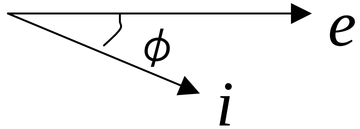
正弦波交流の平均電力の計算



図のように、電流位相 が電圧より ϕ だけ遅れている場合を考えます 。

$$e = E_m \sin \omega t,\ i = I_m \sin(\omega t - \phi)$$

$$p = ei = E_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \phi)$$

$$p = -\frac{E_m I_m}{2}\{\cos(2\omega t - \phi) - \cos\phi\}$$

加法定理から、

$$= \frac{E_m I_m}{2}\{\cos\phi - \cos(2\omega t - \phi)\}$$

$$= \frac{E_m I_m}{2}\{\cos\phi - \cos 2\omega t \cos\phi - \sin 2\omega t \sin\phi\}$$

$$= \frac{E_m I_m}{2}\{\cos\phi(1 - \cos 2\omega t) - \sin\phi \sin 2\omega t\} \cdots\cdots (1)$$

平均電力 $P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt \quad T = \frac{2\pi}{\omega} =$ 周期

$$\int_o^T \cos 2\omega t dt = \frac{1}{2}[\sin 2\omega t]_0^T = 0,$$

$$\int_o^T \sin 2\omega t dt = \frac{1}{2}[-\cos 2\omega t]_0^T = 0,$$

$$\therefore P = \frac{E_m I_m}{2}\cos\phi = \frac{E_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\phi = E_e I_e \cos\phi \cdots (2)$$

添字 m : 最大値、 e : 実効値

有効電力と無効電力

瞬時値を表す (1)式を再掲し、電圧、電 流を実効値で表すと、

$$p = \frac{E_m I_m}{2}\{\cos\phi(1 - \cos 2\omega t) - \sin\phi \sin 2\omega t\}$$

$$= E_e I_e \cos\phi(1 - \cos 2\omega t) + E_e I_e \sin\phi(-\sin 2\omega t)$$

$$= P(1 - \cos 2\omega t) + Q(-\sin 2\omega t) \cdots\cdots (3)$$

$P = E_e I_e \cos\phi$(有効電力), $Q = E_e I_e \sin\phi$(無効電力)

$E_e = 4,\ I_e = 3,\ \phi = \frac{\pi}{6}$ のときの、

電圧、電流の瞬時値 および

$$p_a = P(1 - \cos 2\omega t) \cdots\cdots (4)$$

$$p_r = Q(-\sin 2\omega t) \ \cdots\cdots (5)$$

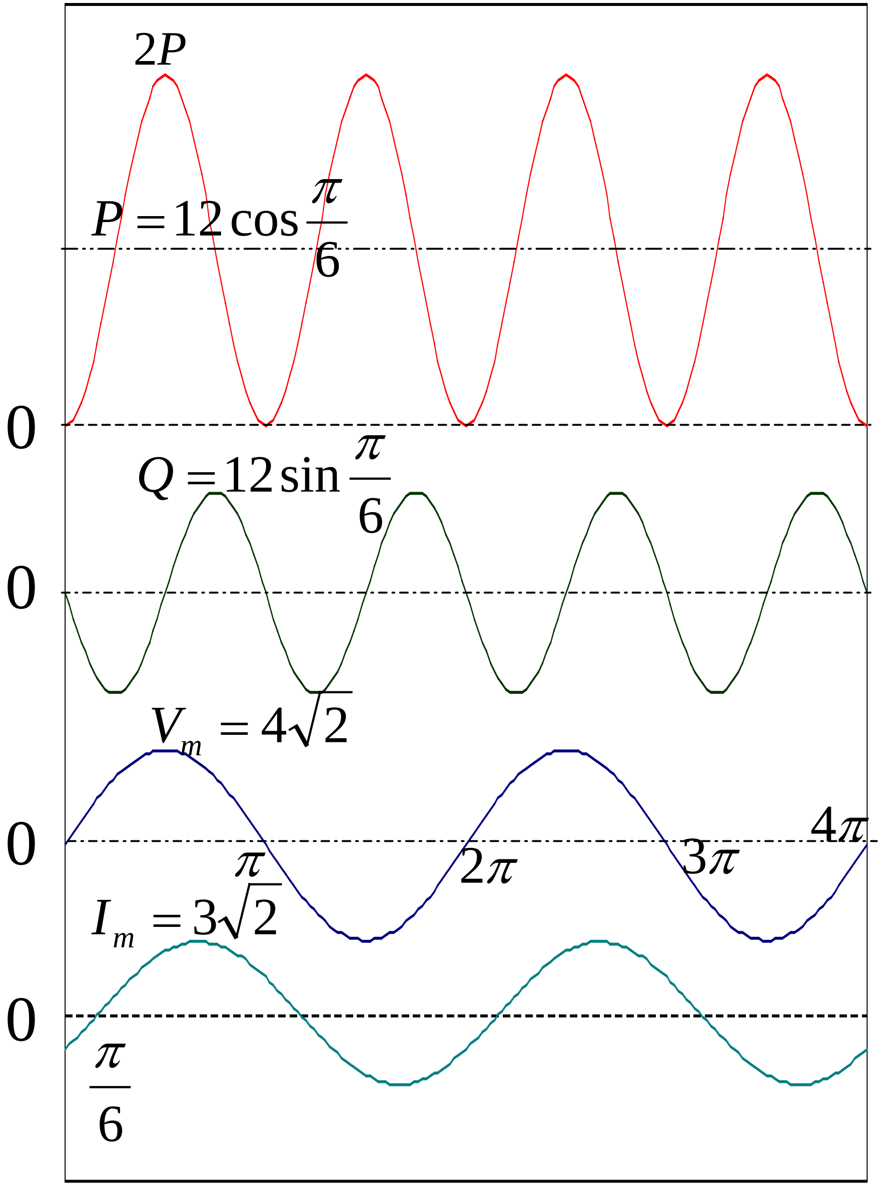
の値を計算した結果の グラフを次ページに示します。

p_aは、最小値が 0 ,最大値が $2P$, 平均値が P

p_rは、最小値が $-Q$, 最大値が Q 平均値が 0 で、いずれも電圧の周 波数の2倍の周波数の正弦波であることが分 かります。

特に、p_r (無効電力分)は、電源との間を往復する電力であること 、$\sin\phi = 0$ の時には現れないことが分かります 。

次元は、いずれも電 圧と電流の積として得られていますので電 力の次元になります。



$$p_a=12\cos\frac{\pi}{6}(1-\cos 2\omega t)$$
$$=P(1-\cos 2\omega t)$$

有効電力の瞬時値
電源側から負荷に向かう電力で、電圧の倍周波の正弦波で増減する。
振幅はP,平均値はP

$$p_r=12\sin\frac{\pi}{6}(-\sin 2\omega t)$$
$$=Q(-\sin 2\omega t)$$

無効電力の瞬時値
＋は電源側から負荷に、
ーは負荷側から電源に向かう電力で、振幅はQ,
平均は0
電圧の倍周波の正弦波

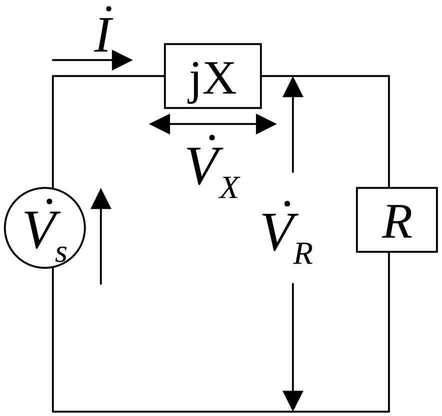
$$v=4\sqrt{2}\sin\omega t$$

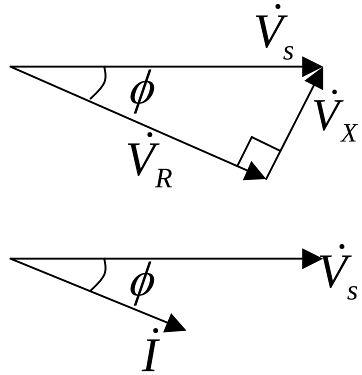
電圧の瞬時値

$$i=3\sqrt{2}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$$

電流の瞬時値

1. R, X 直列回路





$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_s}{R + jX} = \frac{V_s \varepsilon^{j\theta}}{\sqrt{R^2 + X^2}\,\varepsilon^{j\phi}},\ \theta = 0 \text{ とする。}$$

$$= \frac{V_s \varepsilon^{-j\phi}}{\sqrt{R^2 + X^2}},\quad \tan\phi = \frac{X}{R}$$

$$\dot{V}_R = R\dot{I}$$

$$\dot{S}_R = \dot{V}_R \dot{I}^* = R\dot{I}\dot{I}^* = I^2 R + j0 = P_R + j0$$

$$\dot{V}_X = jX\dot{I}$$

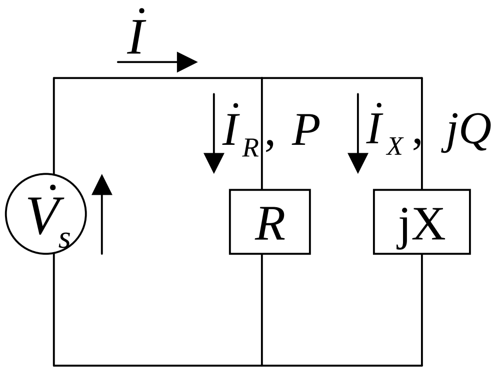
$$\dot{S}_X = \dot{V}_X \dot{I}^* = jX\dot{I}\dot{I}^* = 0 + jI^2 X = 0 + jQ_X$$

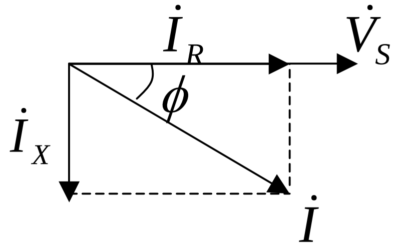
$$\dot{S}_S = \dot{V}_S \dot{I}^* = \dot{V}_S \left(\frac{\dot{V}_s}{R + jX}\right)^* = \frac{V_S^2}{R - jX}$$

$$= \frac{V_S^2 (R + jX)}{R^2 + X^2} = I^2 R + jI^2 X = P_R + jQ_X$$

Rで消費される電力は、 $P = I^2 R$であり、
$Q = I^2 X$ はX で消費される無効電力 と
いうことになります。
$X > 0$ すなわち、誘導性リア クタンス
では、 $Q > 0,$
$X < 0$ すなわち、容量性リア クタンス
では、 $Q < 0$
となります。
以上のような Q の符号の取り方を
「遅れ無効電力を正に とる方式」
といいます。
このとき、
$\dot{S} = \dot{E}_e \dot{I}_e^* = P + jQ$
$Q = E_e I_e \sin\phi$
Q の符号を上記と逆にと る方式も使用
されており、それを
「進み無効電力を正に とる方式」
といいます。
このとき、
$\dot{S} = \dot{E}_e^* \dot{I}_e = P + jQ$
$Q = -E_e I_e \sin\phi$
この二つの方式は、両 方とも使われます
ので紛らわしくないよ うに断って使うの
が良いでしょう。(以下、遅れ無効電力を
正に取る方式による)

2. R, X 並列回路





$$V_S = R\dot{I}_R = jX\dot{I}_X$$

$$\dot{I}_R = \frac{V_S}{R},\ \dot{I}_X = \frac{V_S}{jX} = -j\frac{V_S}{X}$$

$$\dot{S}_S = V_S\dot{I}^* = V_S\left(\dot{I}_R + \dot{I}_X\right)^*$$

$$= V_S\dot{I}_R^* + V_S\dot{I}_X^* = \left(R\dot{I}_R\right)\dot{I}_R^* + \left(jX\dot{I}_X\right)\dot{I}_X^*$$

$$= I_R^2 R + jI_X^2 X$$

$$= P_R + jQ_X$$

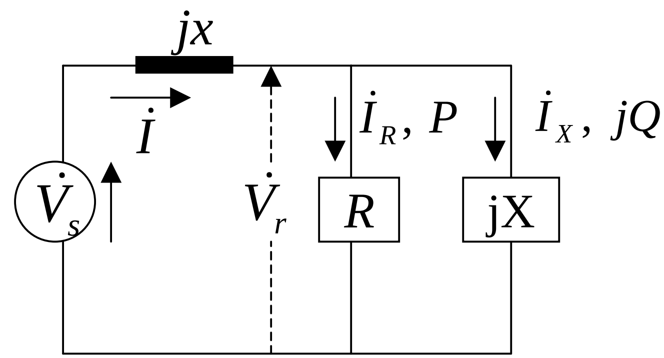
以上から、

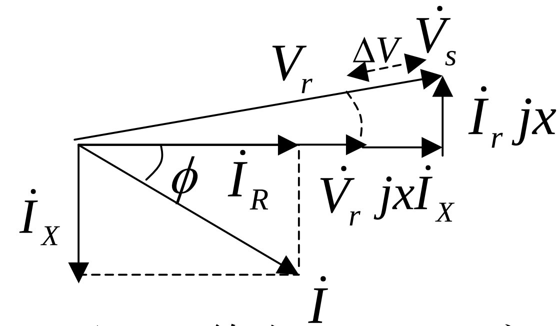
$P = P_R = I_R^2 R$

$Q = Q_X = I_X^2 X$

は、直列回路の場合と同じです。

3. R, X 並列回路 線路リアクタンス付き

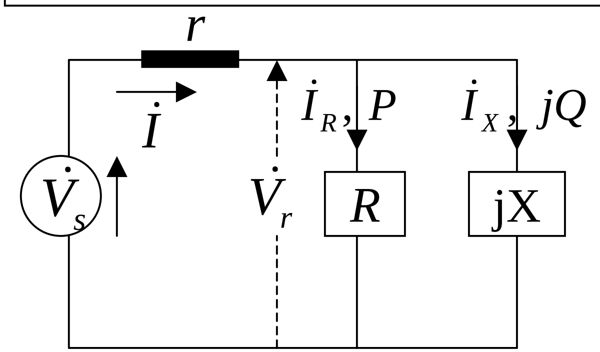


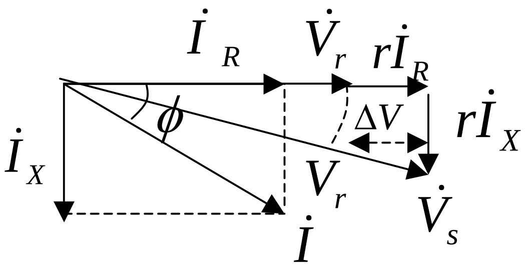


上図のように、線路インピーダンスとして、リアクタンス x だけが含まれる場合、線路電圧降下 ΔV は抵抗分電流による電圧降下 $\dot{I}_R\, jx$ が電圧にほぼ直角であるため、電圧降下に寄与せず、電圧降下は、ほぼ、$I_X\, jx$ すなわち、電流の無効電力対応分とリアクタンスの積のみによって決まることになります。

単位法で表すと、定常時には、電圧はほぼ $1p.u$ なので、$Q = V_r I_X \approx I_X$ から $\Delta V \approx xQ$ となります。

4. R, X 並列回路　線路抵抗付き





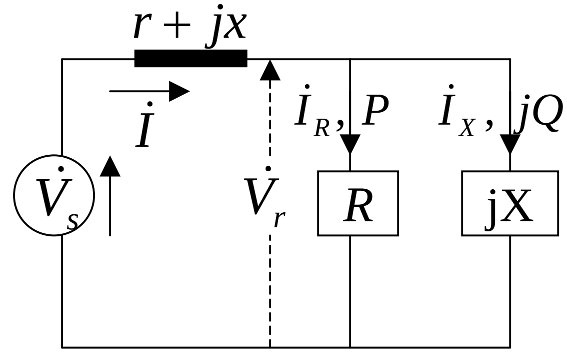
上図のように、線路インピーダンスとして、抵抗 r だけが含まれる場合、線路電圧降下 ΔV はリアクタンス分電流による電圧降下 $r\dot{I}_X$ が電圧にほぼ直角であるため、電圧降下に寄与せず、電圧降下は、ほぼ、rI_R すなわち、電流の有効電力対応分と線路抵抗の積のみによって決まることになります。

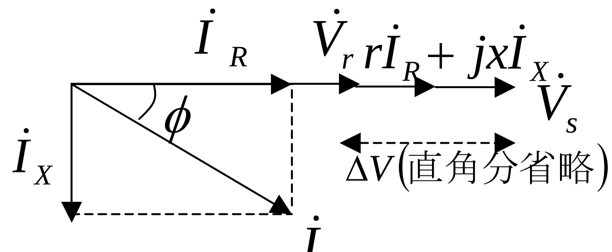
単位法で表すと、電圧がほぼ定格値に近い定常時には、$V_r \approx 1,\ I_R \approx P$ から、

$\Delta V \approx rP$

となります。

5. R, X 並列回路　線路インピーダンス付き





上図のように、線路インピーダンスとして、$r + jx$ が含まれる場合、線路電圧降下 ΔV はほぼ、$\Delta V \approx rI_R + xI_X$ となります。

すなわち、電流の有効電力対応分と線路抵抗の積と、電流の無効電力対応分とリアクタンスの積との和によって決まることになります。

単位法を使い、電圧がほぼ定格電圧に近い定常時には、$\Delta V \approx rP + xQ$ となります。

送電系統など r に比べて x が数十倍も大きいときには、$\Delta V \approx xQ$ と見なしても良い場合が多いのです。<u>無効電力が電圧に直接関係する</u>ことが分かります。

まとめ

負荷の端子電圧が V で、電源からの流入電流が I のとき、この負荷で消費される有効電力と無効電力は、

$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = P + jQ$

として求められる。

有効電力の瞬時値は、振幅が P で最大値が $2P$、周波数が電源周波数の2倍の正弦波で表され、その平均値は P である。

無効電力の瞬時値は、振幅が Q 、周波数が電源周波数の 2倍の正弦波で、その平均値は 0 である。

上記の負荷の前に、線路インピーダンスとして、$r + jx$ が含まれる場合、線路電圧降下 ΔV は、ほぼ、$\Delta V \approx rI_R + xI_X$ となる。

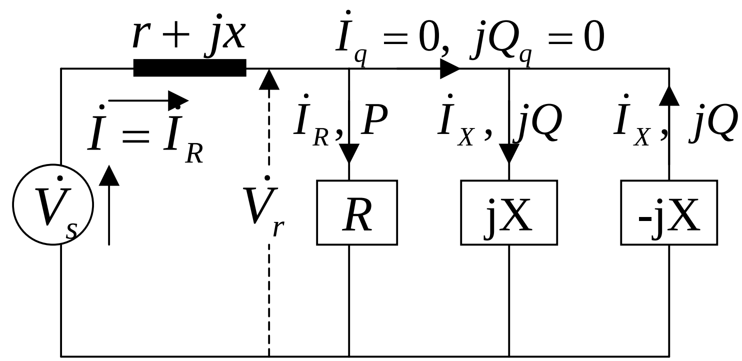
すなわち、電流の有効電力対応分と線路抵抗の積と、電流の無効電力対応分とリアクタンスの積との和によって決まることになる。

単位法を使い、電圧がほぼ定格電圧に近い定常時には、$\Delta V \approx rP + xQ$ となる。

送電系統など r に比べて x が数十倍も大きいときには、$\Delta V \approx xQ$ と見なしても良い場合が多い。配電系統では、電線が細いことが多いので、r 分が無視できず、$\Delta V \approx rP + xQ$ を使う。

このように、無効電力は、系統内の誘導性リアクタンスを通過することにより電圧降下を引き起こす効果がある。

電圧降下を打ち消すには、遅れ無効電力負荷に並列に進み無効電力負荷（容量性リアクタンス）を付加すればよい。



平衡3相では3相合成すると電力振動がない

以上の説明は単相回路で行いましたが，
3相平衡回路の場合は、

$_a p_a = P(1 - \cos 2\omega t)$

$_b p_a = P\{1 - \cos(2\omega t - 4\pi/3)\}$

$_c p_a = P\{1 - \cos(2\omega t + 4\pi/3)\}$

となり、単相ごとには振動しているが
3相合成では、$_a p_a + _b p_a + _c p_a = 3P$ となり、
一定値で振動がなくなります。
無効電力 Q についても同様です。