ニュートン-ラフソン法

非線形方程式の逐次近似による解法

ニュートンの逐次近似法(1 変数の場合)
　計算式、例題
ニュートンラフソン法(多変数の場合)
　計算式

ニュートンの逐次近似法（1変数の場合）

右上図のような x の関数 $f(x)$ があるとき $f(x)=0$ の解を求めることを考える。
この図では、$f(x)=0$ の解すなわち、$f(x)$ と x 軸との交点は、x_a, x_b, x_c と3個あるが、まず、x_b を求めるニュートン法を示す。

step 1. x_b の近傍の任意の数値 x_1 を選ぶ。

step 2. $f(x)$の $x=x_1$における微分値 $f'(x_1)$ を求める。

step 3. 点$p_1(x_1, f(x_1))$を通り、勾配が$f'(x_1)$である直線、つまりp_1における接線が x 軸と交わる点 x_2 を求める。

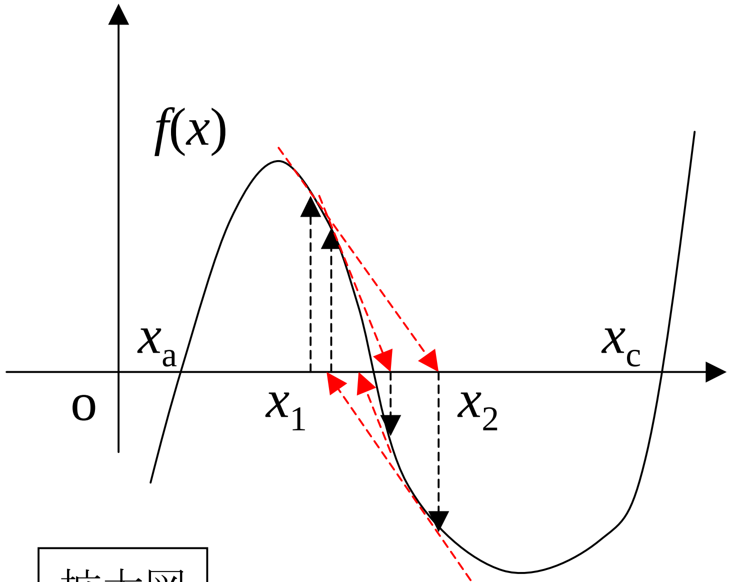
step 4. $f(x)$の $x=x_2$における微分値 $f'(x_2)$ を求める。

step 5. 点$p_2(x_2, f(x_2))$を通り、勾配が$f'(x_2)$である直線、つまりp_2における接線が x 軸と交わる点 x_3 を求める。

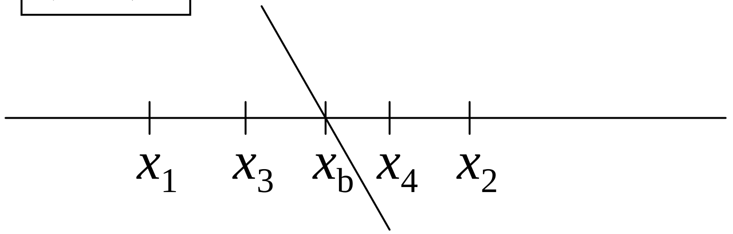
step 6. $f(x)$の $x=x_3$における微分値 $f'(x_3)$ を求める。

step 7. 点$p_3(x_3, f(x_3))$を通り、勾配が$f'(x_3)$である直線、つまりp_3における接線が x 軸と交わる点 x_4 を求める。……以下同様

ニュートン法



拡大図



左に示した繰り返し計算を続けることにより x_b の近似値 x_n を求める。$|x_n - x_{n-1}|$が所定の数値(精度)以下になったら終わる。
図からも明らかなように、出発点の数値によっては、x_a や x_c に到達することもあり、グラフなどで確かめる場合もある。

計算式　1

$x=x_1$ における接線が、$x=x_2$ で x 軸と交わるので、その方程式は、

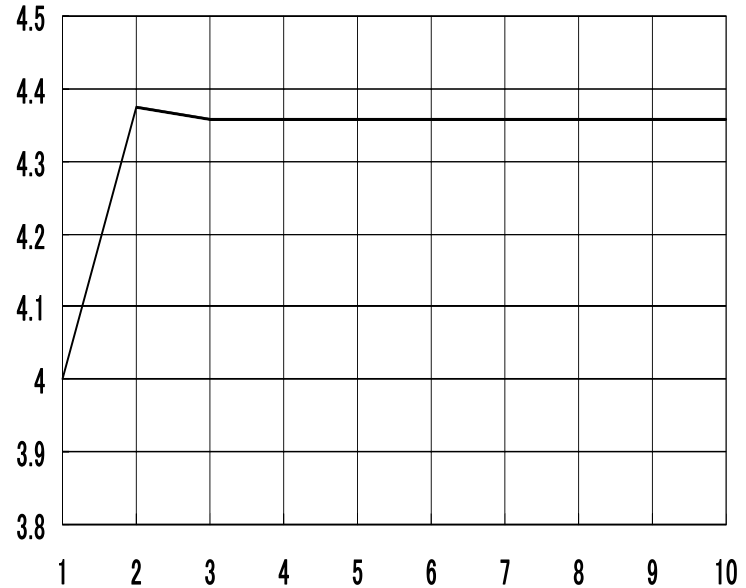
$$\frac{f(x_1)-0}{x_1-x_2}=f'(x_1)$$

これから、

$x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, n回目の計算では、

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdots$①, これはまた、

$x^{new}=x^{old}-\dfrac{f(x^{old})}{f'(x^{old})}\cdots$②と書くこともできる。



n	xold	xnew
1	4	4.375
2	4.375	4.358929
3	4.358929	4.358899
4	4.358899	4.358899
5	4.358899	4.358899
6	4.358899	4.358899
7	4.358899	4.358899
8	4.358899	4.358899
9	4.358899	4.358899
10	4.358899	4.358899

例題1

$\sqrt{19}$を求めよ。

[解]

$f(x)=x^2-19$ と置く。

$f'(x)=2x$

$$\therefore x^{new}=x^{old}-\frac{(x^{old})^2-19}{2x^{old}}=\frac{1}{2}\left(x^{old}+\frac{19}{x^{old}}\right)$$

$x^{0ld}=4$ として順次計算する。

結果は、右の図、表の通りで、3回目には0.000001 の精度に到達している。

例題2

例題１を正の数Aの平方根を求める式に修正せよ。

[解]

$$x^{new}=\frac{1}{2}\left(x^{old}+\frac{A}{x^{old}}\right)$$

x^{old} の初期値は、概算値を代入する。

例題3

正の数Aの３乗根を求める式を作れ。

[解]

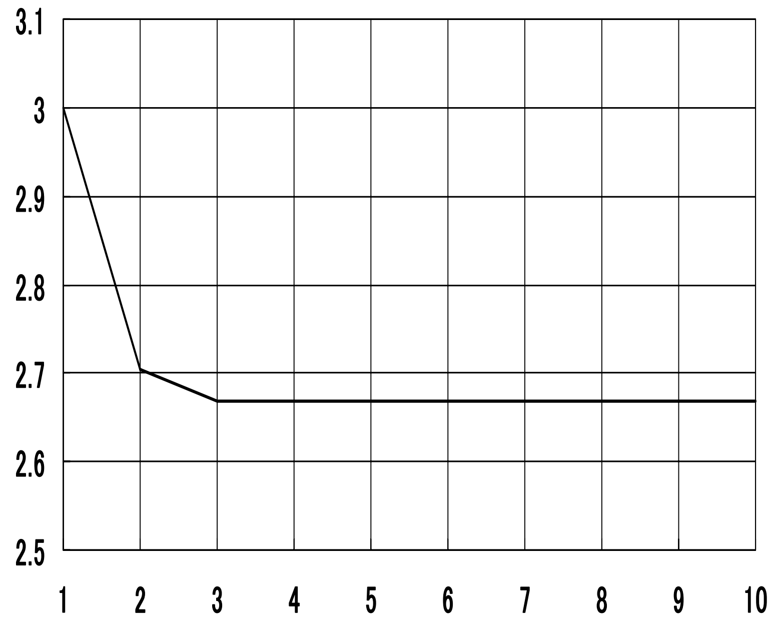
$f(x)=x^3-A$と置く。

$f'(x)=3x^2$

$$\therefore x^{new}=x^{old}-\frac{\left(x^{old}\right)^3-A}{3\left(x^{old}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{2x^{old}+\frac{A}{\left(x^{old}\right)^2}\right\}$$

$A=19$, 初期値を3として10回まで計算した結果を右の図、表に示す。



n	xold	xnew
1	3	2.703704
2	2.703704	2.668861
3	2.668861	2.668402
4	2.668402	2.668402
5	2.668402	2.668402
6	2.668402	2.668402
7	2.668402	2.668402
8	2.668402	2.668402
9	2.668402	2.668402
10	2.668402	2.668402

ニュートンの逐次近似法（多変数の場合）
ニュートン-ラフソン法

$f(x,y)=0,\ g(x,y)=0$ の連立方程式の解を初期値をx_1, y_1として逐次近似計算で求める方法を考える。
まず､1 変数の場合を別の見方で見てみる。

$f(x)=0$ の解を求めるのであるが、

$f(x+dx)-f(x)=f'(x)dx$ から、

$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x\cdots$③

$\Delta x = x_n - x_{n-1}\cdots$④

初期値 x_1 から出発して、x_{n-1} に達し、x_{n-1} に修正値 Δx を加えた x_n を新しい近似値 x_n で $f(x_{n-1}+\Delta x)\approx 0$ になったとする。すると、③式から、

$0\approx f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})\Delta x$

$$\therefore \Delta x = x_n - x_{n-1}\approx -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$\therefore x_n \approx x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$x_n \approx x_{n-1}-\left[f'(x_{n-1})\right]^{-1} f(x_{n-1})\cdots$⑤

これは②式と同等である。

次に、$f(x,y)=0,\ g(x,y)=0$ の連立方程式を考える。$\partial f/\partial x = f_x,\ \partial f/\partial y = f_y$ 等と書いて、

$f(x+dx, y+dx)-f(x,y)$

$=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$ から、

$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$

$\approx f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx 0$ になると考えると

$-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y\cdots$⑥

同様にして、

$-g(x,y)\approx g_x(x,y)\Delta x+g_y(x,y)\Delta y\cdots$⑦

行列表示すると､(x,y)を省略して、

$$-\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

これから、

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_n - x_{n-1} \\ y_n - y_{n-1} \end{bmatrix}\approx -\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}\cdots⑧$$

この式は、一次元の場合の⑤式に相当する。

例題4

楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ と放物線 $y=x^2$ との交点の座標を求めよ。

[解]

$$f(x,y)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1$$

$$g(x,y)=x^2-y$$

と置く。

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{8},\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{9}$$

$$g_x=\frac{\partial g}{\partial x}=2x,\ g_y=\frac{\partial g}{\partial y}=-1$$

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} x/8 & 2y/9 \\ 2x & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{-1}{x/8+4xy/9}\begin{bmatrix} -1 & -2y/9 \\ -2x & x/8 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{72}{x(9+32y)}\begin{bmatrix} 1 & 2y/9 \\ 2x & -x/8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}\approx$$

$$\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}-\frac{72}{x_{n-1}(9+32y_{n-1})}\begin{bmatrix} 1 & 2y_{n-1}/9 \\ 2x_{n-1} & -x_{n-1}/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{n-1} \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$

第１象限の解を求めるため、$x_1=y_1=1$ として逐次計算する。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}-\frac{72}{41}\begin{bmatrix} 1 & 2/9 \\ 2 & -1/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -119/144 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}-\frac{72}{41}\begin{bmatrix} -119/144 \\ -238/144 \end{bmatrix}$$

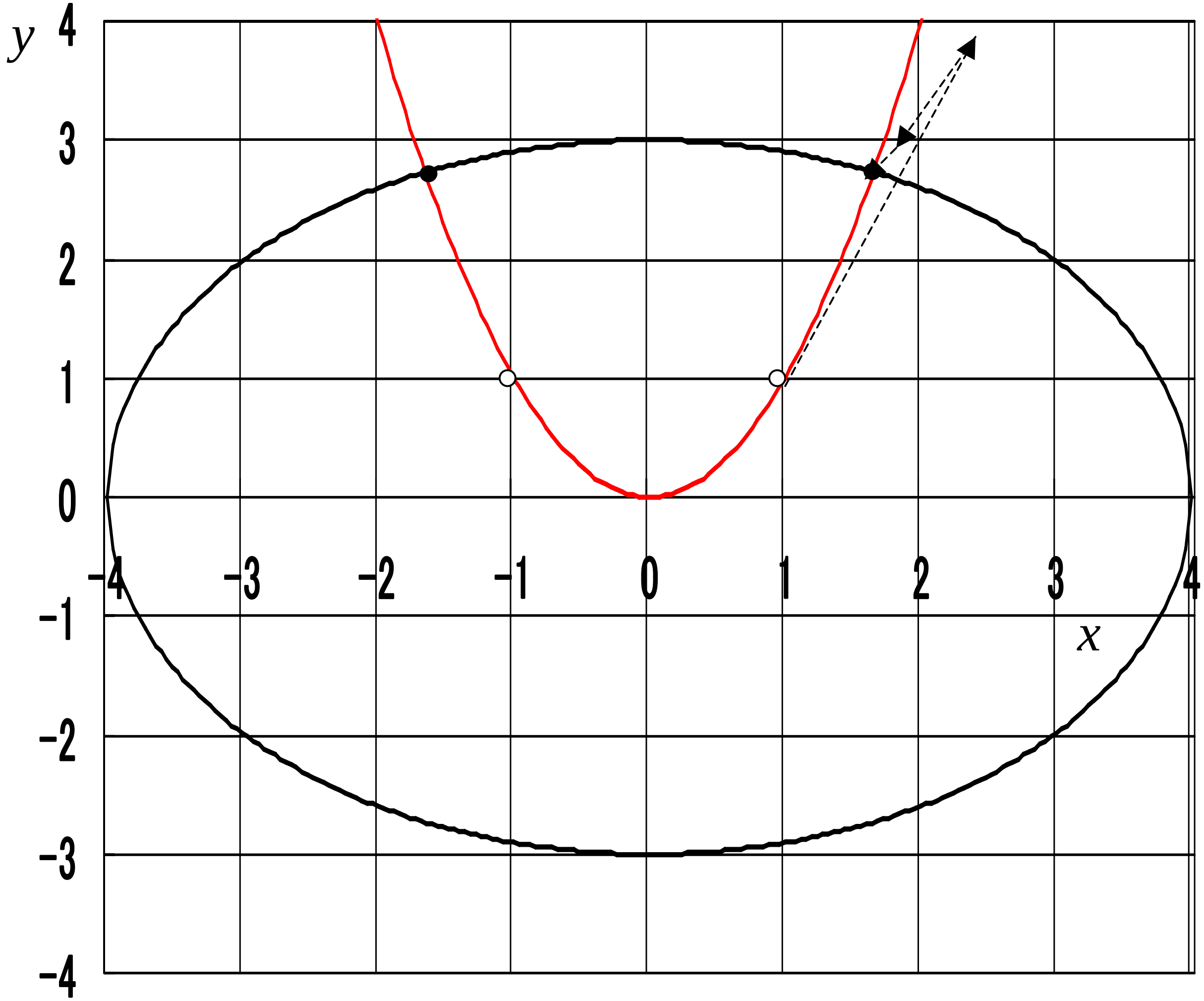
$$\approx\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1.451220 \\ -2.902439 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.451220 \\ 3.902439 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}-\frac{72}{x_2(9+32y_2)}\begin{bmatrix} 1 & 2y_2/9 \\ 2x_2 & -x_2/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

以下、プログラムを組んで計算した結果とグラフを次頁に示す。第２象限の解は、初期値を、$x_1=-1, y_1=1$ として得られる。

ニュートン-ラフソン法は、高次(非線形)多元連立方程式の近似解を得るのに便利である。ただし、初期値の選び方によっては収斂しない場合もある(接線とx軸が交差しない場合など)のでおよその見当をつけて始めるなど工夫が必要がある。

楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ と放物線 $y=x^2$ との交点の座標。



繰り返し回数	x	y
0	1	1
1	2.451220	3.902439
2	1.816266	2.895654
3	1.661361	2.736125
4	1.652870	2.731908
5	1.652847	2.731905
6	1.652847	2.731905
7	1.652847	2.731905
8	1.652847	2.731905
9	1.652847	2.731905

繰り返し回数	x	y
0	−1	1
1	−2.45122	3.902439
2	−1.81627	2.895654
3	−1.66136	2.736125
4	−1.65287	2.731908
5	−1.65285	2.731905
6	−1.65285	2.731905
7	−1.65285	2.731905
8	−1.65285	2.731905
9	−1.65285	2.731905

例題５

楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ と放物線 $y=x^2-x$

との交点の座標を求めよ。

[解]

$$f(x,y)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1$$

$$g(x,y)=x^2-x-y$$

と置く。

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{8},\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{9}$$

$$g_x=\frac{\partial g}{\partial x}=2x-1,\ g_y=\frac{\partial g}{\partial y}=-1$$

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} x/8 & 2y/9 \\ 2x-1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{-1}{x/8+(4xy-2y)/9}\begin{bmatrix} -1 & -2y/9 \\ -2x+1 & x/8 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{72}{9x+32xy-16y}\begin{bmatrix} 1 & 2y/9 \\ 2x-1 & -x/8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}-\frac{72}{9x_{n-1}+32x_{n-1}y_{n-1}-16y_{n-1}}\begin{bmatrix} 1 & 2y_{n-1}/9 \\ 2x_{n-1}-1 & -x_{n-1}/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{n-1} \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$

第１象限の解を求めるため、$x_1=y_1=1$

として逐次計算する。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}-\frac{72}{25}\begin{bmatrix} 1 & 2/9 \\ 1 & -1/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -119/144 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}-\frac{72}{25}\begin{bmatrix} -119/144-2/9 \\ -119/144+1/8 \end{bmatrix}$$

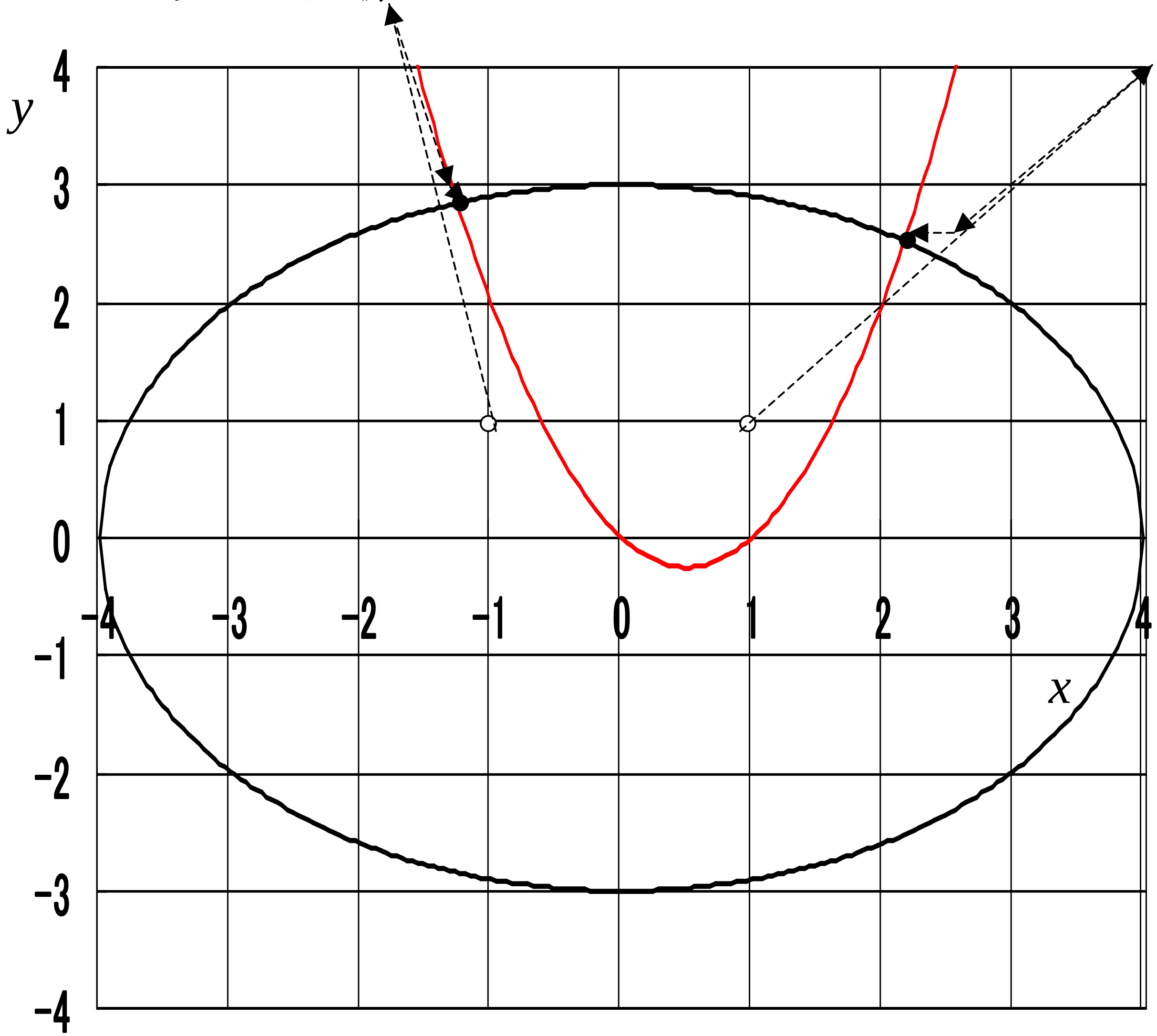
$$\approx\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -3.02 \\ -2.02 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4.02 \\ 3.02 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}-\frac{72}{9x_2+32x_2y_2-16y_2}\begin{bmatrix} 1 & 2y_2/9 \\ 2x_2-1 & -x_2/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

以下、プログラムを組んで計算した結果とグラフを次頁に示す。第２象限の解は、初期値を、$x_1=-1, y_1=1$として得られる。

楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ と放物線 $y=x^2-x$

との交点の座標



繰り返し回数	x	y
0	1	1
1	4.020000	3.020000
2	2.653243	2.518433
3	2.219166	2.517111
4	2.165922	2.522462
5	2.165095	2.522540
6	2.165094	2.522540
7	2.165094	2.522540
8	2.165094	2.522540
9	2.165094	2.522540

繰り返し回数	x	y
0	−1	1
1	−1.763158	4.289474
2	−1.367596	3.081444
3	−1.265322	2.855901
4	−1.259926	2.847309
5	−1.259914	2.847296
6	−1.259914	2.847296
7	−1.259914	2.847296
8	−1.259914	2.847296
9	−1.259914	2.847296

さらに多次元(多変数)の場合

方程式と未知数の数をそれぞれm とする。
変数を$x_i, i=1,2,3,,,m,$ それらの n 回目の近似値を ${}^n x_i$ で表す。
関数を ${}^n f_i$ 、その変数${}^n x_j$ での偏微分を ${}^n f_{ij}$ で表す。
前節のx_n は${}^n x_1$, y_n は ${}^n x_2$ となる。

前節の2次元の形から推定して 以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} {}^n x_1 \\ {}^n x_2 \\ \\ \\ {}^n x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{n-1} x_1 \\ {}^{n-1} x_2 \\ \\ \\ {}^{n-1} x_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{n-1} f_{11} & {}^{n-1} f_{12} & & {}^{n-1} f_{1m} \\ {}^{n-1} f_{21} & {}^{n-1} f_{22} & & {}^{n-1} f_{2m} \\ \\ \\ {}^{n-1} f_{m1} & {}^{n-1} f_{m2} & & {}^{n-1} f_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} {}^{n-1} f_1 \\ {}^{n-1} f_2 \\ \\ \\ {}^{n-1} f_m \end{bmatrix}$$

これを、集約的に次の ように表現する。

$${}^n \mathbf{x} = {}^{n-1}\mathbf{x} - {}^{n-1}\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1} {}^{n-1}\mathbf{f},$$ 初期値 ${}^1\mathbf{x}$ から始め、$\max\left|{}^n\mathbf{x} - {}^{n-1}\mathbf{x}\right| < \varepsilon$ で終了。

ニュートン -ラフソン法は、高次 (非線形)多元連立方程式の解法
として多用され、特に 三角関数を含む電力系 統の電圧、潮流計算
では日常的な使用ツー ルとなっている。
有限要素法で非線形問 題を扱うのにも用いら れる。
ニュートン -ラフソン法では、問題 の性質によっては初期 値の設定や、
収斂性を高めるためい ろいろな工夫が行われ ている。