公式その1

三角関数の諸公式

(i) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

(ii) $\dfrac{1}{\sin\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha$

(iii) $\dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

(iv) $\dfrac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha$

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

(2) $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

(3) $1 + \cot^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\alpha$

加法定理(複号同順)

(a) $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$

(b) $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

(c) $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$

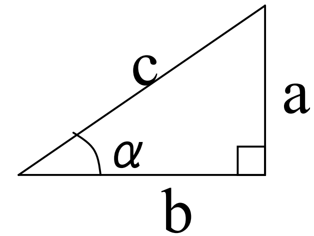
(d) $\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A\cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$

説明

(i) は、$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$,

$\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a/c}{b/c} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(ii)〜(iv) は定義。

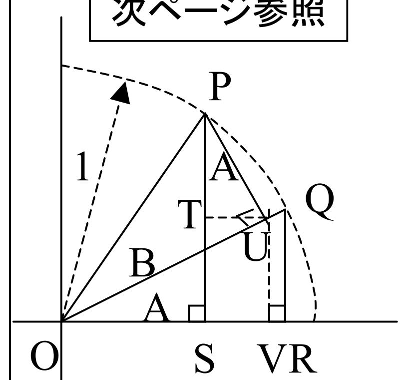


(1) は、ピタゴラスの定理から、

$a^2 + b^2 = c^2$, 両辺を a^2 で除して、

$\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = 1$, これから、$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, この両辺を $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ で除して(2), (3)を得る。

次ページ参照



$\sin(A+B) = PS = ST + TP$

$= UV + PU\cos A$

$= UV + \sin B\cos A$

$QR : OQ = UV : OU$ から、

$\sin A : 1 = UV : \cos B$

$\therefore UV = \sin A\cos B$

$\therefore \sin(A+B)$

$= \sin A\cos B + \cos A\sin B$

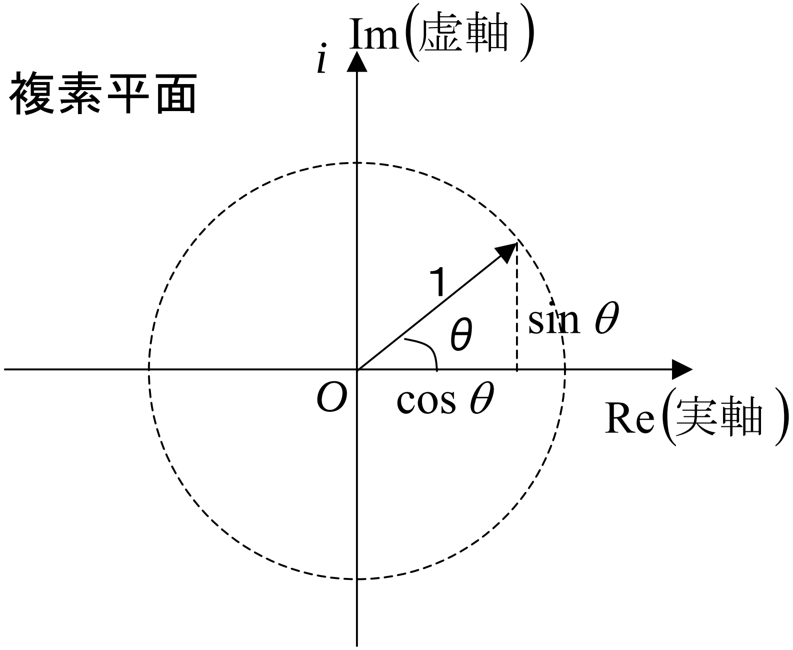
加法定理の証明は、オイラーの公式を使うと簡単になる。
オイラーの公式：

$\underline{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$, これから、

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$、この2式の和、差から、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

複素平面上に半径1の円を描き半径を実軸からθだけ反時計方向に回したときの座標が cos θ+i sin θ になる。（下図）



オイラーの公式で、$\theta = A+B$とすれば、

$$e^{i(A+B)} = \cos(A+B) + i\sin(A+B) \cdots\cdots (1)$$
$$= e^{iA}\times e^{iB} = (\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)$$
$$= (coaA\cos B - \sin A\sin B) +$$
$$+ i(\sin A\cos B + \cos B\sin A) \cdots\cdots (2)$$

$(1),(2)$ 式の実数部と虚数部がそれぞれ等しいので、

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

が得られる。

$B \to -B$とすれば、

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

が得られる。

加法定理の$(c),(d)$は、

$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$, $\cot\theta = \cos\theta/\sin\theta$

から得られる。

公式その２

三角関数の和·差

$$(\text{イ})\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$(\text{ロ})\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$(\text{ハ})\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$(\text{ニ})\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

三角関数の積

$$(\text{ホ})\ \sin A\cos B=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}$$

$$(\text{ヘ})\ \cos A\sin B=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$$

$$(\text{ト})\ \sin A\sin B=-\frac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}$$

$$(\text{チ})\ \cos A\cos B=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$$

説明

(イ)は、$\alpha=A+B, \beta=A-B$ とおき、この2式の和・差から、

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\ B=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

となることを利用して、

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$=2\sin A\cos B=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(ロ)(ハ)(ニ)も同様にして求められる。

(ホ)は、右辺の{ }内に加法定理を適用して、

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

から得られる。

(ヘ)(ト)(チ)も同様にして得られる。

説明

倍角の公式

(2倍角)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

(3倍角)

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

(4倍角)

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

(n 倍角)

$$\sin n\alpha = {}_nC_1 \sin\alpha\cos^{n-1}\alpha$$

$$- {}_nC_3 \sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha$$

$$+ {}_nC_5 \sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \cdots$$

(2 倍角)

オイラーの公式を用いて、

$e^{i2\alpha} = e^{i\alpha} \times e^{i\alpha}$ から、

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + i2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ から

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

として、$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

が得られる。

(3倍角)

$e^{i3\alpha} = e^{i2\alpha} \times e^{i\alpha}$ から、

$$\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$$

$$= \{\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha\} \times (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$= \{\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha\} +$$

$$+ i\{\cos 2\alpha\sin\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha\}$$

$$= \{(2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha\}$$

$$+ i\{(1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha + (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha\}$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha$$

$$+ i\{\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha)\}$$

$$= (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + i(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$$

(4倍角) $e^{i4\alpha}=e^{i2\alpha}\times e^{i2\alpha}$ から、

$$\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha=(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)^2$$
$$=(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)+i2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$
$$\therefore \sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$
$$=4\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)$$
$$=4\sin\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1$$
$$=2(2\cos^2\alpha-1)^2-1$$
$$=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$$

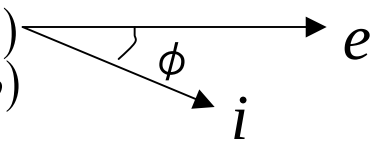
(n倍角) $e^{in\alpha}=(e^{i\alpha})^n$ から、$i^2=-1,\ i^3=-i,$
$i^4=1\cdots$に注意して、

$$\cos n\alpha+i\sin n\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$$
$$={}_nC_0\cos^n\alpha-{}_nC_2\cos^{n-2}\sin^2\alpha$$
$$+{}_nC_4\cos^{n-4}\sin^4\alpha-\cdots$$
$$+i\{{}_nC_1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-{}_nC_3\cos^{n-3}\sin^3\alpha$$
$$+{}_nC_5\cos^{n-5}\sin^5\alpha-\cdots\}$$

$$\therefore \sin n\alpha={}_nC_1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-{}_nC_3\cos^{n-3}\sin^3\alpha$$
$$+{}_nC_5\cos^{n-5}\sin^5\alpha-\cdots$$
$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-{}_nC_2\cos^{n-2}\sin^2\alpha$$
$$+{}_nC_4\cos^{n-4}\sin^4\alpha-\cdots$$

ただし、${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!},\quad {}_nC_0=1$

応用例　正弦波交流の平均電力の計算



$$e=E_m\sin\omega t,\ i=I_m\sin(\omega t-\phi)$$
$$p=ei=E_mI_m\sin\omega t\sin(\omega t-\phi)$$

公式(ト)から、

$$p=-\frac{E_mI_m}{2}\{\cos(2\omega t-\phi)-\cos\phi\}$$

加法定理から、

$$=\frac{E_mI_m}{2}\{\cos\phi-\cos(2\omega t-\phi)\}$$
$$=\frac{E_mI_m}{2}\{\cos\phi-\cos 2\omega t\cos\phi-\sin 2\omega t\sin\phi\}$$
$$=\frac{E_mI_m}{2}\{\cos\phi(1-\cos 2\omega t)-\sin\phi\sin 2\omega t\}$$

平均電力 $P=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p\,dt\qquad T=\dfrac{2\pi}{\omega}=$ 周期

$$\int_o^T\cos 2\omega t\,dt=\frac{1}{2}\left[\sin 2\omega t\right]_0^T=0,$$
$$\int_o^T\sin 2\omega t\,dt=\frac{1}{2}\left[-\cos 2\omega t\right]_0^T=0,$$
$$\therefore P=\frac{E_mI_m}{2}\cos\phi=\frac{E_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\phi=E_eI_e\cos\phi$$

添字m:最大値、e:実効値