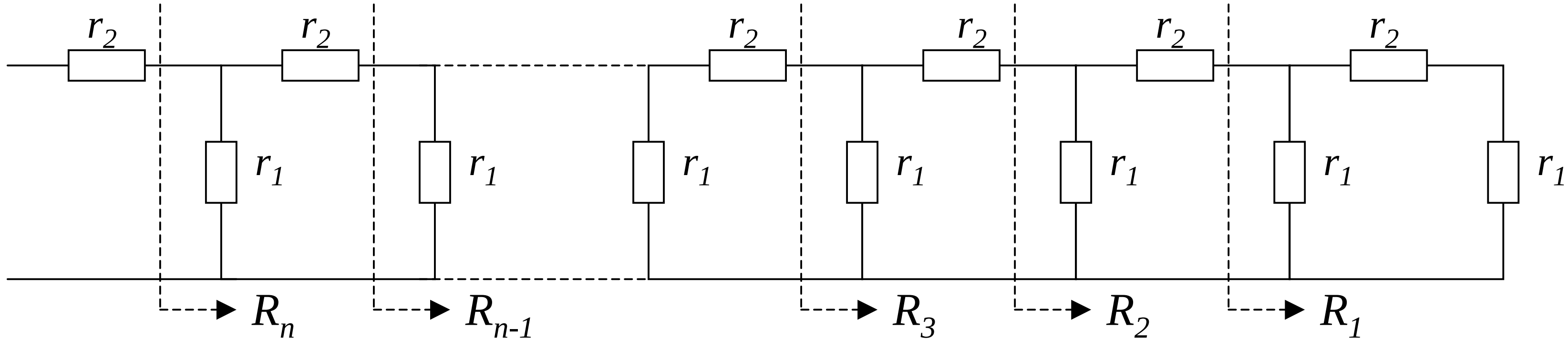
無限に連なる抵抗



問題　上図で、$\lim_{n\to\infty} R_n$ を求めよ。

解説 $\lim_{n\to\infty} R_n = R$ とすれば、$\lim_{n\to\infty} R_{n-1} = R$ も成り立つことを利用する。(次ページ参照)

$\dfrac{1}{R_n} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2 + R_{n-1}}$ が成り立つから、両辺の $n \to \infty$ の極限をとると

$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2 + R}$、これから、$R = \dfrac{r_1(r_2 + R)}{r_1 + r_2 + R}$

$R^2 + (r_1 + r_2)R = r_1 r_2 + r_1 R$、整理して、

$R^2 + r_2 R - r_1 r_2 = 0$

$R = \dfrac{-r_2 \pm \sqrt{r_2^2 + 4r_1 r_2}}{2}$, $\pm$は、$r_2 \le \sqrt{r_2^2 + 4r_1 r_2}$ であるから、$-$では$R \le 0$となる。$R \ge 0$なので、$+$をとる。

$R = \dfrac{-r_2 + \sqrt{r_2^2 + 4r_1 r_2}}{2}$,

$r_1 = r_2 = 2[\Omega]$ のときは、$R = -1 + \sqrt{5}[\Omega]$ となる。(平成17年一次)

この問題は、R_n が収斂する場合の極限値を求める問題です。
収斂する場合には、
$\lim_{n\to\infty} R_n$ と$\lim_{n\to\infty} R_{n-1}$とは同じ値になります。
では、R_nが収斂することは、どのようにして証明できるでしょうか。
高校の数学の復習ですが、ある数列が収斂する条件の一つに、

$R_L < R_n < R_U$
すなわち、R_nが一定の上限R_u 下限R_L 内にあり、かつ、単調増大あるいは単調減少するときは収斂する。
というのがあります。

この問題では、R_n は$r_1[\Omega]$と別の抵抗が並列になっていますから、合成抵抗は r_1より小さいことは確かです。また抵抗値ですから、0 より大きいことも確かです。すなわち、

$$0 < R_n < r_1 \cdots\cdots(1)$$

次に、

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2 + R_{n-1}} \cdots (2)$$

でR_{n-1} が増加すると右辺が減少するので、左辺も減少するためにR_n が増大し、逆に減少する場合も、R_{n-1} が減少すると、R_n は減少します。したがって単調増大または単調減少であり(1)と合わせて、収斂することが分かります。

数値例で試算してみます。

$r_1 = r_2 = r = 2[\Omega]$として、

(2)式を書き直すと、

$$R_n = \frac{r(r + R_{n-1})}{r + r + R_{n-1}} = \frac{r^2 + rR_{n-1}}{2r + R_{n-1}} = \frac{2R_{n-1} + 4}{R_{n-1} + 4}$$ となります。

$$R_1 = \frac{2 \times 2 + 4}{2 + 4} = \frac{4}{3} \approx 1.33\cdots,\ R_2 = \frac{2 \times 4/3 + 4}{4/3 + 4} = \frac{5}{4} = 1.25、$$

$$R_3 = \frac{2 \times 5/4 + 4}{5/4 + 4} = \frac{26}{21} = 1.238\cdots, R_4 = \frac{2 \times 26/21 + 4}{26/21 + 4} = \frac{68}{55} = 1.2363\cdots,$$

ですから、単調減少数列であると分かります。

ついでにもっと先まで計算すると、

$$R_5 = \frac{2 \times 68/55 + 4}{68/55 + 4} = \frac{89}{72} = 1.2361\cdots, R_6 = \frac{2 \times 89/72 + 4}{89/72 + 4} = \frac{466}{377} = 1.2360\cdots$$

というように、ある極 限値に向かって接近を 続け、1回に進む量はどんどん 減少して0に限りなく接近する 。すなわち、 $n \to \infty$ では、R_n とR_{n-1} とは限りなく接近する 。

一方、計算で求めた収 斂値は、

$-1 + \sqrt{5} = 1.2360679\cdots$で殆ど$R_6$ に等しいことが分かり ます。