

# 剛体の運動(重心運動と回転)

角速度、角運動量、慣性モーメント、  
回転半径、外力のモーメント(トルク)  
回転体の運動方程式、エネルギーバランス

剛体の運動は、次の二つの運動の和として扱うことができる

(1) 重心に全重量を集めた1質点としての運動

(2) 重心の周りの回転運動

重心(質点)の運動は、

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = \mathbf{F} = M \frac{d \mathbf{v}}{dt}$$

重心の位置ベクトル  $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k} = (x_0, y_0, z_0)$

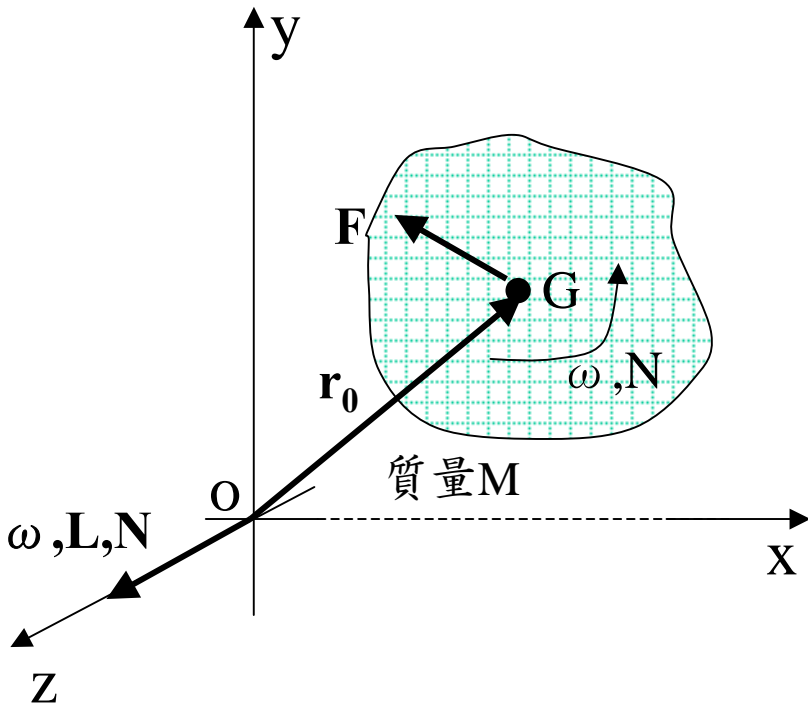
外力のベクトル  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = (F_x, F_y, F_z)$

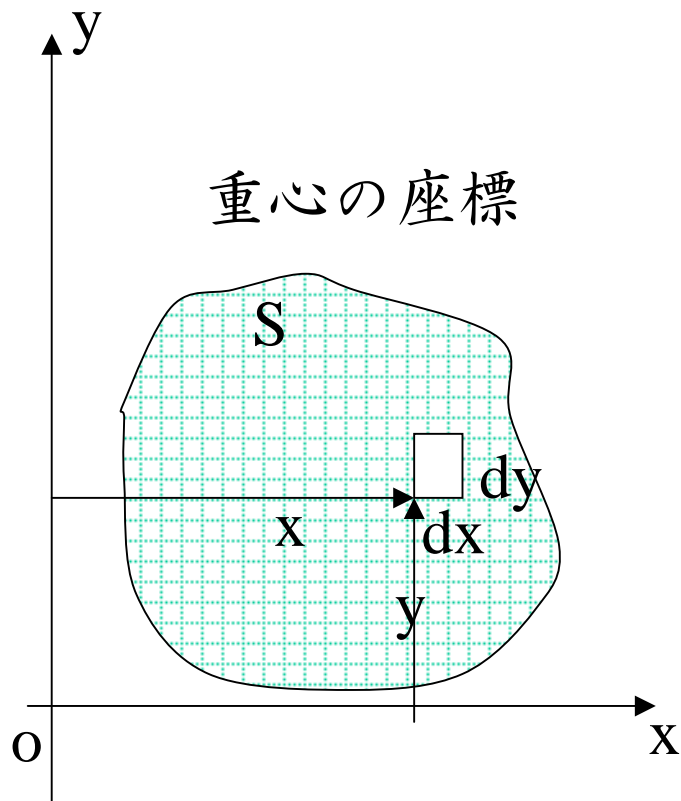
速度ベクトル  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = (v_x, v_y, v_z)$

重心の周りの回転運動は、

$$I \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} = \mathbf{N} = I \frac{d \mathbf{L}}{dt}$$

$$\text{質点 } m \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \text{回転体 } I \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} = \mathbf{N}$$





2次元剛体の重心の座標(密度 =  $\rho$ )

$$\bar{x} = \frac{\int_S x dm}{\int_S dm} = \frac{\int_S x \rho dx dy}{\int_S \rho dx dy}, \bar{y} = \frac{\int_S y dm}{\int_S dm} = \frac{\int_S y \rho dx dy}{\int_S \rho dx dy}$$

運動方程式

$$\text{質点 } m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_x, m \frac{d^2 y}{dt^2} = f_y \Leftrightarrow \text{回転体 } I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = N$$

抵抗力、またはダンパー、復元力があるとき、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + b \frac{d \mathbf{r}}{dt} + k \mathbf{r} = \mathbf{f}, I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + B \frac{d \theta}{dt} + K \theta = N$$

運動エネルギー  $KE$

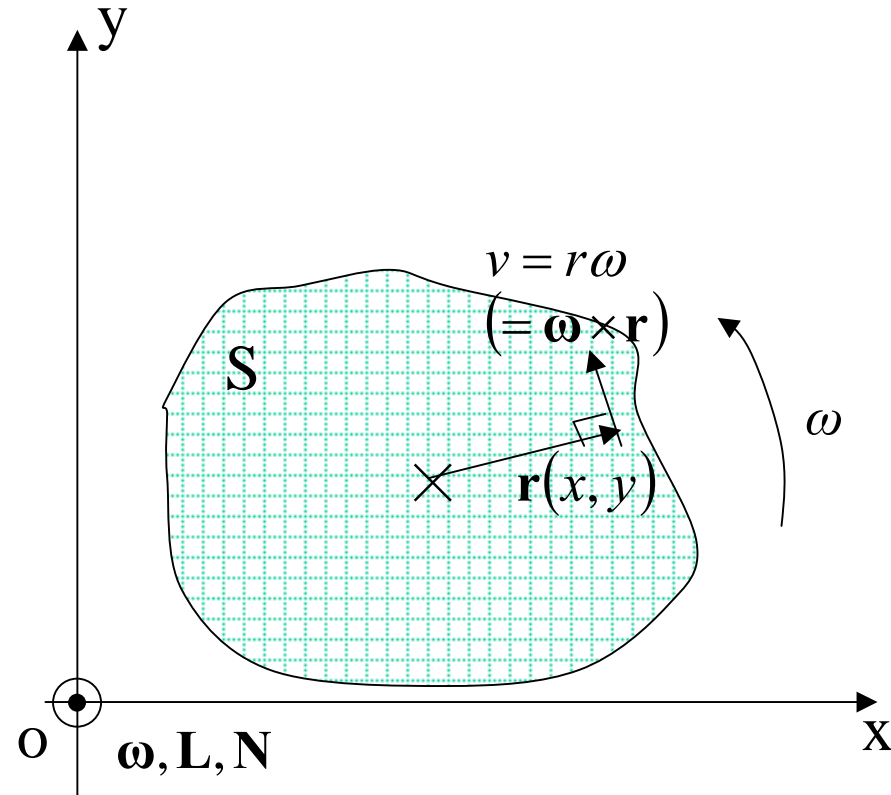
$$\text{質点 : } KE_M = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left\{ \left( \frac{d x}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d y}{dt} \right)^2 \right\}$$

$$\text{回転体 : } KE_I = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \left( \frac{d \theta}{dt} \right)^2$$

ポテンシャルエネルギー  $PE$

$$PE = mgh \text{ など}$$

# 重心の周りの回転運動



$I = \int_S r^2 dm = \iint_S \rho r^2 dx dy$  を慣性モーメント  
 質量を \$M\$ として、 $I = MK^2$  としたとき、  
 \$K\$ を「回転半径」という。

角速度  $= \omega = \frac{d\theta}{dt}$  のときの諸量

[質点 \$i\$ について]  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i \perp \mathbf{f}_i$  のとき、  
 速度  $\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$

運動量  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega} = (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$

角運動量  $\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i = m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} = (m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))$

外力のモーメント  $\mathbf{n}_i = \mathbf{r}_i \mathbf{f}_i = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i)$

[剛体]

角運動量  $\mathbf{L} = \int_S r^2 \boldsymbol{\omega} dm = \boldsymbol{\omega} \iint_S \rho r^2 dx dy = I \boldsymbol{\omega}$

外力のモーメント(トルク)  $\mathbf{N} = \sum_S \mathbf{n}_i$

運動方程式

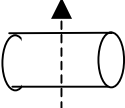
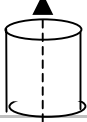
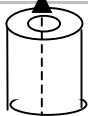
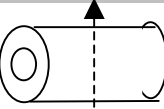
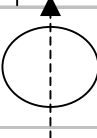

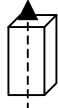

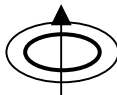
質点  $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d p_x}{dt} = f_{xi}, m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{d p_y}{dt} = f_{yi}$

$$\left( \frac{d \mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{f}_i \right)$$

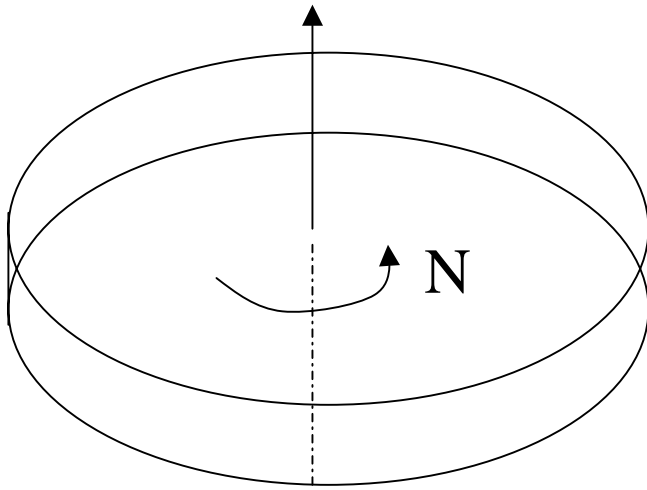
質点の回転  $\frac{d \mathbf{l}_i}{dt} = r_i \mathbf{f}_i$

剛体の回転  $\frac{d \mathbf{L}}{dt} = I \frac{d \boldsymbol{\omega}}{dt} = I \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} = \mathbf{N}$

$$\left( \frac{d \mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \right)$$

物体の形状	軸の位置	回転半径の二乗 $K^2$	記号
円柱 	重心を通り円柱の軸に垂直な線	$\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}$	$\begin{cases} r = \text{半径} \\ l = \text{長さ} \end{cases}$
円柱 	円柱の軸に一致	$\frac{r^2}{2}$	$r = \text{半径}$
中空の円柱 	円柱の軸に一致	$\frac{R^2 + r^2}{2}$	$\begin{cases} R = \text{外の半径} \\ r = \text{内の半径} \\ h = \text{長さ} \end{cases}$
中空の円柱 	重心を通り円柱の軸に垂直な線	$\frac{R^2 + r^2}{2} + \frac{h^2}{12}$	
球 	中心を通る線	$\frac{2r^2}{5}$	$r = \text{半径}$
中空の球 	中心を通る線	$\frac{2R^5 - r^5}{5R^3 - r^3}$	$\begin{cases} R = \text{外の半径} \\ r = \text{内の半径} \end{cases}$
直角柱 	相対する面の中央を通る線	$\frac{a^2 + b^2}{12}$	$a, b = \text{軸が貫く面の両辺の長さ}$
環 	一直径の周り	$\frac{R^2}{2} + \frac{5r^2}{8}$	$R = \text{環の半径}$
環 	中心を通り環の面に垂直な線	$R^2 + \frac{3r^2}{4}$	$r = \text{環断面の円の半径}$

出典：守屋富次郎、「力学概論」



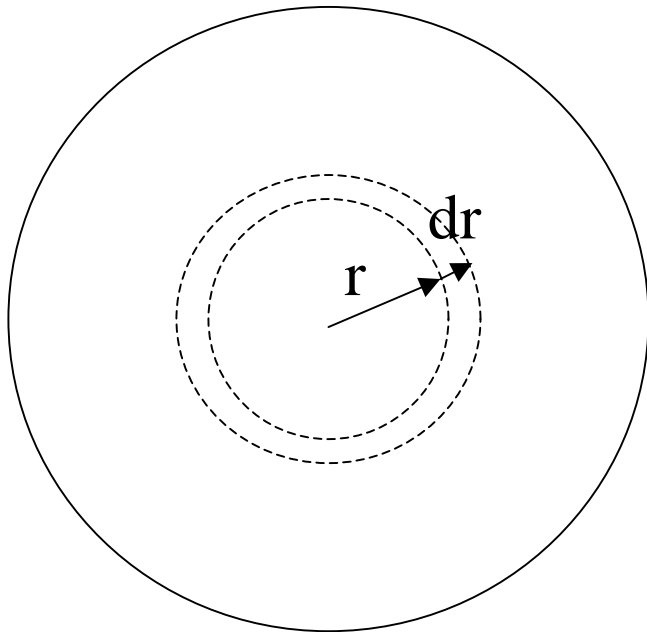
例 1 . 円板,円柱,  
半径 a,  
単位面積当り質量 ρ

$$I = \int_0^a r^2 \rho dr \times 2\pi r = 2\pi\rho \int_0^a r^3 dr = \pi\rho \frac{a^4}{2}$$

$$= \rho\pi a^2 \cdot \frac{a^2}{2}$$

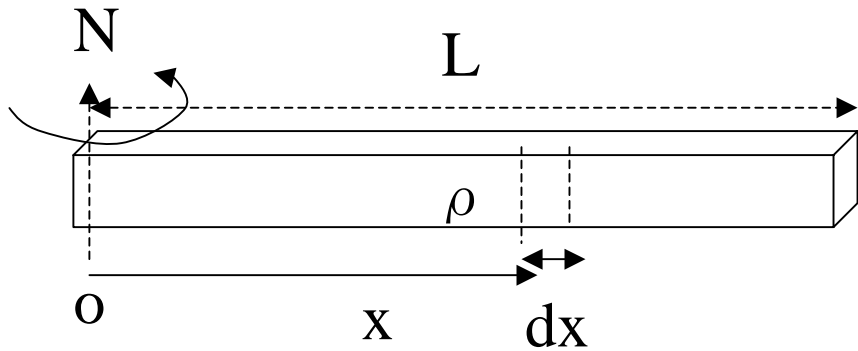
$$M = \rho\pi a^2$$

$$K^2 = I / M = 2\pi\rho \frac{a^4}{4} / \rho\pi a^2 = \frac{a^2}{2}$$



例2. 角棒、丸棒

長さ  $L$ 、 単位長さ当り質量  $\rho$



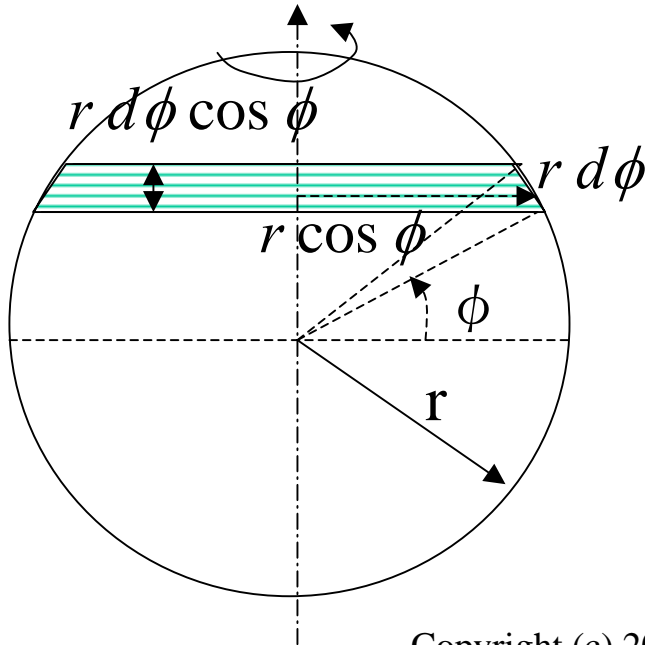
$$I = \int_0^L x^2 \rho dx = \rho \int_0^L x^2 dx = \rho \frac{L^3}{3} = \rho L \cdot \frac{L^2}{3}$$

$$M = \rho L$$

$$K^2 = I / M = \rho \frac{L^3}{3} / \rho L = \frac{L^2}{3}$$

例3. 球

半径  $r$ , 単位体積当り質量  $\rho$



$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\pi r^4 \cos^4 \phi}{2} \times \rho r d\phi \cos \phi$$

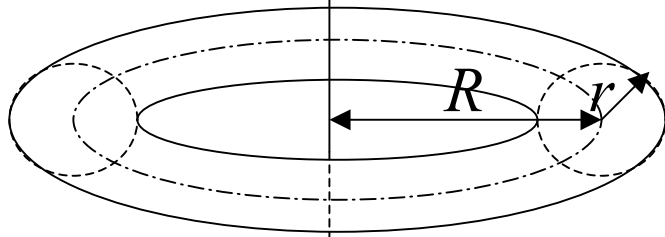
$$= \pi \rho r^5 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \phi d\phi$$

$$= \pi \rho r^5 \left[ \frac{\cos^4 \phi \sin \phi}{5} + \frac{4}{15} \sin \phi (\cos^2 \phi + 2) \right]_0^{\pi/2}$$

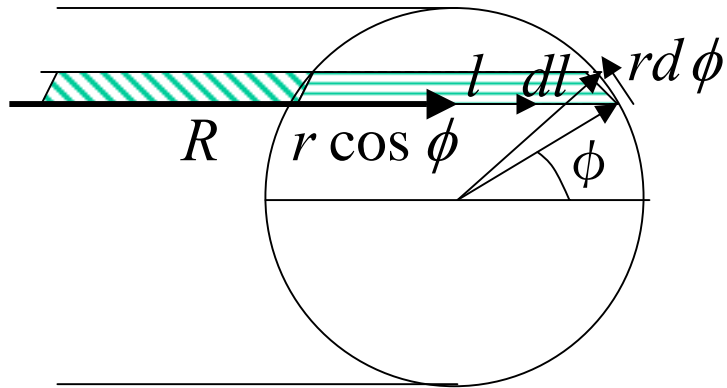
$$= \frac{8\pi \rho r^5}{15} = \frac{4\rho \pi r^3}{3} \frac{2r^2}{5}, \quad M = \frac{4\rho \pi r^3}{3},$$

$$K^2 = I / M = \frac{8\pi \rho r^5}{15} / \frac{4\rho \pi r^3}{3} = \frac{2}{5} r^2$$

例3 環



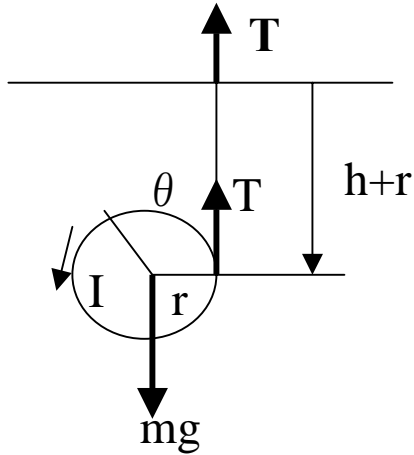
全体積 =  $2\pi R \times \pi r^2$



$$\begin{aligned} & \rho(R+l)^2 dl \cdot 2\pi(R+l)(r d\phi \cos \phi) \\ &= \rho(R+l)^3 2\pi r \cos \phi d\phi dl \\ I &= 4\pi r \rho \int_0^{\pi/2} \left( \int_{-r \cos \phi}^{r \cos \phi} (R+l)^3 dl \right) \cos \phi d\phi \\ &= 4\pi r \rho \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{(R+l)^4}{4} \right]_{-r \cos \phi}^{r \cos \phi} \cos \phi d\phi \\ &= 4\pi r \rho \int_0^{\pi/2} 2Rr \cos \phi (R^2 + r^2 \cos^2 \phi) \cos \phi d\phi \\ &= 8\pi R r^2 \rho \int_0^{\pi/2} (R^2 \cos^2 \phi + r^2 \cos^4 \phi) d\phi \\ &= 8\pi R r^2 \rho \left( \frac{\pi}{4} R^2 + \frac{3\pi}{16} r^2 \right) \\ &= 2\pi^2 R r^2 \rho \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right) \\ &= 2\pi R \cdot \pi r^2 \cdot \rho \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right) \\ &= M \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right) \end{aligned}$$



例題 1 機械H17-IV-12



まず、滑車の重心の運動は：

$$\text{横方向の力は } 0 \rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

垂直方向では、固定点の抗力を  $T$  として

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = mg - T \dots (1)$$

が成り立つ。

回転については、

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Tr \dots (2)$$

また、次式が成り立つ。

$$h = r\theta \dots (3)$$

この後は、式の計算である。

(1),(2),(3)から、 $T, \theta$ を消去する。

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} + T = mg = m \frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{I d^2 \theta}{r dt^2}$$

$$= m \frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{I}{r^2} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{d^2 h}{dt^2} \left( m + \frac{I}{r^2} \right) = mg$$

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{mgr^2}{I + mr^2}$$

2度積分して、( $t=0$ で $h=0, dh/dt=0$ )

$$\frac{dh}{dt} = \frac{mgr^2}{I + mr^2} t, \quad h = \frac{mgr^2}{I + mr^2} \frac{t^2}{2}$$

$$\therefore t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2h(I + mr^2)}{mg}}$$

また、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dh}{dt} = \frac{mgr}{I + mr^2} t = \sqrt{\frac{2mgh}{I + mr^2}}$$

前問で、 $m$  を滑車の質量とし、滑車を均質な円板とすれば、 $I$  が容易に求められる。  
それを用いて、落下時の加速度及び抗力  $T$  を求めよ。

円板の慣性モーメント  $I$  は、

$I = m \frac{r^2}{2}$  であるから、

$$\frac{d^2 h}{dt^2} \left( m + \frac{I}{r^2} \right) = mg \text{ は、}$$

$$\frac{d^2 h}{dt^2} \left( m + \frac{m}{2} \right) = \frac{d^2 h}{dt^2} \frac{3m}{2} = mg$$

$$\therefore \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{2}{3} g$$

すなわち重力の加速度の  $2/3$  となる。

また、(1)式から、

$$T = mg - m \frac{d^2 h}{dt^2} = mg - m \frac{2g}{3} = \frac{1}{3} mg$$

[参考]

$$\text{落下速度 : } v = \frac{dh}{dt} = \int_0^t \frac{d^2 h}{dt^2} dt = \int_0^t \frac{2}{3} g dt = \frac{2}{3} gt$$

$$\text{落下高さ : } h = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{2}{3} gt = \frac{1}{3} gt^2$$

回転の角速度と回転角

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dh}{dt} = \frac{2gt}{3r}, \phi = \frac{h}{r}$$

運動エネルギー

重心の運動による  $KE_M$  と、回転による  $KE_I$

$$KE_M = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{2}{3} gt \right)^2 = \frac{2}{9} mg^2 t^2$$

$$KE_I = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \left( \frac{2gt}{3r} \right)^2 = \frac{1}{9} mg^2 t^2$$

失った位置エネルギー  $-PE$

$$-PE = mgh = mg \cdot \frac{1}{3} gt^2 = \frac{1}{3} mg^2 t^2$$

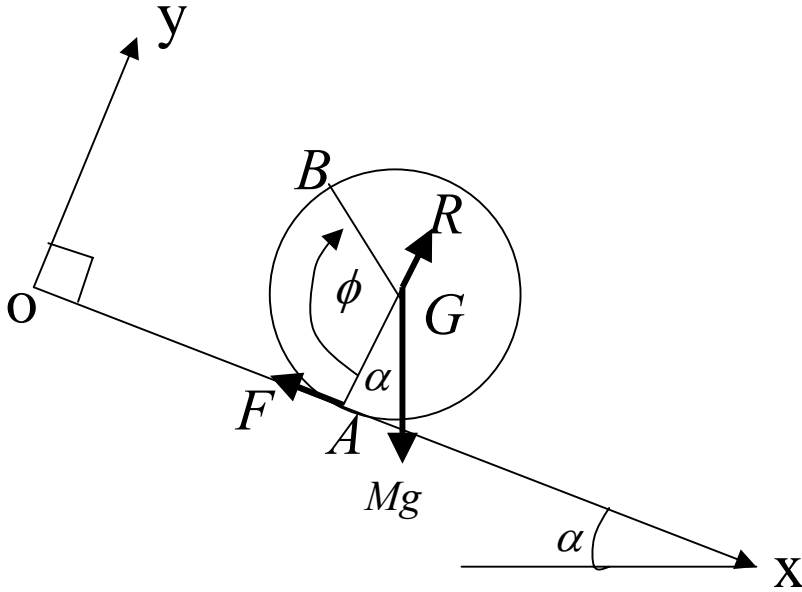
$-PE = KE_M + KE_I$  が成り立つ。

滑車のない単純な落下では、

$$-PE = KE_M$$

であるから、滑車の挿入により、滑車の回転エネルギー分速度エネルギーが減少したことになる。

## 例題2 斜面を転がる円板



まず、滑車の重心の運動は：  
 $x$ 方向：斜面の摩擦力を  $F$  として、

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \alpha - F \dots (1)$$

$y$ 方向：斜面の抗力を  $R$  として

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = Mg \cos \alpha - R \dots (2)$$

が成り立つ。

回転については、

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} = Fr \dots (3)$$

また、次式が成り立つ。

$$x = r\phi \dots (4)$$

$$I = MK^2 = M \frac{r^2}{2} \dots (5)$$

斜面の存在により、 $y$ 方向には運動がないので、(2)式は 0 になる。

$$\therefore R = Mg \cos \alpha$$

$$(2)(4)(5) \text{ から、 } F = \frac{I}{r} \frac{1}{r} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{MK^2}{r^2} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

(1)に代入して、

$$M \left( 1 + \frac{K^2}{r^2} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \alpha, (5) \text{ を利用。}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{r^2}{r^2 + K^2} g \sin \alpha = \frac{1}{1 + 1/2} g \sin \alpha$$

$$= \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

x方向の加速度

$$A = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{r^2}{r^2 + K^2} g \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

x方向の速度

$$V = \frac{dx}{dt} = \int_0^t \frac{d^2 x}{dt^2} dt = \frac{r^2}{r^2 + K^2} g \sin \alpha \cdot t$$
$$= \frac{2}{3} g \sin \alpha \cdot t$$

x方向の位置

$$x = \int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{2} \frac{r^2}{r^2 + K^2} g \sin \alpha \cdot t^2$$
$$= \frac{1}{3} g \sin \alpha \cdot t^2$$

角速度

$$\omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} V$$

エネルギーバランス

$$PE = -Mgx \sin \alpha = -\frac{1}{3} Mg^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2$$

$$KE_M = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} M \left( \frac{2}{3} g \sin \alpha \cdot t \right)^2$$

$$= \frac{2}{9} Mg^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2$$

$$KE_I = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M \frac{r^2}{2} \left( \frac{V}{r} \right)^2 = \frac{1}{4} MV^2$$

$$= \frac{1}{9} Mg^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2$$

$$-PE = KE_M + KE_I$$

もし、斜面に摩擦がないときは、 $F = 0$ となり、回転はなく、

加速度  $A = g \sin \alpha$

速度  $V = g \sin \alpha \cdot t$

位置  $x = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$

位置エネルギー  $PE$  の減分

$$PE = -Mgx \sin \alpha = -\frac{1}{2} Mg^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2$$

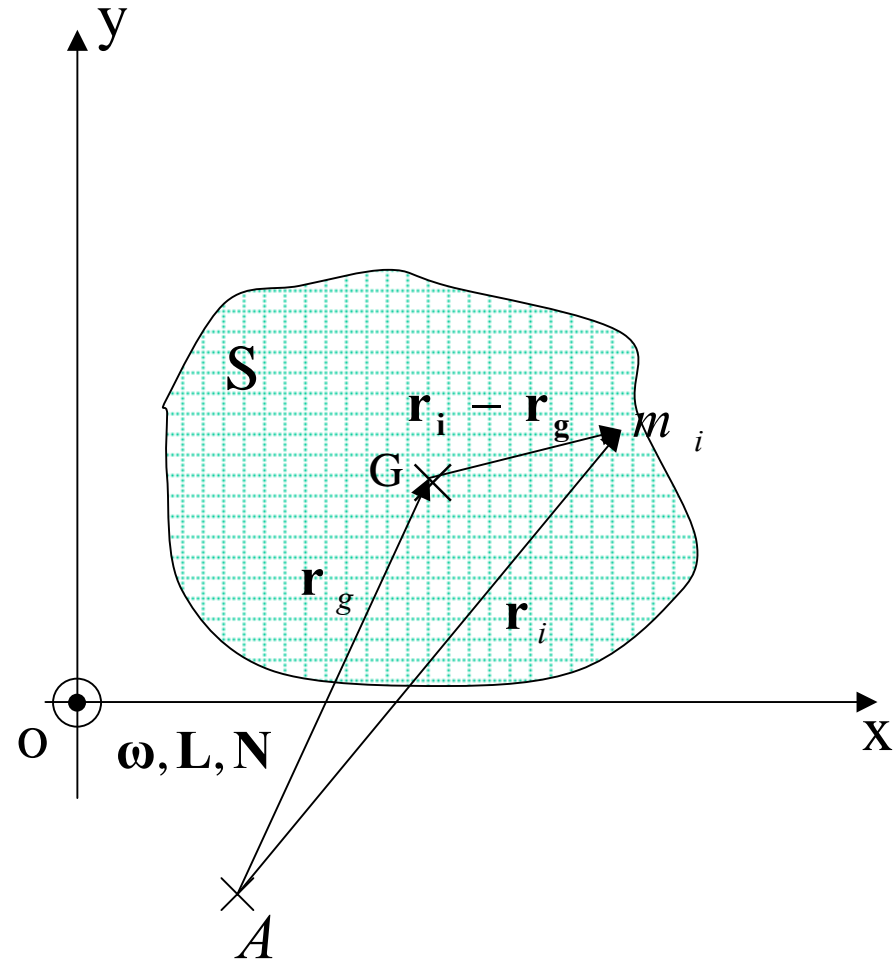
運動エネルギー  $KE$

$$KE = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} M (g \sin \alpha \cdot t)^2$$

$$= \frac{1}{2} Mg^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2$$

$-PE = KE$  が成り立つ。

追加 基準点を変えたときのI

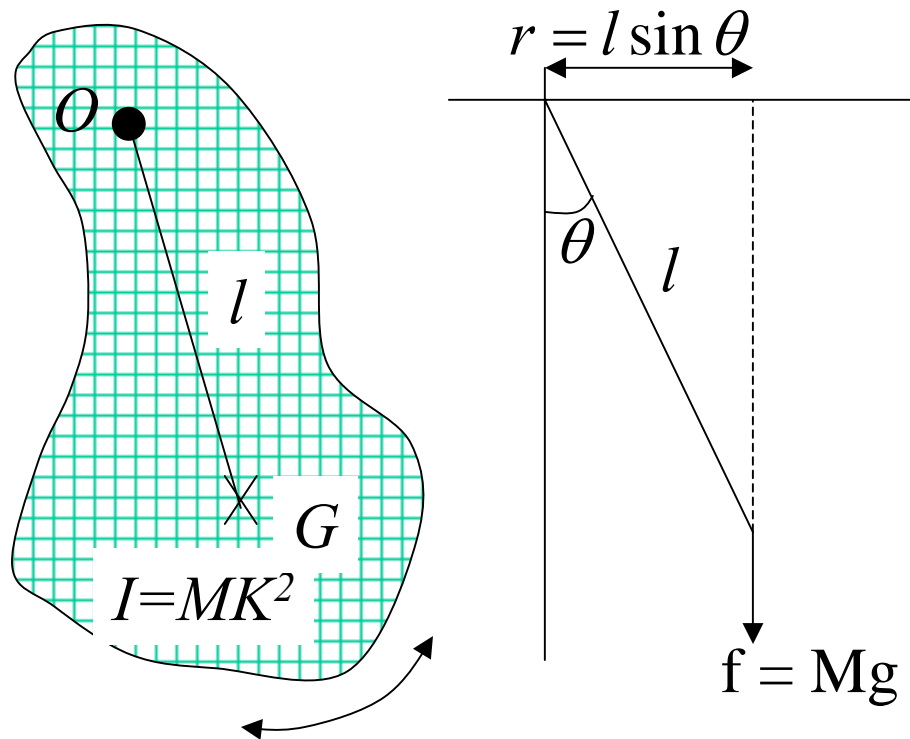


重心の周りの慣性モーメントを  $I_g$  とする。  
 任意の点  $A$  の周りの慣性モーメントを  $I_A$  とする。

$$\begin{aligned}
 I_g &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_g) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_g) m_i \\
 &= \sum_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) m_i + \sum_i (\mathbf{r}_g \cdot \mathbf{r}_g) m_i - 2 \sum_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_g) m_i \\
 &= \sum_i r_i^2 m_i + \left( \sum_i m_i \right) r_g^2 - 2 \left( \sum_i \mathbf{r}_i m_i \right) \cdot \mathbf{r}_g \\
 &= I_A + M r_g^2 - 2 M \mathbf{r}_g \cdot \mathbf{r}_g \\
 &= I_A - M r_g^2 \\
 \therefore I_A &= I_g + M r_g^2
 \end{aligned}$$

すなわち、任意の点  $A$  の周りの慣性モーメントは、重心の周りのモーメントに、重心に全重量が集まったと見なした  $A$  点の周りのモーメントを加えた値に等しい。

応用 基準点を変えたときのI  
剛体振り子



運動方程式は、 $\theta$ を減少させる向きのトルクが働くから、

$$(I + Ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -l \sin\theta \times Mg \approx -Mgl\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{Mgl}{MK^2 + Ml^2} \theta = -\frac{g}{(K^2 + l^2)/l} \theta$$

$L = (K^2 + l^2)/l$ の単振子に相当することがわかる。