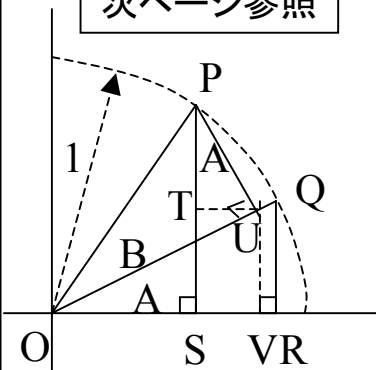
(1)は、ピタゴラスの定理から、

$a^2 + b^2 = c^2$, 両辺を a^2 で除して、

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1, \text{ これから、} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ この}$$

両辺を $\cos^2 \alpha, \sin^2 \alpha$ で除して(2), (3)を得る。

次ページ参照



$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= PS = ST + TP \\ &= UV + PU \cos A \\ &= UV + \sin B \cos A \\ QR : OQ &= UV : OU \text{ から、} \\ \sin A : 1 &= UV : \cos B \\ \therefore UV &= \sin A \cos B \\ \therefore \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned}$$

加法定理の証明は、オイラーの公式を使うと簡単になる。

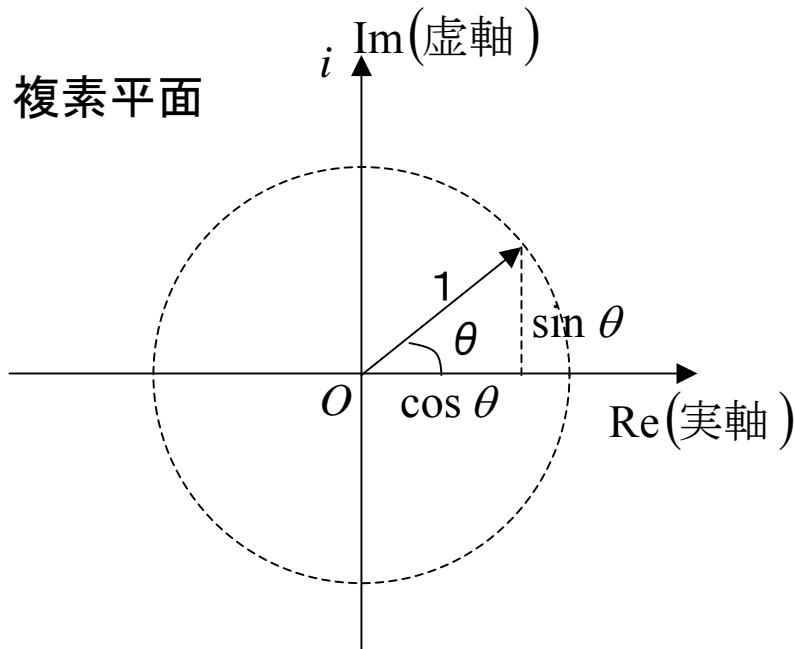
オイラーの公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \text{ これから、}$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta, \text{ この2式の和、差から、}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

複素平面上に半径1の円を描き半径を実軸から θ だけ反時計方向に回したときの座標が $\cos\theta + i\sin\theta$ になる。(下図)



オイラーの公式で、 $\theta = A+B$ とすれば、
 $e^{i(A+B)} = \cos(A+B) + i\sin(A+B) \dots\dots (1)$

$$= e^{iA} \times e^{iB} = (\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B) \\ = (\cos A \cos B - \sin A \sin B) + \\ + i(\sin A \cos B + \cos A \sin B) \dots\dots (2)$$

(1), (2) 式の実数部と虚数部がそれぞれ等しいので、

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

が得られる。

$B \rightarrow -B$ とすれば、

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

が得られる。

加法定理の(c), (d)は、

$$\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta, \cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$$

から得られる。

公式その2

三角関数の和・差

$$(イ) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$(ロ) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$(ハ) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$(ニ) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

三角関数の積

$$(ホ) \sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A + B) + \sin(A - B) \}$$

$$(ヘ) \cos A \sin B = \frac{1}{2} \{ \sin(A + B) - \sin(A - B) \}$$

$$(ト) \sin A \sin B = -\frac{1}{2} \{ \cos(A + B) - \cos(A - B) \}$$

$$(チ) \cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A + B) + \cos(A - B) \}$$

説明

(イ)は、 $\alpha = A + B, \beta = A - B$ とおき、この2式の和・差から、

$$A = \frac{\alpha + \beta}{2}, B = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

となることを利用して、

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin(A + B) + \sin(A - B) \\ &= 2 \sin A \cos B = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

(ロ)(ハ)(ニ)も同様にして求められる。

(ホ)は、右辺の $\{ \}$ 内に加法定理を適用して、 $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$ から得られる。

(ヘ)(ト)(チ)も同様にして得られる。

倍角の公式

(2倍角)

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

(3倍角)

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

(4倍角)

$$\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^3 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

(n倍角)

$$\sin n\alpha = {}_n C_1 \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha$$

$$- {}_n C_3 \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha$$

$$+ {}_n C_5 \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots$$

(2倍角)

オイラーの公式を用いて、

$e^{i2\alpha} = e^{i\alpha} \times e^{i\alpha}$ から、

$$\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2$$

$$= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + i 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ から

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

として、 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
が得られる。

(3倍角)

$e^{i3\alpha} = e^{i2\alpha} \times e^{i\alpha}$ から、

$$\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$$

$$= \{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha\} \times (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$= \{\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha\} +$$

$$+ i \{\cos 2\alpha \sin \alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha\}$$

$$= \{(2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha\}$$

$$+ i \{(1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha + (2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos \alpha\}$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha$$

$$+ i \{\sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)\}$$

$$= (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) + i (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)$$

応用例 正弦波交流の平均電力の計算

(4倍角) $e^{i4\alpha} = e^{i2\alpha} \times e^{i2\alpha}$ から、

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha &= (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)^2 \\ &= (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) + i 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 4\alpha &= 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &= 4 \sin \alpha \cos \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) \\ &= 4 \sin \alpha \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha &= 2 \cos^2 2\alpha - 1 \\ &= 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 \\ &= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 \end{aligned}$$

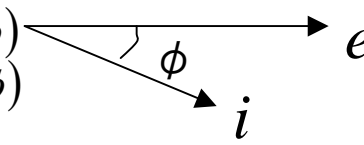
(n 倍角) $e^{in\alpha} = (e^{i\alpha})^n$ から、 $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1 \dots$ に注意して、

$$\begin{aligned} \cos n\alpha + i \sin n\alpha &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \\ &= {}_n C_0 \cos^n \alpha - {}_n C_2 \cos^{n-2} \sin^2 \alpha \\ &\quad + {}_n C_4 \cos^{n-4} \sin^4 \alpha - \dots \\ &\quad + i \{ {}_n C_1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - {}_n C_3 \cos^{n-3} \sin^3 \alpha \\ &\quad + {}_n C_5 \cos^{n-5} \sin^5 \alpha - \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin n\alpha &= {}_n C_1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - {}_n C_3 \cos^{n-3} \sin^3 \alpha \\ &\quad + {}_n C_5 \cos^{n-5} \sin^5 \alpha - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \cos^n \alpha - {}_n C_2 \cos^{n-2} \sin^2 \alpha \\ &\quad + {}_n C_4 \cos^{n-4} \sin^4 \alpha - \dots \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} {}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad {}_n C_0 = 1$$

$$e = E_m \sin \omega t, \quad i = I_m \sin(\omega t - \phi)$$


$$p = ei = E_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \phi)$$

公式(ト)から、

$$p = -\frac{E_m I_m}{2} \{ \cos(2\omega t - \phi) - \cos \phi \}$$

加法定理から、

$$\begin{aligned} &= \frac{E_m I_m}{2} \{ \cos \phi - \cos(2\omega t - \phi) \} \\ &= \frac{E_m I_m}{2} \{ \cos \phi - \cos 2\omega t \cos \phi - \sin 2\omega t \sin \phi \} \\ &= \frac{E_m I_m}{2} \{ \cos \phi (1 - \cos 2\omega t) - \sin \phi \sin 2\omega t \} \end{aligned}$$

平均電力 $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{周期}$

$$\int_0^T \cos 2\omega t dt = \frac{1}{2} [\sin 2\omega t]_0^T = 0,$$

$$\int_0^T \sin 2\omega t dt = \frac{1}{2} [-\cos 2\omega t]_0^T = 0,$$

$$\therefore P = \frac{E_m I_m}{2} \cos \phi = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \phi = E_e I_e \cos \phi$$

添字 m : 最大値、 e : 実効値