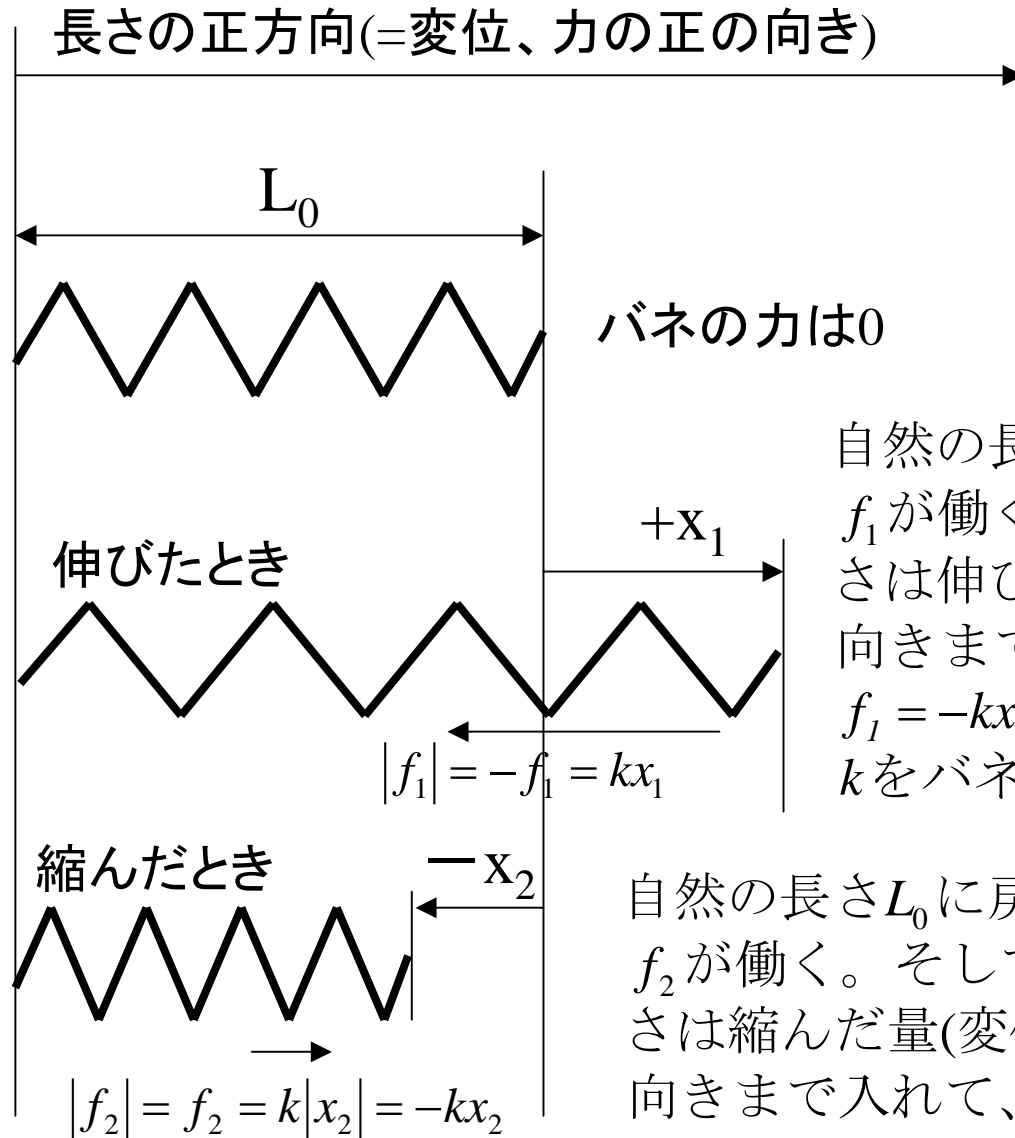


バネの基本

- 1.基本事項
- 2.伸びたときで代表
- 3.二つのバネを連結したとき
 - その1. 直列接続
 - その2. 並列接続
- 4.バネに蓄えられるエネルギー

練習問題

1. 基本事項



自然の長さ L_0 に戻そうとする力 f_1 が働く。そして、その大きさは伸びの量(変位)に比例する。向きまで入れて、次式になる。

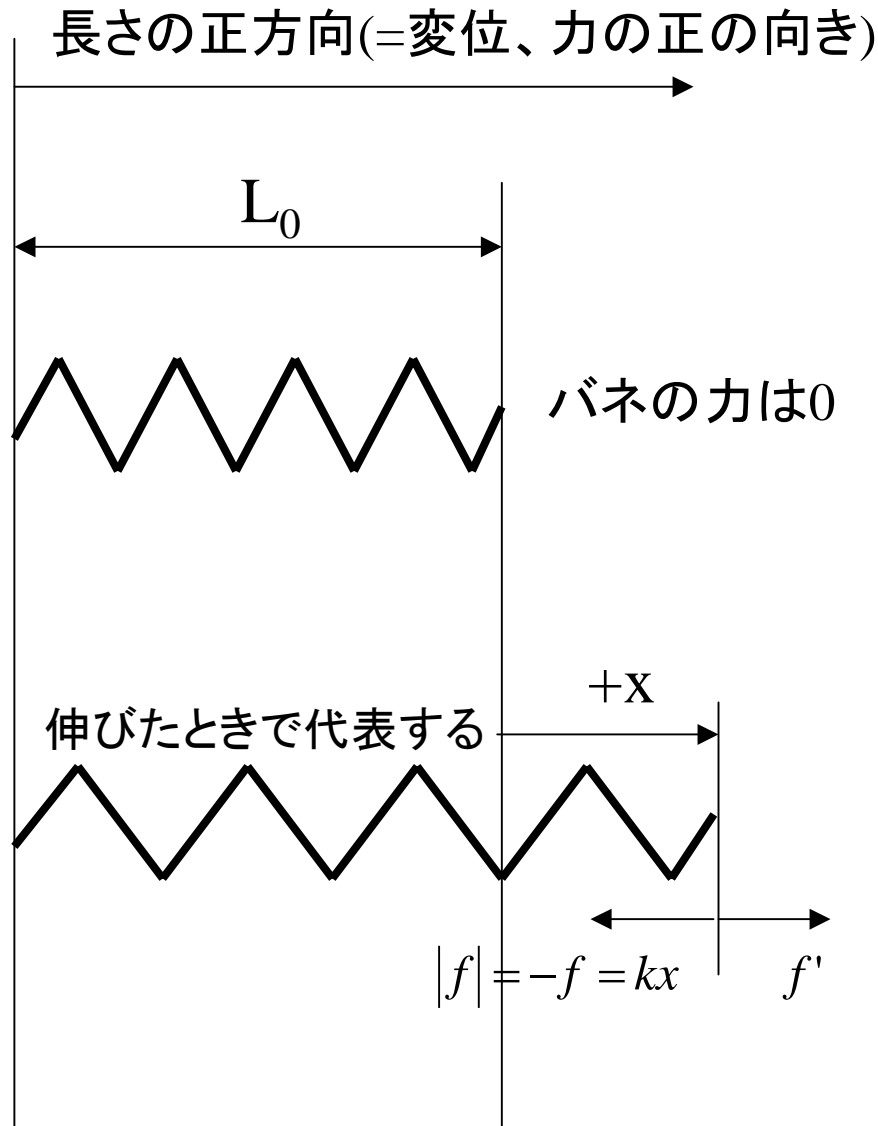
$$f_1 = -kx_1, \quad x_1 > 0$$

k をバネ定数という。単位は[N/m]

自然の長さ L_0 に戻そうとする力 f_2 が働く。そして、その大きさは縮んだ量(変位)に比例する。向きまで入れて、次式になる。

$$f_2 = -kx_2, \quad x_2 < 0$$

2.伸びたときで代表(縮むときは変位が負になる。)



伸びたときで代表すれば、縮むときは変位が負になり、同じ式で表せる。

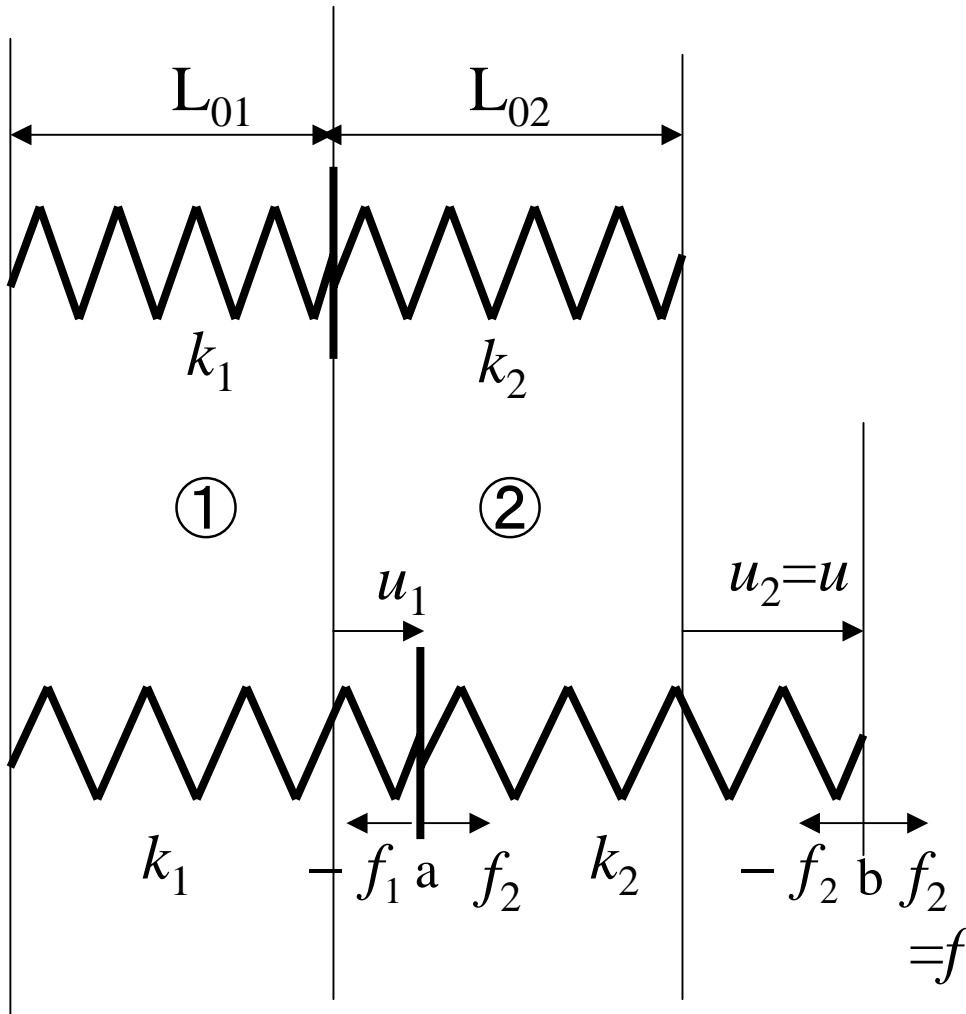
変位が生ずれば、自然の長さ L_0 に戻そうとする力 f が働く。そして、その大きさは変位量に比例する。力の向きを、長さの正方向に合わせて次式になる。

$$f = -kx$$

x の位置にとどめるためには、 $f' = |f|$, ($f' > 0$, 右向き)

の外力を加える必要がある。

3. 二つのバネを連結したとき その1、直列接続



①の変位量は、 u_1

$$\rightarrow f_1 = -k_1 u_1$$

②の変位量は、 $u_2 - u_1$

$$\rightarrow f_2 = -k_2 (u_2 - u_1)$$

静止したときの、 a 点、 b 点の力のバランスから

$$f_1 = f_2 (= f \text{ と書く})$$

$-k_1 u_1 = -k_2 (u_2 - u_1)$ から、

$$u_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} u_2 \text{ となる。}$$

総合して1本のバネと見なし

$f = -k u_2$ とおけば、

$$f = f_1 = -k_1 u_1 = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} u_2 \text{ から、}$$

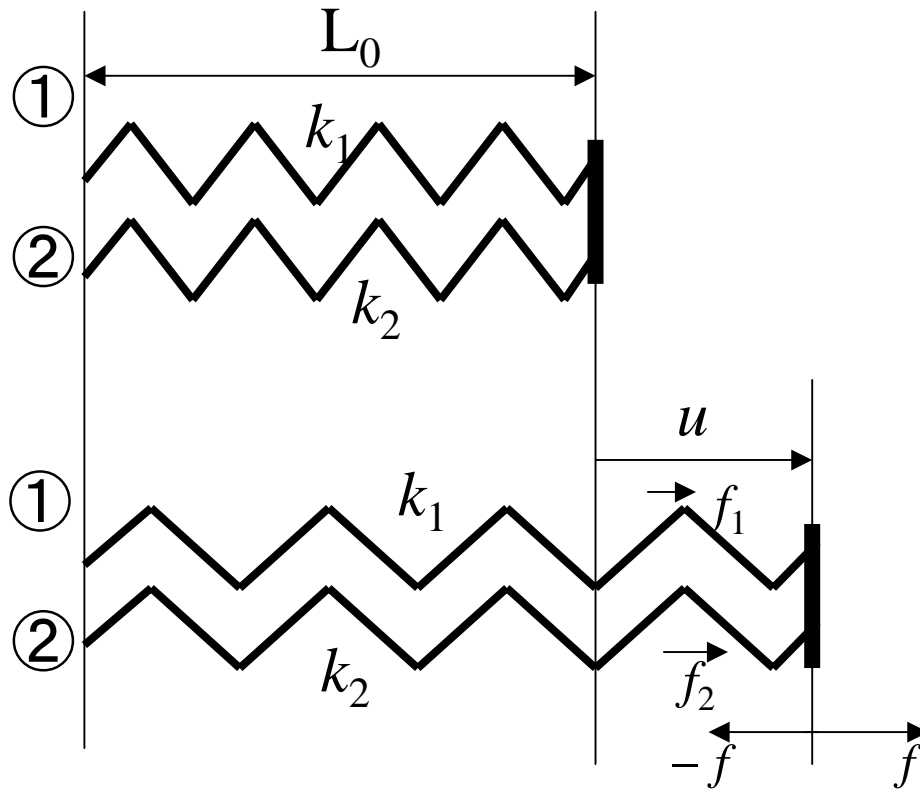
$u = u_2$ として、

$$f = -k u = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} u$$

$$k = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2} \text{ となる。}$$

(電気抵抗の並列接続と類似)

その2、並列接続



変位量は、①②共通で、 u

$$\rightarrow f_1 = -k_1 u$$

$$\rightarrow f_2 = -k_2 u$$

合成した力を f とすれば

$$f = f_1 + f_2$$

$$= -k_1 u - k_2 u = -(k_1 + k_2) u$$

となる。

総合して1本のバネと見なし

$f = -ku$ とおけば、

$$f = -(k_1 + k_2) u$$

となる。

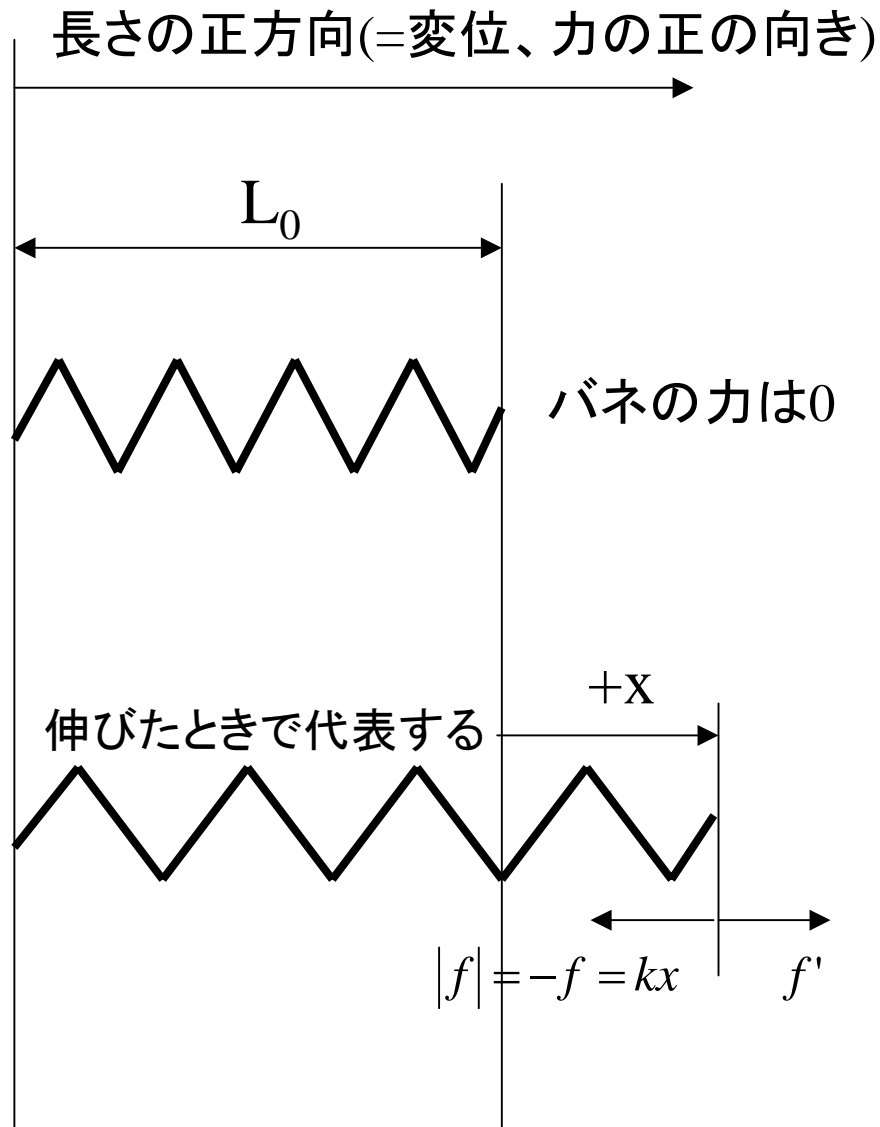
すなわち、

$$f = -ku = -(k_1 + k_2) u$$

となる。

(電気抵抗の直列接続と類似)

4.バネに蓄えられるエネルギー



伸びたときで代表すれば、縮むときは変位が負になり、バネに働く力と変位の関係は、 $f = -kx$ として同じ式で表せる。

ちょうどこの力に見合う外力 f' を f と逆向きに加えるとバネを伸ばすことができる。

すなわち $f' = -f$ である。

$x=0$ から力を強め $x=u$ になったとすると、この外力のなした (失った) エネルギー W がバネに蓄えられたエネルギーに等しい。 f' という力で dx だけ変位を与えるときのエネルギー dW は、 $dW = f' dx$ であるから、

$$W = \int_0^u dW = \int_0^u f' dx = \int_0^u (-f) dx$$

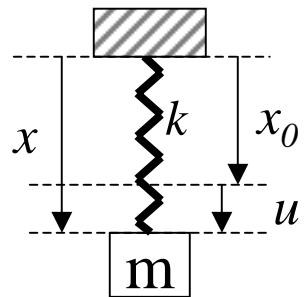
$$= \int_0^u kx dx = \frac{1}{2} k [x^2]_0^u = \frac{1}{2} ku^2$$

変位量を x で表すときは、

$$W = \frac{1}{2} kx^2 \text{ である。}$$

練習問題

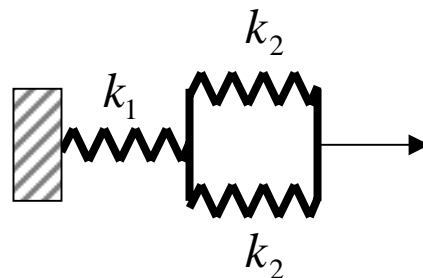
①



重力場
重力加速度 = g

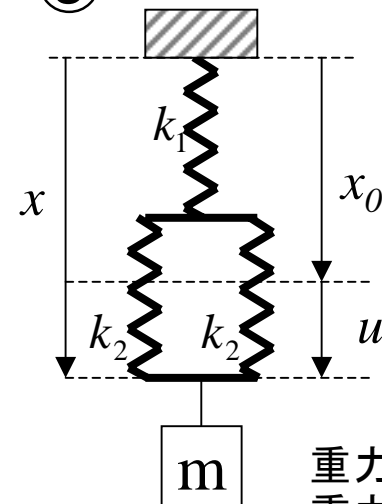
- 静止位置を求めよ。ただし、 $m=0$ のとき $u=0$
- m の運動方程式を求めよ。
- m の振動周期 T と振動数 f を求めよ。

②



- 合成バネ定数を求めよ
- 伸びが u のとき、バネに蓄えられるエネルギーを求めよ。

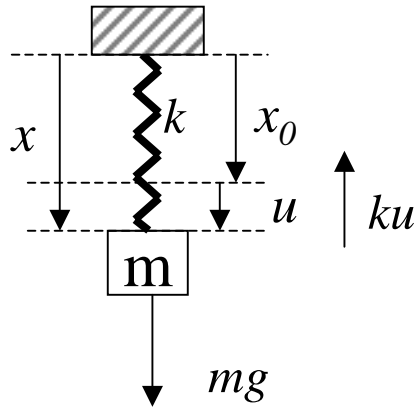
③



重力場
重力加速度 = g

- 静止位置を求めよ。ただし、 $m=0$ のとき $u=0$
- m の運動方程式を求めよ。
- m の振動数 f と周期 T を求めよ。

解①



m に働く力は、下向きに重力 mg 、上向きに、バネの力 ku 、合成して下向きに、 $mg - ku$ である。

(a) $mg - ku = 0$ で釣り合い静止するので、 $u = \frac{mg}{k}$ 、 $x = x_0 + \frac{mg}{k}$ である。

(b) $f = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2u}{dt^2}$ から、

$m \frac{d^2u}{dt^2} = mg - ku$ 、整理して、

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = g$$

x で表すと、 $u = x - x_0$ として、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x_0) = g \text{ から、}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0 + g \text{ となる。}$$

$$(c) \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = g \text{ を}$$

初期条件、 $u(0) = 0, (du/dt)_{t=0} = 0$ として解く。

$v = \frac{du}{dt}$ (速度)、 $\frac{k}{m} = \omega^2$ と置けば、

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2u = g, \text{ (この形から、}$$

$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ としてもよい。)

$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2u = 0$ の解(一般解)を求める。

$$u_1 = \varepsilon^{\lambda t} \text{ と置くと、} (\lambda^2 + \omega^2)\varepsilon^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = \pm j\omega$$

$$\therefore u_1 = A\varepsilon^{j\omega t} + B\varepsilon^{-j\omega t}$$

次に、 $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2u = g$ の特別解は、

$$u_2 = \frac{g}{\omega^2} \text{ であるから、解は、}$$

$$u = u_1 + u_2 = A\varepsilon^{j\omega t} + B\varepsilon^{-j\omega t} + \frac{g}{\omega^2}$$

$t = 0$ で、 $u = 0, v = 0$ であるから、

$$0 = A + B + \frac{g}{\omega^2}$$

$$v(0) = \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = (j\omega A \varepsilon^{j\omega t} - j\omega B \varepsilon^{-j\omega t})_{t=0} = j\omega(A - B) = 0$$

$$\therefore A = B,$$

$$0 = A + B + \frac{g}{\omega^2} = 2A + \frac{g}{\omega^2},$$

$$\therefore A = -\frac{g}{2\omega^2} = B$$

$$\therefore u = \frac{g}{\omega^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^{j\omega t} + \varepsilon^{-j\omega t}}{2} \right)$$

$$= \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

角周波数 ω は、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ から、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(c)別解 $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = g$ をラプラス変換を用いて解く。

$v = \frac{du}{dt}$ (速度), $\frac{k}{m} = \omega^2$ と置けば、

$$\dot{u} = v$$

$$\dot{v} = -\omega^2 u + g$$

ラプラス変換して、

$$sU - u(0) = V$$

$$sV - v(0) = -\omega^2 U + g/s$$

(周期や振動数を求めるだけなら、

$u(0) = v(0) = 0$ としてよいが、ここでは、完全な解を求めておく。)

$$sU - V = u(0) \dots \dots \dots (1)$$

$$\omega^2 U + sV = v(0) + g/s \dots (2)$$

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) + g/s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) + g/s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) + g/s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{su(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{v(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{g/s}{s^2 + \omega^2} \\ -\frac{\omega^2 u(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{sv(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{g}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{su(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\omega v(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{g}{\omega^2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ -\omega \frac{\omega u(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{sv(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\omega g}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

ラプラス逆変換して、時間領域の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ u(0) - \frac{g}{\omega^2} \right\} \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2} \\ -\omega u(0) + \frac{g}{\omega} \sin \omega t + v(0) \cos \omega t \end{bmatrix}$$

周期を T とすれば、 $\omega T = 2\pi$ から、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

振動数 f は、 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

なお、初期値がすべて 0 のときは、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \\ \frac{g}{\omega} \sin \omega t \end{bmatrix} \text{となる。}$$

解②

k_2 は2個並列、これと k_1 が直列なので、
合成バネ定数は、

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 + k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{2k_2}} = \frac{2k_1k_2}{k_1 + 2k_2}$$

伸びが u のとき、バネに蓄えられる
エネルギー W は、

$$W = \frac{1}{2}ku^2$$

であるから、ここでは、

$$W = \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2} \frac{2k_1k_2}{k_1 + 2k_2} u^2$$

$$= \frac{k_1k_2}{k_1 + 2k_2} u^2$$

となる。

③の図のように、バネの自然長を x_0 、

伸びた時の全長を x とすれば、

$u = x - x_0$ から、

$$W = \frac{k_1k_2}{k_1 + 2k_2} (x - x_0)^2$$

と表すこともできる。

解③

①で、 $k = \frac{2k_1k_2}{k_1 + 2k_2}$ と置けばよい。

(a) 静止位置は、

$$u = \frac{mg}{k} = \frac{mg(k_1 + 2k_2)}{2k_1k_2}$$

(b) 運動方程式は、

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2k_1k_2}{m(k_1 + 2k_2)}u = g$$

(c) 周期および振動数は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + 2k_2)}{2k_1k_2}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k_1k_2}{m(k_1 + 2k_2)}}$$