偏微分

右の図は、$x-y$平面上の高度や、温度などのスカラー量$H(x,y)$の分布を表している。
ここで、$x'-x''$断面上での点(x,y)から点$(x+\Delta x,y)$に至る勾配 h_x は、

$$h_x=\frac{H(x+\Delta x,y)-H(x,y)}{\Delta x}=\frac{\Delta H_x}{\Delta x}$$

ここで、$\Delta x\to 0$ の極限をとると、

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta H_x}{\Delta x}=\frac{\partial H}{\partial x}\cdots①$$

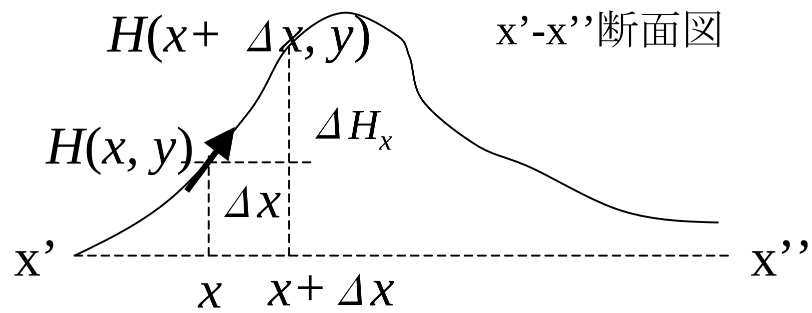
同様に、$y'-y''$断面上での点(x,y)から点$(x,y+\Delta x)$に至る勾配 h_y は、

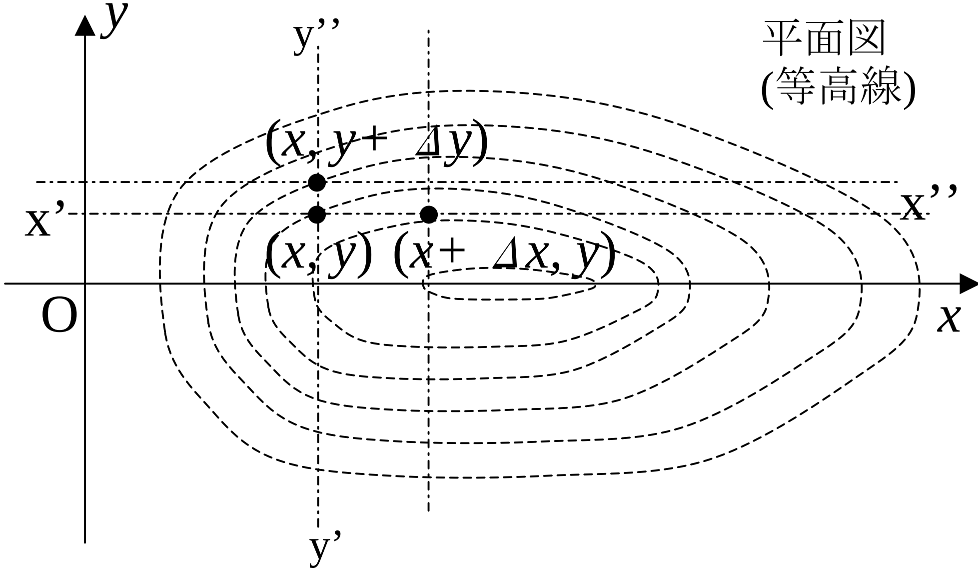
$$h_y=\frac{H(x,y+\Delta y)-H(x,y)}{\Delta y}=\frac{\Delta H_y}{\Delta y}=\frac{\partial H}{\partial y}$$

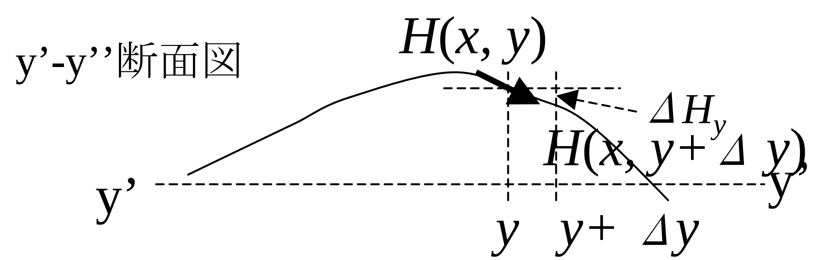
Δ y $\to$ 0としたときの極限では、

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta H_y}{\Delta y}=\frac{\partial H}{\partial y}\cdots②$$

以上のように、偏微分は、分母に現れている変数、すなわち、①式では x 、②式では y だけを変数とし、他の変数は定数と考えて微分する。偏微分は、分母の変数だけが増減したときの関数値の変化を表し、分母の変数方向の接線(図の矢印)の勾配でもある。







応用例

1. $\phi(x,y,z)$に対し、点$p(x_0,y_0,z_0)$における勾配 $grad\,\phi$ を次のように定義する。

$grad\,\phi=$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial\phi}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial\phi}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$$

すなわち、$grad\,\phi$ は、点pにおけるϕのx,y,zによる偏微分値を、x,y,z 成分とするベクトルである。

(1) $f(x,y,z)=x^2y^3z$ のとき、点$(1,2,1)$ における $grad\ f$ を求めよ。

[解]

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=x^2y^3$$

これらに、点 p の座標を代入して、

$grad\ f=(16,12,8)$

(2) $g(x)=3x^2+x+2$ のとき、$x=0$ における $grad\ g$ を求めよ。

[解]

g は x のみの1変数関数であるから、偏微分$=$常微分、すなわち、

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{d\,g}{d\,x}=6x+1$$

これに、$x=0$ を代入して、

$grad\ g=1$(x成分のみ)

[注. 3次元表示すると、$grad\ g=(1,0,0)$]

(3) $H(x,y)=2\sin(x+2y)$ のとき、点$p(\pi/6,\pi/12)$における勾配を求めよ。

[解]

$$\frac{\partial H}{\partial x}=2\cos(x+2y),\frac{\partial H}{\partial y}=4\cos(x+2y)$$

$$grad\ H=(2\cos(\pi/3),4\cos(\pi/3))$$
$$=(1,2)$$

[注. 3次元表示すると、$grad\ H=(1,2,0)$]

2.全微分との関係$\begin{pmatrix}\text{基礎編ニュー}\\\text{トン法参照}\end{pmatrix}$

$f(x,y,z)$の(全)微分は、

$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$

ただし、$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x},\ f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y},\ f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$

である。

[解説]

$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$

とすると、これは、次 のように変形できる。

$$\begin{aligned}\Delta f &= [\{ f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \\ &\quad - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)\}/\Delta x]\times \Delta x \\ &\quad +[\{ f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) \\ &\quad - f(x,y,z+\Delta z)\}/\Delta y]\times \Delta y \\ &\quad +[\{ f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)\}/\Delta z]\times \Delta z\end{aligned}$$

ここで、極限をとり、

$\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ とすると、たとえば、

$[\{ f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)\}/\Delta z]\times \Delta z$

$\to \dfrac{\partial f}{\partial z} dz$ となり、同様にして、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

(4)ある物体中の点$p(x,y,z)$における温度が100℃で温度勾配が、$(3,-1,-2)$のとき、この近傍$q(x+0.1, y+0.2, z+0.3)$における温度を推定せよ。

[解]

温度をTとすると

$$\begin{aligned}\Delta T &\approx T_x \Delta x + T_y \Delta y + T_z \Delta z \\ &= 3\times 0.1 + (-1)\times 0.2 + (-2)\times 0.3 \\ &= -0.5\end{aligned}$$

$\therefore T(q) \approx T(p) - 0.5 = 99.5$ [℃]

(5)楕円 $4x^2 + 9y^2 = 25$ の点(2,1)における接線の式を求めよ。

[解]

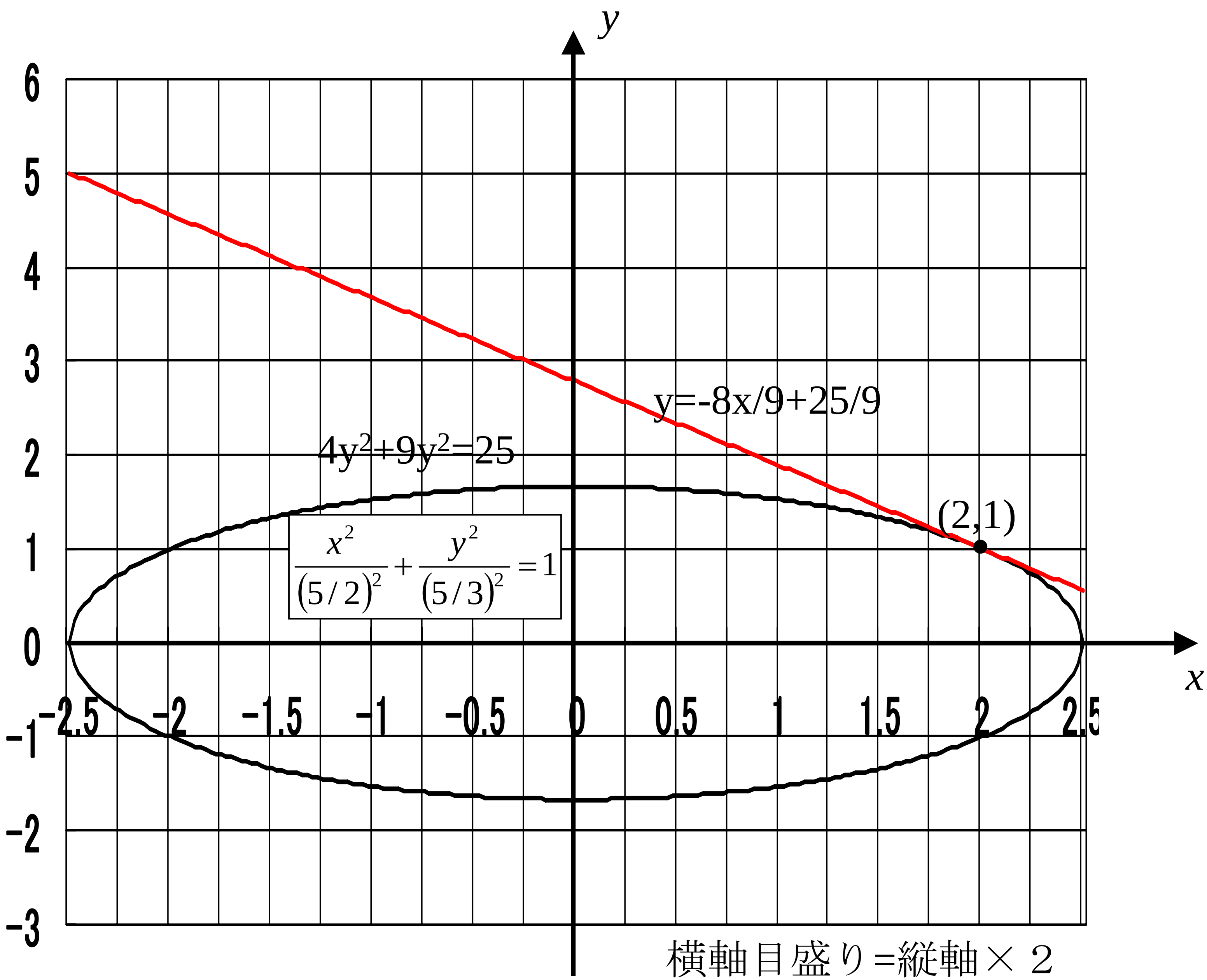
$f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 = 25$ とおく。

$df = 8xdx + 18ydy = 0$(25は定数なので微分は 0)

これから、$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{8x}{18y} = -\dfrac{4x}{9y} = -\dfrac{8}{9}$

接線は勾配が$-8/9$,で点$(2,1)$を通るので、求める接線の式は、

$\dfrac{y-1}{x-2} = -\dfrac{8}{9} \to y = -\dfrac{8}{9}x + \dfrac{25}{9}$ …次頁の図参照


y
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
y=-8x/9+25/9
4y2+9y2=25
(2,1)
$\frac{x^2}{(5/2)^2}+\frac{y^2}{(5/3)^2}=1$
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
x
横軸目盛り=縦軸×２