右図のように、xに関する二次関数

$y=ax^2+bx+c\cdots(1)$

のグラフがあるとする。

(1)式は、$a\neq 0$ のとき、次のように等価変形できる(これは覚えてください)。

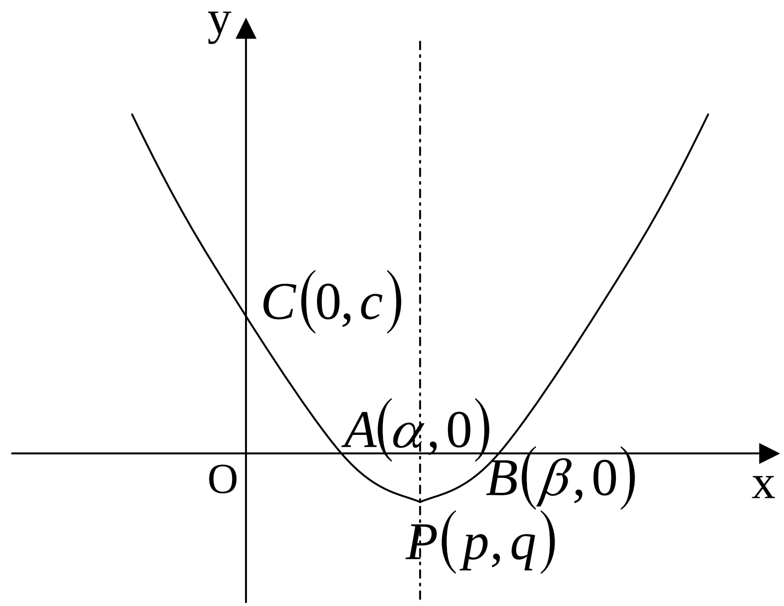
$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left\{x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\times\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\cdots(2)$$

(2)式で、$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$は、$x=-\frac{b}{2a}$のとき最小値0をとる。$a>0$の場合を考えると、このとき$(2)$式、すなわち、$y$は最小値となる。そして、$x$が、$-\frac{b}{2a}$から離れるに従って、$y$は増大する。



Pを頂点と呼ぶ。その座 標 (p,q)は、

$p=-\frac{b}{2a},q=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ である。

A,B は、$y=0$ の根で、(2)式を0として、

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ から、

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Cを切片と呼び、その y座標は、(1)式で、$x=0$として、$y=c$となる。

$a<0$のときは、上に凸のグ ラフとなる。

(2)式は、2根 α, β を使って、

$y = a(x-\alpha)(x-\beta) \cdots (3)$

と書くことができる。

さて、$D = b^2 - 4ac$ と書くと、

$$\alpha = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

であるが、$D \geq 0$ のときは実数根となる。

$D = 0$ のときは、$\alpha = \beta$(等根)$= p, q = 0$

となり、頂点は x 軸に接している。

$D < 0$ のときは、虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ として、

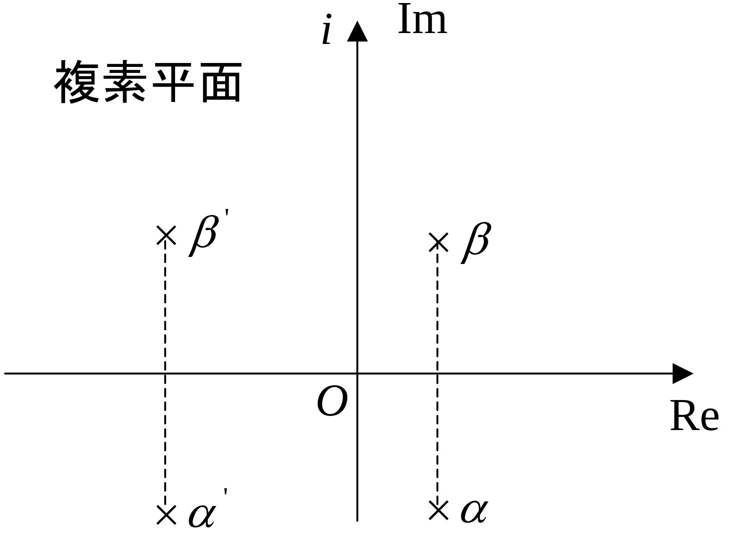
$$\alpha = \frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a}, \beta = \frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a}$$

と書けば、$\sqrt{-D}$ は実数となり、α, β は虚数 $i\sqrt{-D}$ を含み「虚根」となる。

このとき、$y = 0$ に実根がないので、グラフは、x 軸をきらず、x 軸の上のみ$(a > 0)$、または、下のみ$(a < 0)$となる。

Dは判別式と呼ばれる。

α, β を複素平面上に表すと、右図のように実軸に対して対称の位置に現れる。



二次方程式が重要なのは、制御理論で、特性方程式(実数係数)

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

を因数分解したとき、虚根があれば、それは、共役な虚根とペアになって現れるので、実係数二次式

$s^2 + b_k s + c_k, \cdots b_k, c_k$ は実数、$b_k^2 - 4c_k < 0,$

が含まれることになるからである。

特性方程式のすべての根が、α', β' のように、複素平面上の虚軸よりも左側にあるとき、すなわち根の実数部がすべて負のとき、安定な系と判定される。

[根と係数との関係]

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ の2根 α と β との和と積を計算すると、

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a},\ \alpha\,\beta=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

となるので、この関係を使って、安定判定を行うことを考える。

(1) ２根が実根のときは､2根とも負になるのは2根の積が正(2根が同符号)で､2根の和が負であることと等価である。したがって、

$\dfrac{b}{a}>0$, かつ､$\dfrac{c}{a}>0$ ならば安定といえる。

(2) 2根が虚根のときは、その実数部は

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{-b}{2a}$ として求められる。

以上(1),(2)から、

$D=b^2-4ac\geq 0$ のときは､$\dfrac{b}{a}>0,\ \dfrac{c}{a}>0$､

$D=b^2-4ac<0$ のときは､$\dfrac{b}{a}>0$

が安定条件となる。

[例題]

伝達関数が$G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\quad\left(\zeta>0,\omega_n>0\right)$

で表される系の安定性に関する記述の正誤判定問題(H17,電気電子一次)

特性方程式は、分母から、

$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$, この解は、

$$s=\frac{-2\zeta\omega_n\pm\sqrt{\left(2\zeta\omega_n\right)^2-4\omega_n^2}}{2}$$

$=\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\equiv\alpha,\beta$ と置く。

この系の応答には、$e^{\alpha t}$ と $e^{\beta t}$ の項を含むことになる。

安定性の判定は、題意により $\zeta>0\ \omega_n>0$ なので、

(1) $D=\zeta^2-1\geq 0$ 、すなわち、$\zeta\geq 1$ のときは、

２根は実根で、その積$\dfrac{c}{a}=\omega_n^2>0$,その和

$-\dfrac{b}{a}=-2\zeta\omega_n<0$ であるから2根とも負で安定。

(2) $\zeta^2-1<0\ \left(\zeta<1\right)$ のときは､$-\dfrac{b}{a}=-2\zeta\omega_n<0$

であるから実数部は負で安定。結局、系は常に安定である。