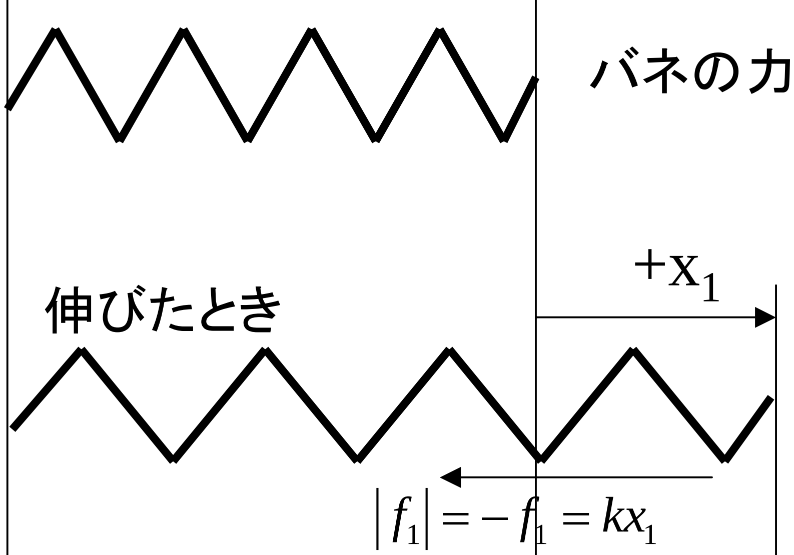
バネの基本

1.基本事項
2.伸びたときで代表
3.二つのバネを連結したとき
その1．直列接続
その2.　並列接続
4.バネに蓄えられるエネルギー

練習問題

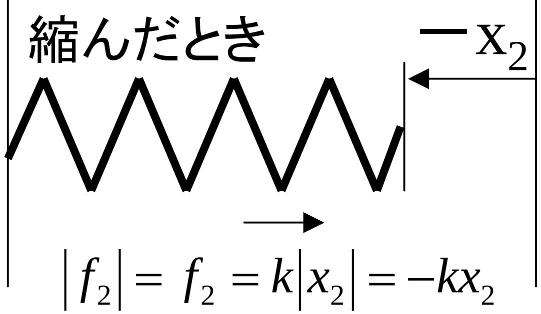
1.基本事項



自然の長さL_0に戻そうとする力f_1が働く。そして、その大きさは伸びの量(変位)に比例する。向きまで入れて、次式になる。

$$f_1 = -kx_1, \qquad x_1 > 0$$

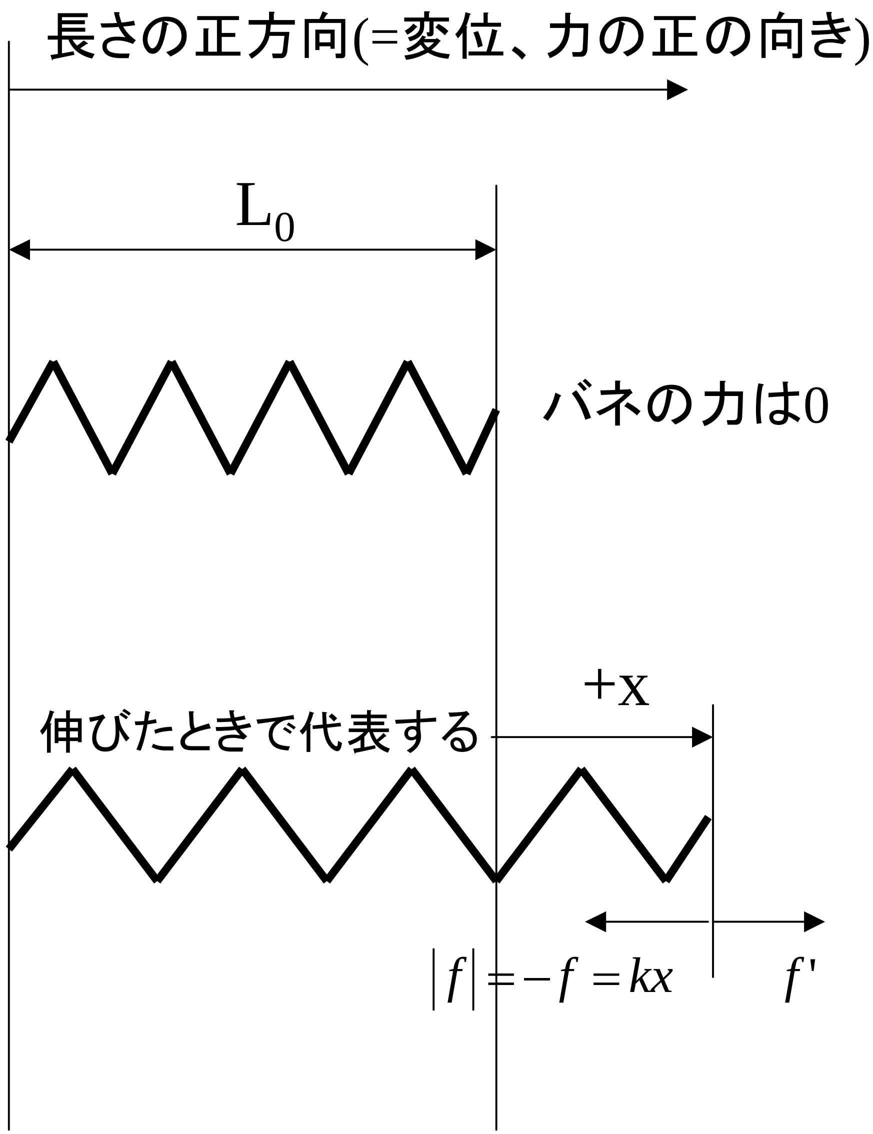
kをバネ定数という。単位は[N/m]



自然の長さL_0に戻そうとする力f_2が働く。そして、その大きさは縮んだ量(変位)に比例する。向きまで入れて、次式になる。

$$f_2 = -kx_2, \quad x_2 < 0$$

2.伸びたときで代表(縮むときは変位が負になる。)



伸びたときで代表すれば、縮むときは変位が負になり、同じ式で表せる。
変位が生ずれば、自然の長さL_0に戻そうとする力fが働く。そして、その大きさは変位量に比例する。
力の向きを、長さの正方向に合わせて次式になる。

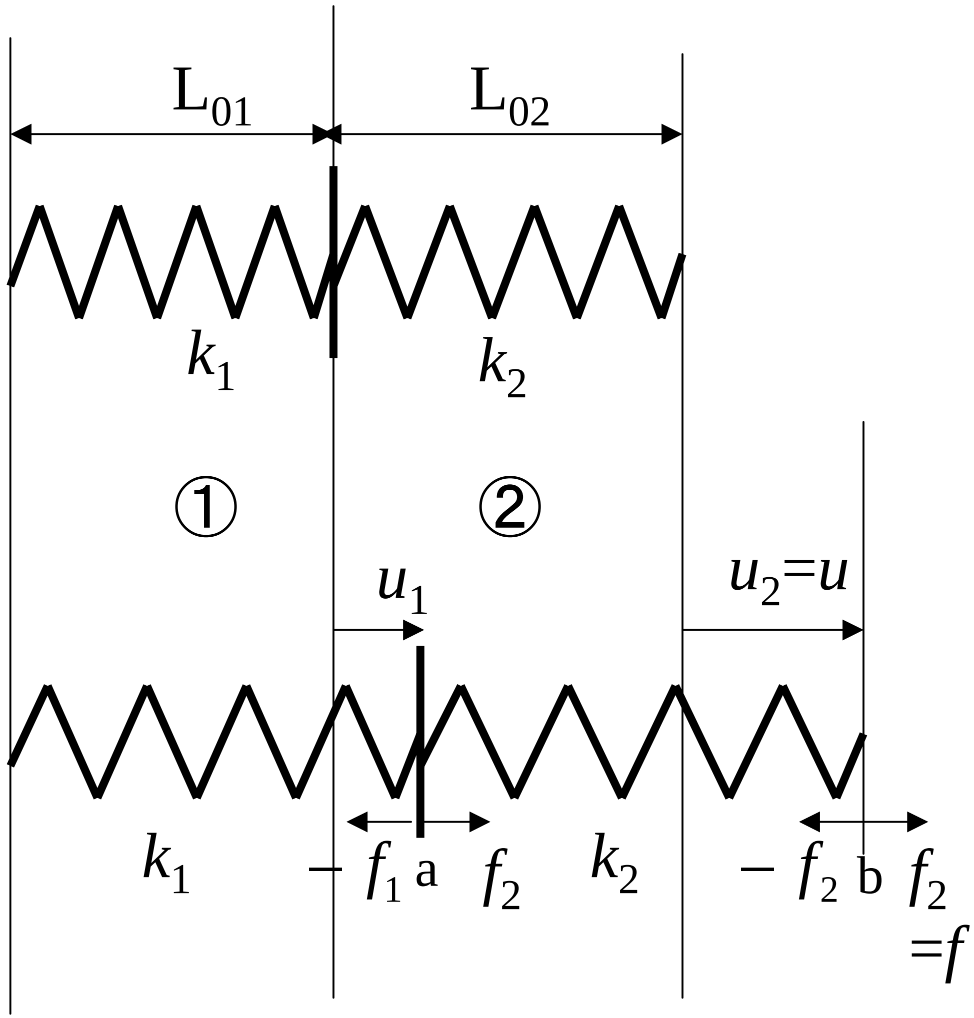
$$f = -kx$$

xの位置にとどめるためには、

$$f' = |f|, \qquad (f' > 0, \text{右向き})$$

の外力を加える必要がある。

3. 二つのバネを連結したとき
その1、直列接続



①の変位量は、u_1

$$\rightarrow f_1 = -k_1 u_1$$

②の変位量は、$u_2 - u_1$

$$\rightarrow f_2 = -k_2(u_2 - u_1)$$

静止したときの、a点、b点の力のバランスから

$f_1 = f_2$(= f と書く)

$-k_1 u_1 = -k_2(u_2 - u_1)$から、

$u_1 = \dfrac{k_2}{k_1 + k_2} u_2$ となる。

総合して1本のバネと見なし

$f = -ku_2$ とおけば、

$f = f_1 = -k_1 u_1 = -\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} u_2$ から、

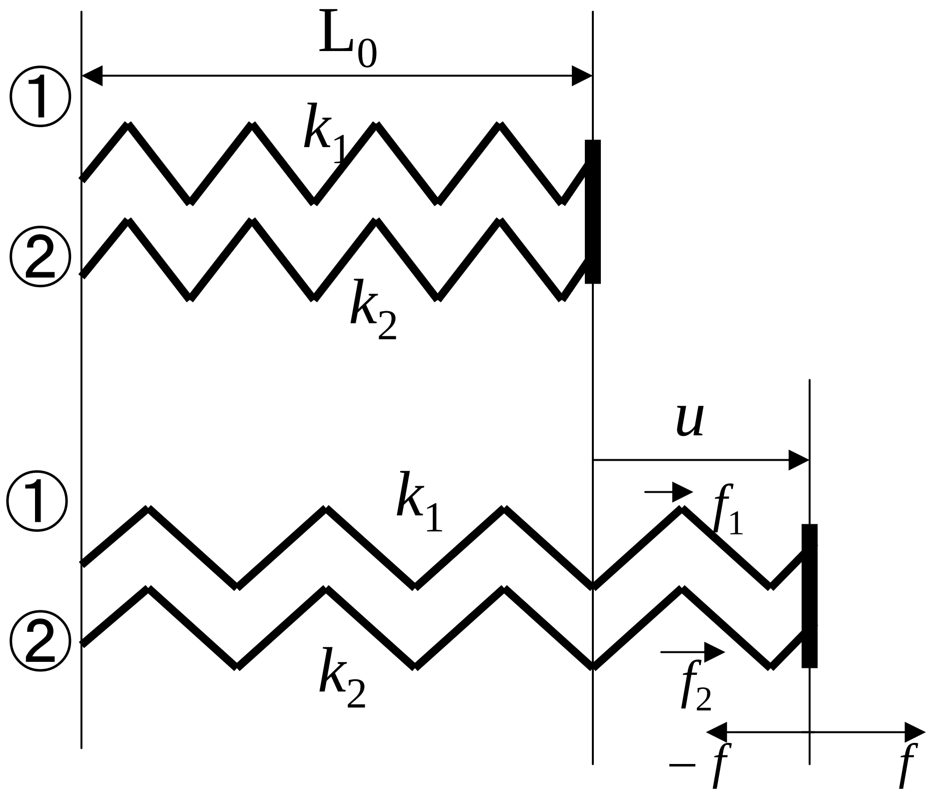
$u = u_2$ として、

$f = -ku = -\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} u$

$k = \dfrac{1}{1/k_1 + 1/k_2}$となる。

(電気抵抗の並列接続と類似)

その2、並列接続



変位量は、①②共通で、u

$\rightarrow f_1 = -k_1 u$

$\rightarrow f_2 = -k_2 u$

合成した力をfとすれば

$f = f_1 + f_2$

$= -k_1 u - k_2 u = -(k_1 + k_2)u$

となる。

総合して1本のバネと見なし

$f = -ku$ とおけば、

$f = -(k_1 + k_2)u$

となる。

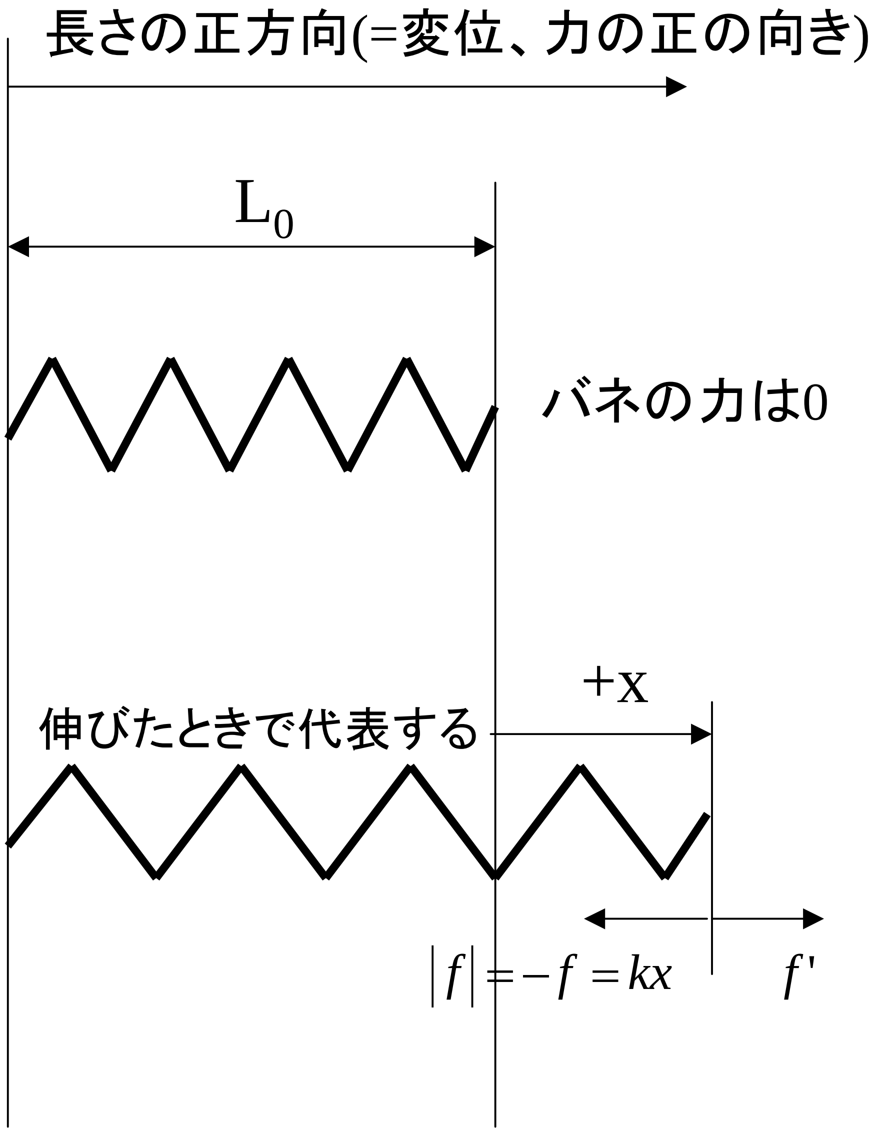
すなわち、

$f = -ku = -(k_1 + k_2)u$

となる。

(電気抵抗の直列接続と類似)

4.バネに蓄えられるエネルギー



伸びたときで代表すれば、縮むときは変位が負になり、バネに働く力と変位の関係は、$f = -kx$ として同じ式で表せる。

　ちょうどこの力に見合う外力 f' を f と逆向きに加えるとバネを伸ばすことができる。

すなわち $f' = -f$ である。

$x = 0$ から力を強め $x = u$ になったとすると、この外力のなした（失った）エネルギーWがバネに蓄えられたエネルギーに等しい。f'という力でdxだけ変位を与えるときのエネルギー dW は、

$dW = f'dx$であるから、

$$W = \int_0^u dW = \int_0^u f'dx = \int_0^u (-f)dx$$

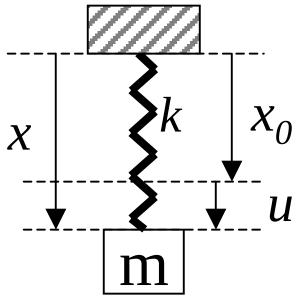
$$= \int_0^u kxdx = = \frac{1}{2}k\left[x^2\right]_0^u = \frac{1}{2}ku^2$$

変位量をxで表すときは、

$W = \frac{1}{2}kx^2$ である。

練習問題

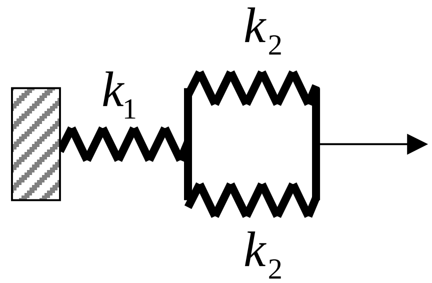
①



重力場
重力加速度= g

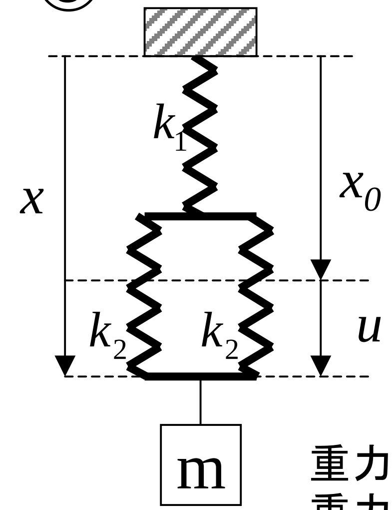
(a)　静止位置を求めよ。ただし、m=0 のとき u=0
(b) mの運動方程式を求めよ。
(c)mの振動周期 T と振動数 f を求めよ。

②



(a) 合成バネ定数を求めよ
(b) 伸びが u のとき、バネに蓄えられるエネルギーを求めよ。

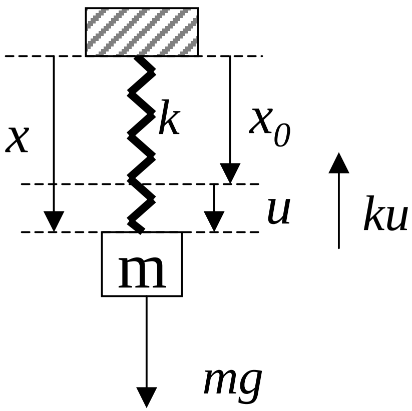
③



重力場
重力加速度= g

(a)　静止位置を求めよ。ただし、m=0 のとき u=0
(b) mの運動方程式を求めよ。
(c)mの振動数 f と周期 T を求めよ。

解①



mに働く力は、下向きに 重力 mg、上向きに、バネの力 ku、合成して下向きに、$mg-ku$ である。

(a) $mg-ku=0$ で釣り合い静止するので、$u=\dfrac{mg}{k}$、$x=x_0+\dfrac{mg}{k}$ である。

(b) $f=m\dfrac{d^2x}{dt^2}=m\dfrac{d^2u}{dt^2}$ から、

$m\dfrac{d^2u}{dt^2}=mg-ku$、整理して、

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{k}{m}u=g$$

xで表すと、$u=x-x_0$ として、

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}(x-x_0)=g$ から、

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=\dfrac{k}{m}x_0+g$ となる。

(c) $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{k}{m}u=g$ を初期条件、$u(0)=0,(du/dt)_{t=0}=0$ として解く。

$v=\dfrac{du}{dt}$(速度)、$\dfrac{k}{m}=\omega^2$ と置けば、

$\dfrac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=g$、(この形から、$\omega=2\pi f=2\pi/T$ としてもよい。)

$\dfrac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=0$の解(一般解)を求める。

$u_1=\varepsilon^{\lambda t}$ と置くと、$(\lambda^2+\omega^2)\varepsilon^{\lambda t}=0$

$\lambda=\pm j\omega$

$\therefore u_1=A\varepsilon^{j\omega t}+B\varepsilon^{-j\omega t}$

次に、$\dfrac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=g$の特別解は、

$u_2=\dfrac{g}{\omega^2}$であるから、解は、

$$u=u_1+u_2=A\varepsilon^{j\omega t}+B\varepsilon^{-j\omega t}+\frac{g}{\omega^2}$$

$t=0$ で、$u=0,\ v=0$ であるから、

$$0=A+B+\frac{g}{\omega^2}$$

$$v(0)=\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0}$$
$$=\left(j\omega A\varepsilon^{j\omega t}-j\omega B\varepsilon^{-j\omega t}\right)_{t=0}$$
$$=j\omega(A-B)=0$$

$\therefore A=B,$

$$0=A+B+\frac{g}{\omega^2}=2A+\frac{g}{\omega^2},$$

$$\therefore A=-\frac{g}{2\omega^2}=B$$

$$\therefore u=\frac{g}{\omega^2}\left(1-\frac{\varepsilon^{j\omega t}+\varepsilon^{-j\omega t}}{2}\right)$$
$$=\frac{g}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

角周波数ωは、$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\omega=2\pi/T=2\pi f$ から、

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(c)別解 $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{k}{m}u=g$ をラプラス変換を用いて解く。

$v=\dfrac{du}{dt}$(速度)、$\dfrac{k}{m}=\omega^2$ と置けば、

$\dot{u}=v$

$\dot{v}=-\omega^2 u+g$

ラプラス変換して、

$sU-u(0)=V$

$sV-v(0)=-\omega^2 U+g/s$

(周期や振動数を求めるだけなら、$u(0)=v(0)=0$としてよいが、ここでは、完全な解を求めておく。)

$sU-V=u(0)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\omega^2 U+sV=v(0)+g/s\cdots(2)$

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0)+g/s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0)+g/s \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^2+\omega^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0)+g/s \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{su(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{v(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{g/s}{s^2+\omega^2} \\ \dfrac{-\omega^2 u(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{sv(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{g}{s^2+\omega^2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{su(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\omega v(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{g}{\omega^2}\left\{\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right\} \\ -\omega\dfrac{\omega u(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{sv(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\omega g}{s^2+\omega^2} \end{bmatrix}$$

ラプラス逆変換して、時間領域の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left\{u(0)-\dfrac{g}{\omega^2}\right\}\cos\omega t+\dfrac{v(0)}{\omega}\sin\omega t+\dfrac{g}{\omega^2} \\ -\omega u(0)+\dfrac{g}{\omega}\sin\omega t+v(0)\cos\omega t \end{bmatrix}$$

周期をTとすれば、$\omega T=2\pi$ から、

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

振動数 f は、$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

なお、初期値がすべて 0 のときは、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{g}{\omega^2}(1-\cos\omega t) \\ \dfrac{g}{\omega}\sin\omega t \end{bmatrix}$$となる。

解②

k_2 は2個並列、これとk_1 が直列なので、
合成バネ定数は、

$$k=\frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2+k_2}}=\frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{2k_2}}=\frac{2k_1k_2}{k_1+2k_2}$$

伸びが u のとき、バネに蓄えられる
エネルギーWは、

$$W=\frac{1}{2}ku^2$$

であるから、ここでは、

$$W=\frac{1}{2}ku^2=\frac{1}{2}\frac{2k_1k_2}{k_1+2k_2}u^2$$

$$=\frac{k_1k_2}{k_1+2k_2}u^2$$

となる。

③の図のように、バネの自然長をx_0、
伸びた時の全長をxとすれば、
$u=x-x_0$ から、

$$W=\frac{k_1k_2}{k_1+2k_2}(x-x_0)^2$$

と表すこともできる。

解③

①で、$k=\frac{2k_1k_2}{k_1+2k_2}$ と置けばよい。

(a)静止位置は、

$$u=\frac{mg}{k}=\frac{mg(k_1+2k_2)}{2k_1k_2}$$

(b)運動方程式は、

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{k}{m}u=\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2k_1k_2}{m(k_1+2k_2)}u=g$$

(c)周期および振動数は、

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+2k_2)}{2k_1k_2}}$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k_1k_2}{m(k_1+2k_2)}}$$