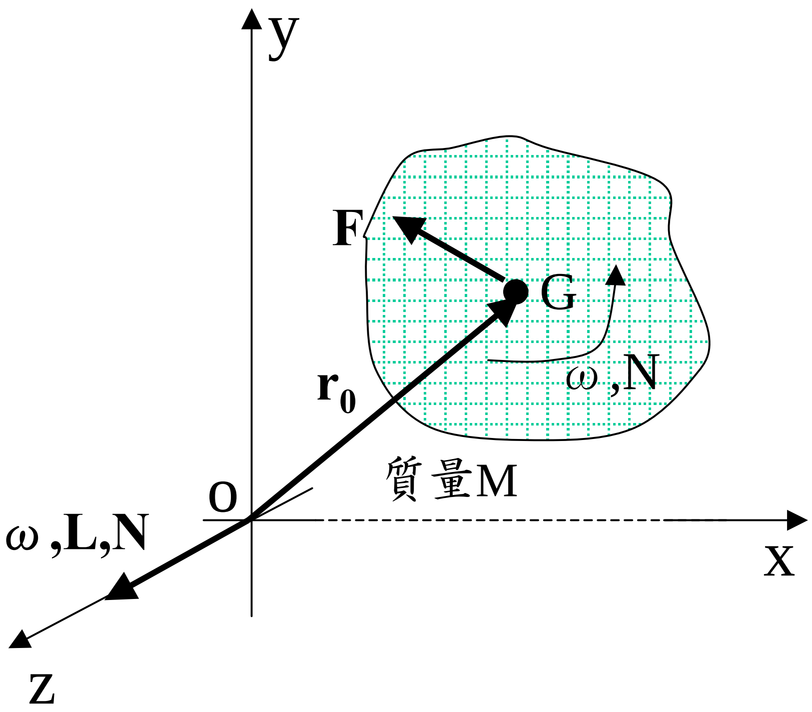
# 剛体の運動(重心運動と回転)

角速度、角運動量、慣性モーメント、
回転半径、外力のモーメント(トルク)
回転体の運動方程式、エネルギーバランス

剛体の運動は、次の二つの運動の和として扱うことができる
(1)重心に全重量を集めた１質点としての運動
(2)重心の周りの回転運動




重心(質点)の運動は、

$$\boxed{M\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2}=\mathbf{F}=M\frac{d\,\mathbf{v}}{dt}}$$

重心の位置ベクトル$\mathbf{r}_0=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}=(x_0,y_0,z_0)$

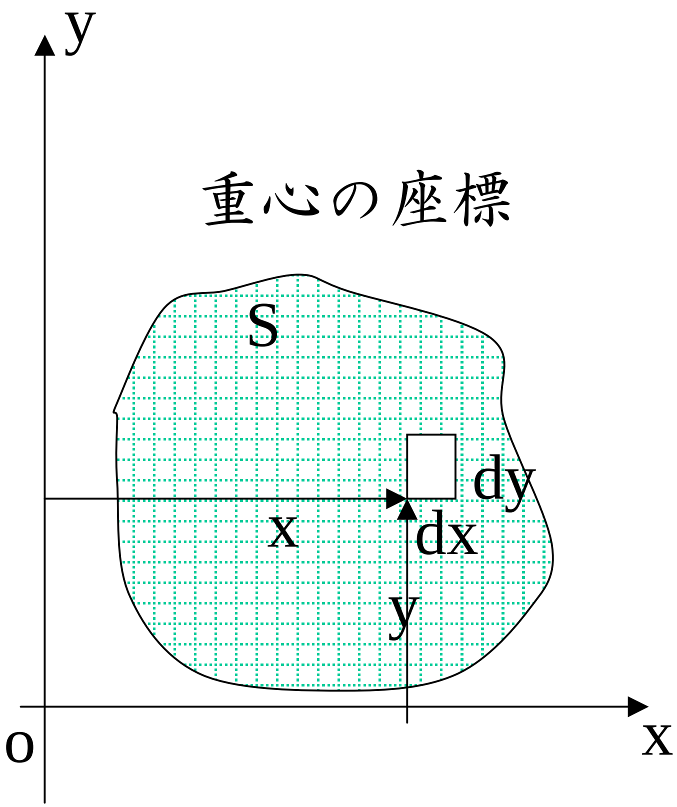
外力のベクトル$\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}=(F_x,F_y,F_z)$

速度ベクトル$\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}=(v_x,v_y,v_z)$

重心の周りの回転運動は、

$$\boxed{I\frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}=\mathbf{N}=I\frac{d\,\mathbf{L}}{dt}}$$

質点 $m\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2}=\mathbf{F}\Leftrightarrow$ 回転体 $I\frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}=\mathbf{N}$




2次元剛体の重心の座標$\left(密度=\rho\right)$

$$\bar{x}=\frac{\int_S xdm}{\int_S dm}=\frac{\int_S x\rho dxdy}{\int_S \rho dxdy},\bar{y}=\frac{\int_S ydm}{\int_S dm}=\frac{\int_S y\rho dxdy}{\int_S \rho dxdy}$$

運動方程式

質点 $m\frac{d^2x}{dt^2}=f_x, m\frac{d^2y}{dt^2}=f_y \Leftrightarrow$ 回転体 $I\frac{d^2\theta}{dt^2}=N$

抵抗体、またはダンパー、復元力があるとき、

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+b\frac{d\mathbf{r}}{dt}+k\mathbf{r}=\mathbf{f},\ I\frac{d^2\theta}{dt^2}+B\frac{d\theta}{dt}+K\theta=N$$

運動エネルギー$KE$

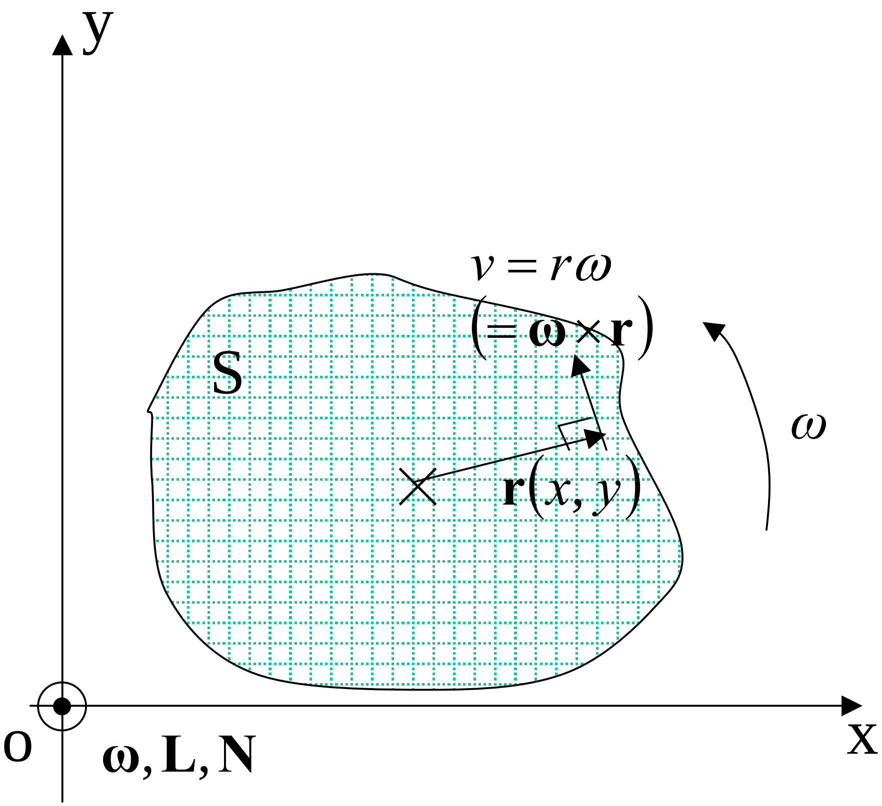
質点：$KE_M=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$

回転体：$KE_I=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

ポテンシャルエネルギー$PE$

$PE=mgh$ など

# 重心の周りの回転運動




$I = \int_S r^2 dm = \iint_S \rho r^2 dxdy$ を慣性モーメント
質量を$M$として、$I = MK^2$ としたとき、
$K$ を「回転半径」という。

角速度$= \omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ のときの諸量

[質点$i$について], $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_i$、$\mathbf{r}_i \perp \mathbf{f}_i$ のとき、

速度　$v_i = r_i \omega = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$

運動量 $p_i = m_i v_i = m_i r_i \omega = (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$

角運動量　$l_i = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega = (m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))$

外力のモーメント$n_i = r_i f_i = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i)$

[剛体]

角運動量　$L = \int_S r^2 \omega dm = \omega \iint_S \rho r^2 dxdy = I\omega$

外力のモーメント(トルク) $N = \sum_S n_i$

運動方程式

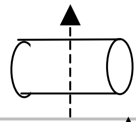
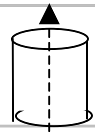
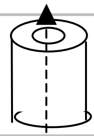
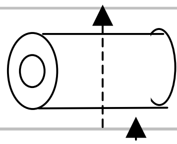
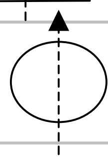
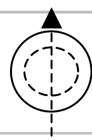
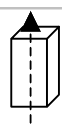
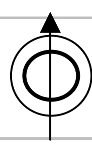
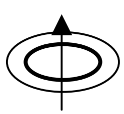
質点　$m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{d p_x}{dt} = f_{xi}, \; m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{d p_y}{dt} = f_{yi}$

$$\left( \frac{d \mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{f}_i \right)$$

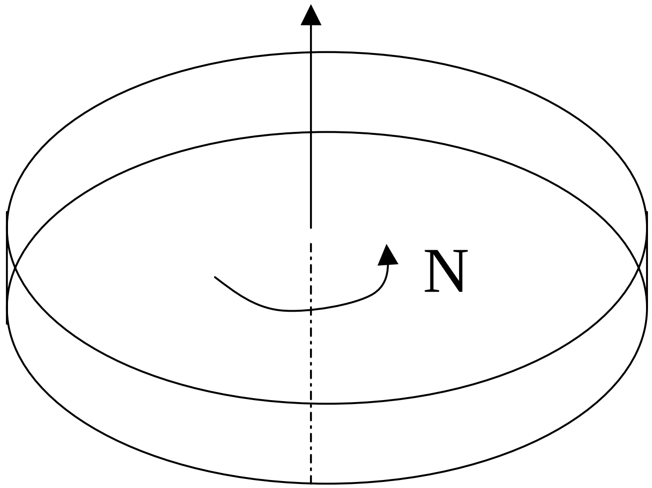
質点の回転　$\dfrac{d \mathrm{l}_i}{dt} = r_i f_i$

剛体の回転　$\dfrac{dL}{dt} = I \dfrac{d\omega}{dt} = I \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = N$

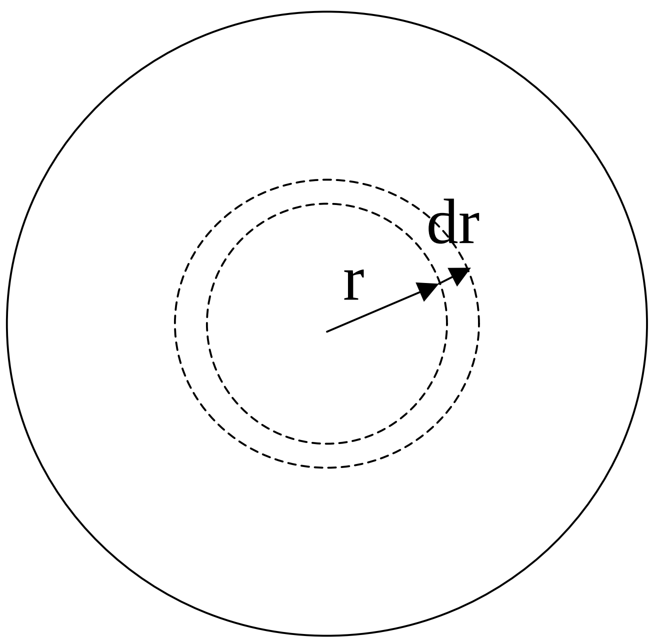
$$\left( \frac{d \mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \right)$$

| 物体の形状 | 軸の位置 | 回転半径の二乗K$^2$ | 記号 |
|---|---|---|---|
| 円柱  | 重心を通り円柱の軸に垂直な線 | $\frac{l^2}{12}+\frac{r^2}{4}$ | $\begin{cases} r=\text{半径} \\ l=\text{長さ} \end{cases}$ |
| 円柱  | 円柱の軸に一致 | $\frac{r^2}{2}$ | $r=$半径 |
| 中空の円柱  | 円柱の軸に一致 | $\frac{R^2+r^2}{2}$ | $\begin{cases} R=\text{外の半径} \\ r=\text{内の半径} \\ h=\text{長さ} \end{cases}$ |
| 中空の円柱  | 重心を通り円柱の軸に垂直な線 | $\frac{R^2+r^2}{2}+\frac{h^2}{12}$ | |
| 球  | 中心を通る線 | $\frac{2r^2}{5}$ | $r=$半径 |
| 中空の球  | 中心を通る線 | $\frac{2}{5}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$ | $R=$外の半径<br>$r=$内の半径 |
| 直角柱  | 相対する面の中央を通る線 | $\frac{a^2+b^2}{12}$ | $a,b=$軸が貫く面の両辺の長さ |
| 環  | 一直径の周り | $\frac{R^2}{2}+\frac{5r^2}{8}$ | $R=$環の半径 |
| 環  | 中心を通り環の面に垂直な線 | $R^2+\frac{3r^2}{4}$ | $r=$環断面の円の半径 |

出典：守屋富次郎、「力学概論」




例１．円板,円柱、
半径 a,
単位面積当り質量 ρ




$$I=\int_0^a r^2\rho dr\times 2\pi r=2\pi\rho\int_0^a r^3 dr=\pi\rho\frac{a^4}{2}$$

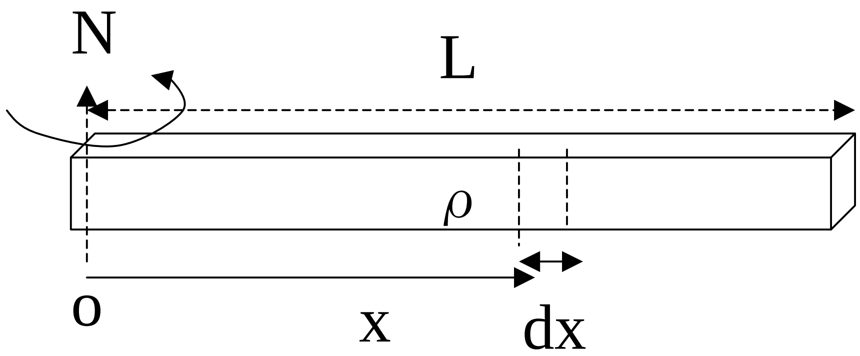
$$=\rho\pi a^2\cdot\frac{a^2}{2}$$

$$M=\rho\pi a^2$$

$$K^2=I/M=2\pi\rho\frac{a^4}{4}/\rho\pi a^2=\frac{a^2}{2}$$

例2．角棒、丸棒

長さL、　単位長さ当り質量$\rho$



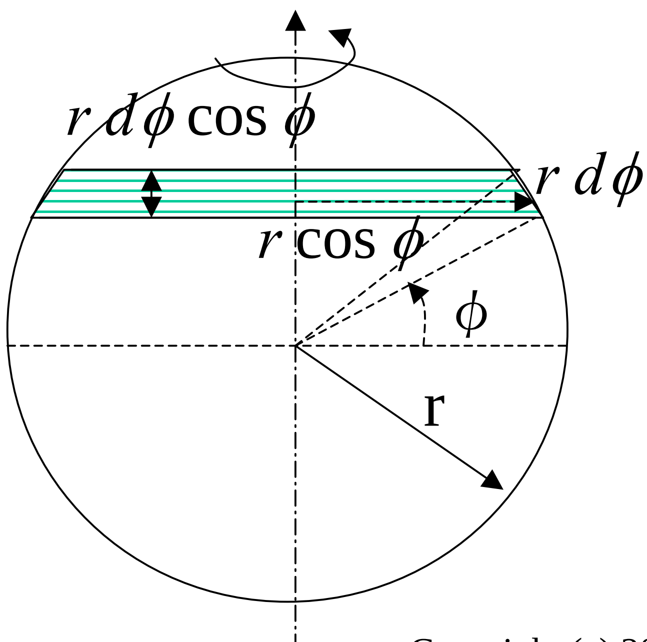

$$I=\int_0^L x^2\rho dx=\rho\int_0^L x^2 dx=\rho\frac{L^3}{3}=\rho L\cdot\frac{L^2}{3}$$

$$M=\rho L$$

$$K^2=I/M=\rho\frac{L^3}{3}/\rho L=\frac{L^2}{3}$$

例3．球

半径r,単位体積当り質量$\rho$




$$I=2\int_0^{\pi/2}\frac{\pi r^4\cos^4\phi}{2}\times\rho\, r\, d\phi\cos\phi$$

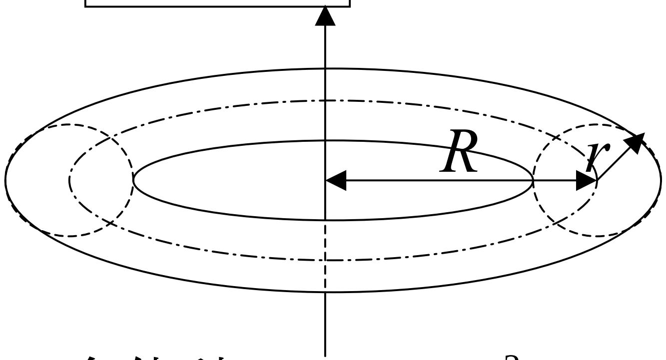
$$=\pi\rho r^5\int_0^{\pi/2}\cos^5\phi\, d\phi$$

$$=\pi\rho r^5\left[\frac{\cos^4\phi\sin\phi}{5}+\frac{4}{15}\sin\phi\left(\cos^2\phi+2\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

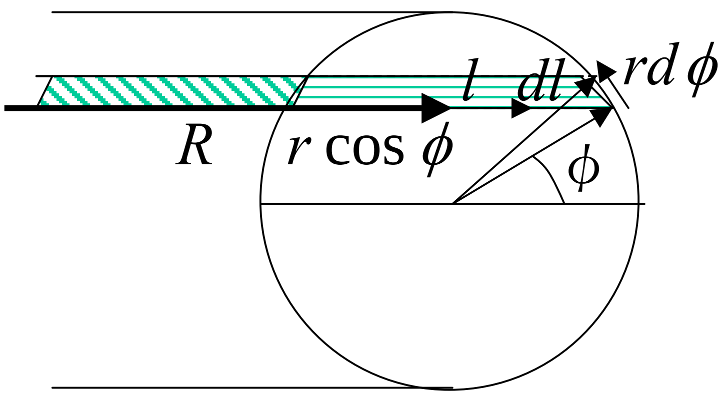
$$=\frac{8\pi\rho r^5}{15}=\frac{4\rho\pi r^3}{3}\frac{2r^2}{5},\ M=\frac{4\rho\pi r^3}{3},$$

$$K^2=I/M=\frac{8\pi\rho r^5}{15}/\frac{4\rho\pi r^3}{3}=\frac{2}{5}r^2$$

# 例3　環

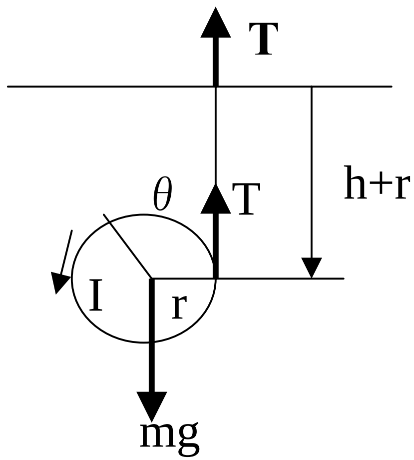



全体積$=2\pi R\times\pi r^2$




$$\rho(R+l)^2\,dl\cdot 2\pi(R+l)(rd\phi\cos\phi)$$
$$=\rho(R+l)^3\,2\pi r\cos\phi\,d\phi\,dl$$
$$I=4\pi r\rho\int_0^{\pi/2}\left(\int_{-r\cos\phi}^{r\cos\phi}(R+l)^3\,dl\right)\cos\phi\,d\phi$$
$$=4\pi r\rho\int_0^{\pi/2}\left[\frac{(R+l)^4}{4}\right]_{-r\cos\phi}^{r\cos\phi}\cos\phi\,d\phi$$
$$=4\pi r\rho\int_0^{\pi/2}2Rr\cos\phi\left(R^2+r^2\cos^2\phi\right)\cos\phi\,d\phi$$
$$=8\pi Rr^2\rho\int_0^{\pi/2}\left(R^2\cos^2\phi+r^2\cos^4\phi\right)d\phi$$
$$=8\pi Rr^2\rho\left(\frac{\pi}{4}R^2+\frac{3\pi}{16}r^2\right)$$
$$=2\pi^2Rr^2\rho\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right)$$
$$=2\pi R\cdot\pi r^2\cdot\rho\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right)$$
$$=M\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right)$$

例題１　機械H17-Ⅳ-12




まず、滑車の重心の運 動は：

横方向の力は $0 \rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$

垂直方向では、固定点 の抗力を$T$として

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=mg-T\cdots(1)$$

が成り立つ。

回転については、

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=Tr\cdots(2)$$

また、次式が成り立つ 。

$$h=r\theta\cdots\cdots(3)$$

この後は、式の計算で ある。

$(1),(2),(3)$から、$T,\theta$を消去する。

$$m\frac{d^2h}{dt^2}+T=mg=m\frac{d^2h}{dt^2}+\frac{I}{r}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$=m\frac{d^2h}{dt^2}+\frac{I}{r^2}\frac{d^2h}{dt^2}$$

$$\therefore\frac{d^2h}{dt^2}\left(m+\frac{I}{r^2}\right)=mg$$

$$\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{mgr^2}{I+mr^2}$$

2度積分して、$\left(t=0\text{で}h=0,dh/dt=0\right)$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{mgr^2}{I+mr^2}t,\ \ h=\frac{mgr^2}{I+mr^2}\frac{t^2}{2}$$

$$\therefore t=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2h\left(I+mr^2\right)}{mg}}$$

また、

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\frac{dh}{dt}=\frac{mgr}{I+mr^2}t=\sqrt{\frac{2mgh}{I+mr^2}}$$

前問で、mを滑車の質量とし、滑車を均質な円板とすれば、Iが容易に求められる。
それを用いて、落下時の加速度及び抗力Tを求めよ。

円板の慣性モーメント $I$ は、

$I=m\dfrac{r^2}{2}$ であるから、

$\dfrac{d^2h}{dt^2}\left(m+\dfrac{I}{r^2}\right)=mg$ は、

$$\frac{d^2h}{dt^2}\left(m+\frac{m}{2}\right)=\frac{d^2h}{dt^2}\frac{3m}{2}=mg$$

$$\therefore \frac{d^2h}{dt^2}=\frac{2}{3}g$$

すなわち重力の加速度 の $2/3$ となる。

また、(1)式から、

$$T=mg-m\frac{d^2h}{dt^2}=mg-m\frac{2g}{3}=\frac{1}{3}mg$$

[参考]

落下速度 $:v=\dfrac{dh}{dt}=\displaystyle\int_0^t\frac{d^2h}{dt^2}dt=\int_0^t\frac{2}{3}gdt=\frac{2}{3}gt$

落下高さ $:h=\displaystyle\int_0^t vdt=\int_0^t\frac{2}{3}gt=\frac{1}{3}gt^2$

回転の角速度と回転角

$$\omega=\frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{r}\frac{dh}{dt}=\frac{2gt}{3r},\phi=\frac{h}{r}$$

運動エネルギー

重心の運動による $KE_M$ と、回転による $KE_I$

$$KE_M=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}gt\right)^2=\frac{2}{9}mg^2t^2$$

$$KE_I=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{2gt}{3r}\right)^2=\frac{1}{9}mg^2t^2$$

失った位置エネルギー $-PE$

$$-PE=mgh=mg\cdot\frac{1}{3}gt^2=\frac{1}{3}mg^2t^2$$

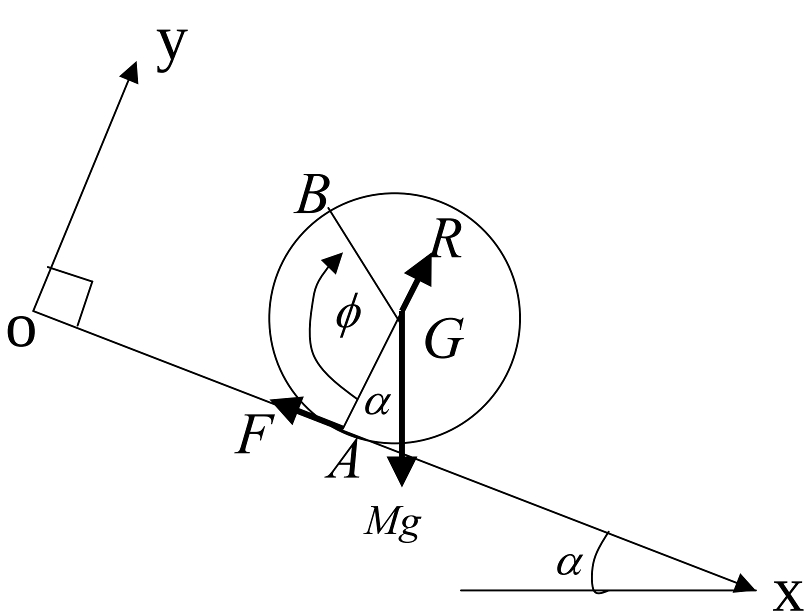
$-PE=KE_M+KE_I$ が成り立つ。

滑車のない単純な落下 では、

$-PE=KE_M$

であるから、滑車の挿 入により、滑車の回転エネルギー分速度 エネルギーが減少したことになる。

例題2　斜面を転がる円板




まず、滑車の重心の運 動は :

$x$方向 : 斜面の摩擦力を $F$ として、

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=Mg\sin\alpha-F\cdots(1)$$

$y$方向 : 斜面の抗力を $R$として

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=Mg\cos\phi-R\cdots(2)$$

が成り立つ。

回転については、

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2}=Fr\cdots(3)$$

また、次式が成り立つ 。

$$x=r\phi\cdots\cdots(4)$$

$$I=MK^2=M\frac{r^2}{2}\cdots(5)$$

斜面の存在により、 $y$方向には運動がないので,(2)式は 0 になる。

$$\therefore R=Mg\cos\alpha$$

(2)(4)(5)から、$F=\frac{I}{r}\frac{1}{r}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{MK^2}{r^2}\frac{d^2x}{dt^2}$

(1)に代入して、

$M\left(1+\frac{K^2}{r^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}=Mg\sin\alpha,$ (5)を利用。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{r^2}{r^2+K^2}g\sin\alpha=\frac{1}{1+1/2}g\sin\alpha$$

$$=\frac{2}{3}g\sin\alpha$$

$x$方向の加速度

$$A=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{r^2}{r^2+K^2}g\sin\alpha=\frac{2}{3}g\sin\alpha$$

$x$方向の速度

$$V=\frac{dx}{dt}=\int_0^t\frac{d^2x}{dt^2}dt=\frac{r^2}{r^2+K^2}g\sin\alpha\cdot t$$

$$=\frac{2}{3}g\sin\alpha\cdot t$$

$x$方向の位置

$$x=\int_0^t\frac{dx}{dt}dt=\frac{1}{2}\frac{r^2}{r^2+K^2}g\sin\alpha\cdot t^2$$

$$=\frac{1}{3}g\sin\alpha\cdot t^2$$

角速度

$$\omega=\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}V$$

エネルギーバランス

$$PE=-Mgx\sin\alpha=-\frac{1}{3}Mg^2\sin^2\alpha\cdot t^2$$

$$KE_M=\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{2}{3}g\sin\alpha\cdot t\right)^2$$

$$=\frac{2}{9}Mg^2\sin^2\alpha\cdot t^2$$

$$KE_I=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}M\frac{r^2}{2}\left(\frac{V}{r}\right)^2=\frac{1}{4}MV^2$$

$$=\frac{1}{9}Mg^2\sin^2\alpha\cdot t^2$$

$$-PE=KE_M+KE_I$$

もし、斜面に摩擦がな いときは、$F=0$ となり、回転はなく、

加速度 $A=g\sin\alpha$

速度 $V=g\sin\alpha\cdot t$

位置 $x=\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2$

位置エネルギー $PE$の減分

$$PE=-Mgx\sin\alpha=-\frac{1}{2}Mg^2\sin^2\alpha\cdot t^2$$

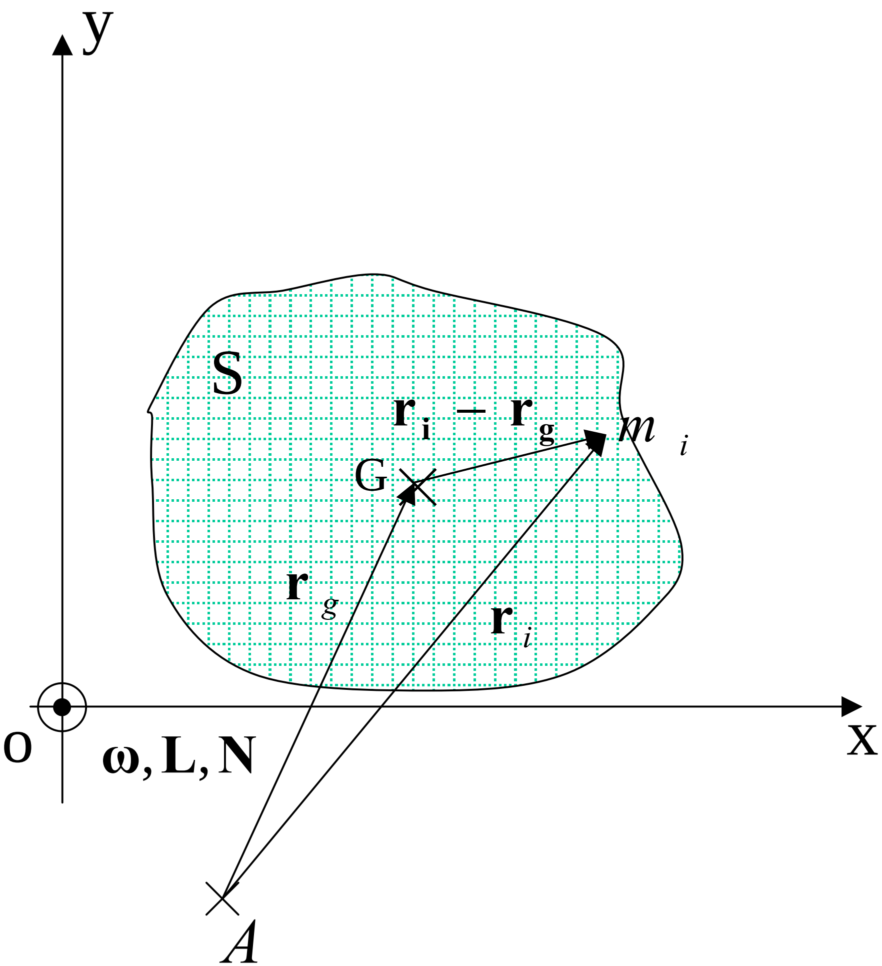
運動エネルギー $KE$

$$KE=\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}M(g\sin\alpha\cdot t)^2$$

$$=\frac{1}{2}Mg^2\sin^2\alpha\cdot t^2$$

$-PE=KE$ が成り立つ。

# 追加　基準点を変えたときのI




重心の周りの慣性モーメントを $I_g$ とする。
任意の点 $A$ の周りの慣性モーメントを $I_A$ とする。

$$I_g = \sum_i (\mathbf{r_i} - \mathbf{r_g}) \bullet (\mathbf{r_i} - \mathbf{r_g}) m_i$$

$$= \sum_i (\mathbf{r_i} \bullet \mathbf{r_i}) m_i + \sum_i (\mathbf{r_g} \bullet \mathbf{r_g}) m_i - 2 \sum_i (\mathbf{r_i} \bullet \mathbf{r_g}) m_i$$

$$= \sum_i r_i^2 m_i + \left( \sum_i m_i \right) r_g^2 - 2 \left( \sum_i \mathbf{r_i} m_i \right) \bullet \mathbf{r_g}$$

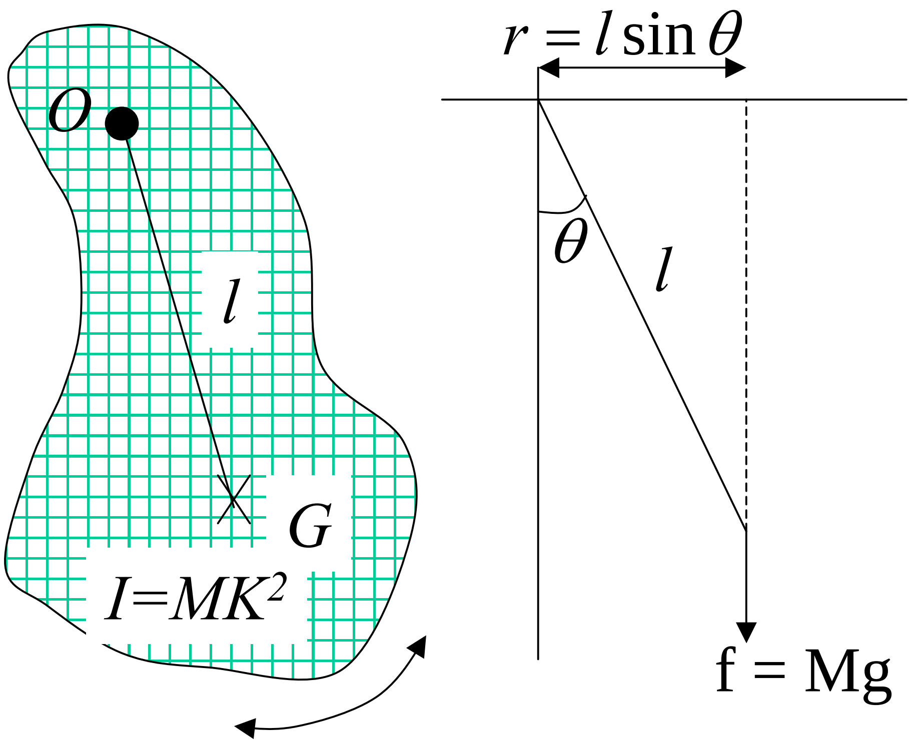
$$= I_A + M r_g^2 - 2M \mathbf{r_g} \bullet \mathbf{r_g}$$

$$= I_A - M r_g^2$$

$$\therefore I_A = I_g + M r_g^2$$

すなわち、任意の点 $A$ の周りの慣性モーメントは、重心の周りのモーメントに、重心に全重量が集まったと見なした $A$ 点の周りのモーメントを加えた値に等しい。

応用　基準点を変えたときのI
剛体振子




運動方程式は、$\theta$ を減少させる向きのトルクが働くから、

$$\left(I + M\,l^2\right)\frac{d^2\theta}{d\,t^2} = -l\sin\theta \times Mg \approx -Mgl\,\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{d\,t^2} \approx -\frac{Mgl}{MK^2 + M\,l^2}\theta = -\frac{g}{\left(K^2 + l^2\right)/l}\theta$$

$L = \left(K^2 + l^2\right)/l$ の単振子に相当することがわかる。