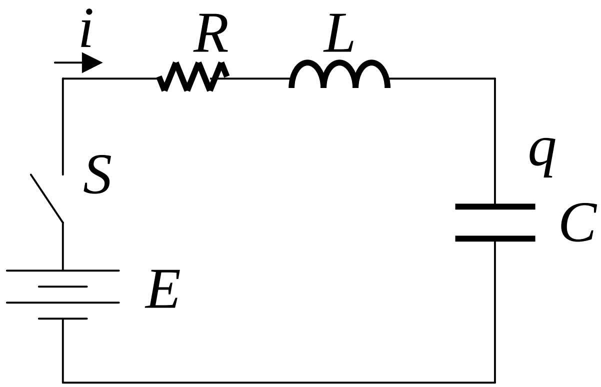
二次遅れ振動過渡現象の計算例
（エクセル使用）

１．差分法(=FDM）による近似解

２．Laplas 変換による解法



差分法による近似解

図でスイッチ S を投入した後の電流 i および C に蓄えられる電荷 q を求める。S の投入時刻を $t=0$ とすると、$t \geq 0$ で次式が成立する。

$$i=\frac{d\,q}{d\,t},$$

$$L\frac{d\,i}{d\,t}+Ri+\frac{1}{C}q=E$$

$q=x_1,\ i=x_2$ と置き整理して、

$$\frac{d\,x_1}{d\,t}=x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$\frac{d\,x_2}{d\,t}=-\frac{1}{LC}x_1-\frac{R}{L}x_2+\frac{1}{L}E \cdots\cdots (b)$$

時刻を Δt 刻みにとり、微分を差分で近似すると $(a)(b)$ 式は、第 n ステップ $t=n\Delta t$ の付近で、次のように表せる。

$$\frac{x_1^{n+1}-x_1^n}{\Delta t}=x_2^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a')$$

$$\frac{x_2^{n+1}-x_2^n}{\Delta t}=-\frac{1}{LC}x_1^n-\frac{R}{L}x_2^n+\frac{1}{L}E \cdots (b')$$

$x_1^n=x_1(n\Delta t), x_2^n=x_2(n\Delta t)$ である。

これから、第 $n+1$ ステップは、第 n ステップを用いて次のように表せる。

$$x_1^{n+1}=x_1^n+x_2^n\Delta t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a'')$$

$$x_2^{n+1}=x_2^n+\left(-\frac{1}{LC}x_1^n-\frac{R}{L}x_2^n+\frac{1}{L}E\right)\Delta t \cdots (b'')$$

$L=R=E=1$ (SI単位系)の場合の q, i をエクセルを用いて計算する方法を紹介する。あわせて、比較のため理論解も求める。
次頁参照

1	A	B	C	D	E
2	t	q	i	q0	i0
3	−0.10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
4	−0.09	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	−0.08	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
6	−0.07	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
7	−0.06	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
8	−0.05	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
9	−0.04	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10	−0.03	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
11	−0.02	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
12	−0.01	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
13	0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
14	0.01	0.000000	0.010000	0.000050	0.009950
15	0.02	0.000100	0.019900	0.000199	0.019800
16	0.03	0.000299	0.029700	0.000446	0.029550
17	0.04	0.000596	0.039400	0.000789	0.039200
18	0.05	0.000990	0.049000	0.001229	0.048750
19	0.06	0.001480	0.058500	0.001764	0.058201
20	0.07	0.002065	0.067900	0.002393	0.067551
21	0.08	0.002744	0.077201	0.003115	0.076802
22	0.09	0.003516	0.086401	0.003929	0.085953
23	0.10	0.004380	0.095502	0.004833	0.095004
24	0.11	0.005335	0.104503	0.005828	0.103956
25	0.12	0.006380	0.113405	0.006912	0.112808
26	0.13	0.007514	0.122207	0.008084	0.121562
27	0.14	0.008736	0.130910	0.009343	0.130216
28	0.15	0.010045	0.139513	0.010688	0.138770
29	0.16	0.011440	0.148018	0.012118	0.147226
30	0.17	0.012921	0.156423	0.013632	0.155584
31	0.18	0.014485	0.164730	0.015230	0.163842

605	5.93	1.004515	−0.054452	1.005971	−0.054286
606	5.94	1.003971	−0.053953	1.005430	−0.053803
607	5.95	1.003431	−0.053453	1.004895	−0.053319
608	5.96	1.002897	−0.052953	1.004364	−0.052834
609	5.97	1.002367	−0.052452	1.003838	−0.052349
610	5.98	1.001843	−0.051952	1.003317	−0.051864
611	5.99	1.001323	−0.051450	1.002801	−0.051378
612	6.00	1.000809	−0.050949	1.002289	−0.050892

Δt = 0.01秒 刻みに表した時刻

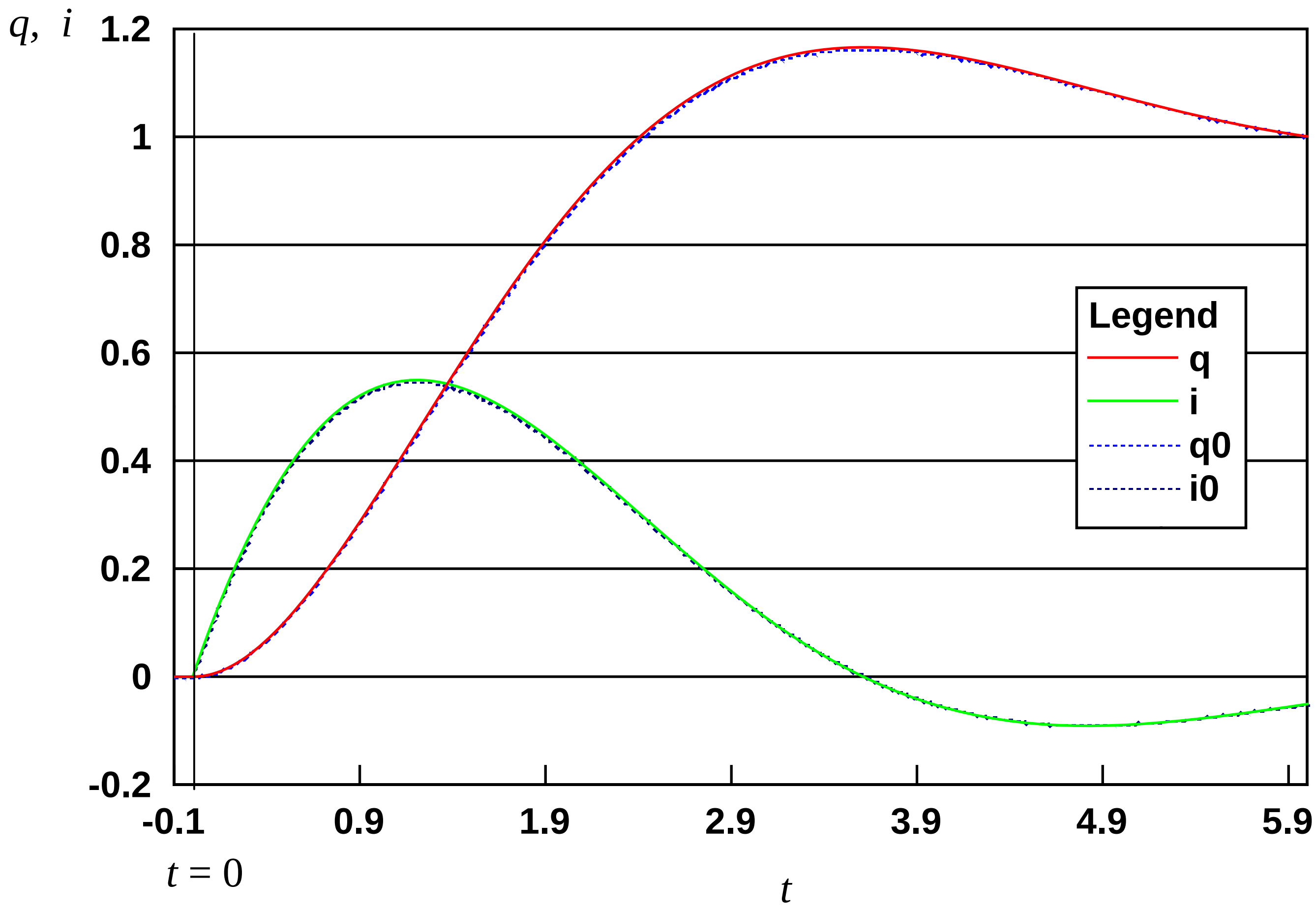
=B13+C13*0.01　差分法　a’’式

=C13+(-C13-B13+1)*0.01　差分法　b’’式

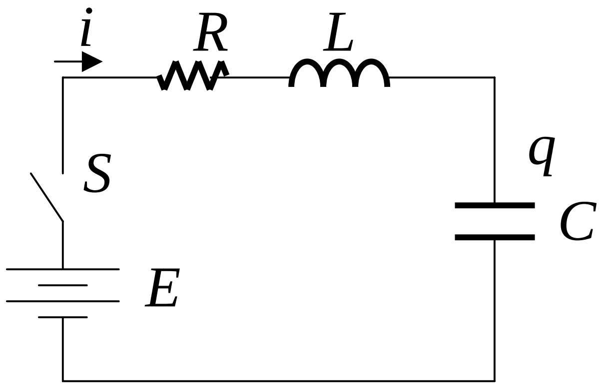
=1-EXP(-0.5*A14)*(COS(SQRT(3)/2*A14)
+1 /SQRT(3) *SIN(SQRT(3)/2*A14))　p.6 のx_1 の式
理論値

=1 /(SQRT(3)/2) *EXP(-0.5*A14) *SIN(SQRT(3)/2*A14)
p.6 の x_2 の式
理論値

この結果をグラフに表すと次頁に示すようになり、
理論値と、 Δt = 0.01 秒刻みに時刻をとって計算した
差分法の結果とよく一致する。Δt を大きくとると計算
ステップ数は減少するが誤差は大きくなる。
差分法の式は非常に簡単であることに注意。



q, i
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.1
0.9
1.9
2.9
3.9
4.9
5.9
t = 0
t
Legend
q
i
q0
i0



理論解

ラプラス変換を使って　理論解を求めて見る。

$$\frac{d\,x_1}{d\,t} = x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$\frac{d\,x_2}{d\,t} = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}E \cdots\cdots (b)$$

この2式をラプラス変換する　と、

$$sX_1 - x_{10} = X_2$$

$$sX_2 - x_{20} = -\frac{1}{LC}X_1 - \frac{R}{L}X_2 + \frac{1}{L}\frac{E}{s}$$

$x_{10} = q(0),\ x_{20} = i(0)$ は $t = 0$ における初期値である。

行列表示すれば、

$$s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{sL} \end{bmatrix}E$$

整理して、

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}E$$

ここに、 $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{sL} \end{bmatrix}$$

以上から、

$$\mathbf{X} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}E)$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{1}{LC} & s+\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}}\begin{bmatrix} s+\dfrac{R}{L} & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & s \end{bmatrix}$$ であるから、

$$X_1=\frac{1}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}}\left\{\left(s+\frac{R}{L}\right)x_{10}+x_{20}+\frac{E}{sL}\right\}$$

$$X_2=\frac{1}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}}\left\{-\frac{x_{10}}{LC}+sx_{20}+\frac{E}{L}\right\}$$

いま、 $\alpha=\dfrac{R}{2L},\omega^2=\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2>0$ とする

と、 $s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}=(s+\alpha)^2+\omega^2$ となる。

また、回路の特徴から 、$x_{20}=i(0)=0$ としてよい。

$$X_1=\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\left\{(s+2\alpha)x_{10}+\frac{E}{sL}\right\}$$

$$X_2=\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\left\{-\frac{x_{10}}{LC}+\frac{E}{L}\right\}$$

$$X_1=\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\left\{(s+2\alpha)x_{10}+\frac{E}{sL}\right\}$$

$$=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}x_{10}+\frac{\alpha}{\omega}\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}x_{10}+$$

$$+\frac{E}{(\alpha^2+\omega^2)L}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}-\frac{\alpha}{\omega}\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\right\}$$

ラプラス逆変換して、

$$x_1=q=\varepsilon^{-\alpha t}\left(x_{10}\cos\omega t+\frac{\alpha x_{10}}{\omega}\sin\omega t\right)+$$

$$+\frac{E}{(\alpha^2+\omega^2)L}\left\{1-\varepsilon^{-\alpha t}\left(\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)\right\}$$

$$X_2=\frac{1}{\omega}\left\{-\frac{x_{10}}{LC}+\frac{E}{L}\right\}\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$x_2=i=\frac{1}{\omega}\left\{-\frac{x_{10}}{LC}+\frac{E}{L}\right\}\varepsilon^{-\alpha t}\sin\omega t$$

$x_{10}=q(0)=0$ のときは、

$$x_1=q=\frac{E}{(\alpha^2+\omega^2)L}\left\{1-\varepsilon^{-\alpha t}\left(\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)\right\}$$

$$x_2=i=\frac{E}{\omega L}\varepsilon^{-\alpha t}\sin\omega t$$