

ニュートン-ラフソン法

非線形方程式の逐次近似による解法

ニュートンの逐次近似法(1変数の場合)

計算式、例題

ニュートンラフソン法(多変数の場合)

計算式

ニュートンの逐次近似法 (1変数の場合)

右上図のような x の関数 $f(x)$ があるとき $f(x)=0$ の解を求めることを考える。

この図では、 $f(x)=0$ の解すなわち、 $f(x)$ と x 軸との交点は、 x_a, x_b, x_c と3個あるが、まず、 x_b を求めるニュートン法を示す。

step 1. x_b の近傍の任意の数値 x_1 を選ぶ。

step 2. $f(x)$ の $x = x_1$ における微分値 $f'(x_1)$ を求める。

step 3. 点 $p_1(x_1, f(x_1))$ を通り、勾配が $f'(x_1)$ である直線、つまり p_1 における接線が x 軸と交わる点 x_2 を求める。

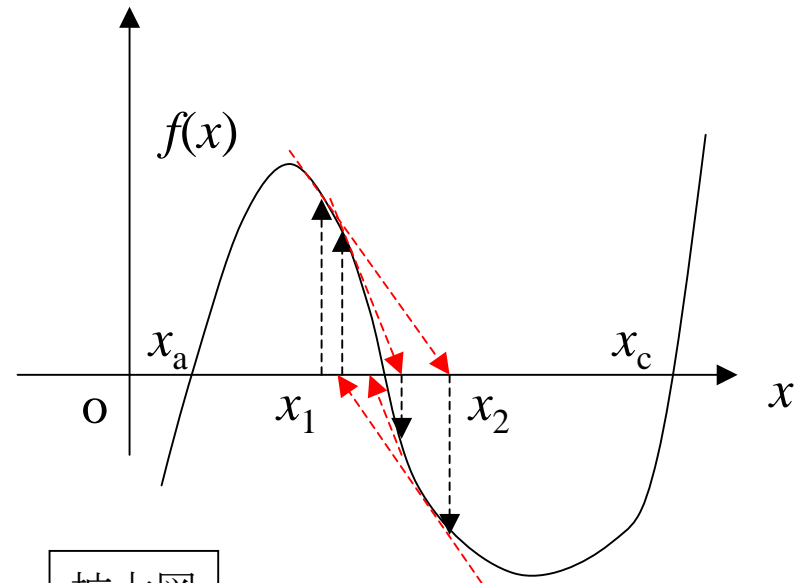
step 4. $f(x)$ の $x = x_2$ における微分値 $f'(x_2)$ を求める。

step 5. 点 $p_2(x_2, f(x_2))$ を通り、勾配が $f'(x_2)$ である直線、つまり p_2 における接線が x 軸と交わる点 x_3 を求める。

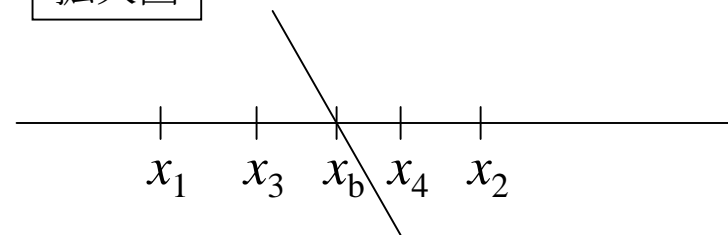
step 6. $f(x)$ の $x = x_3$ における微分値 $f'(x_3)$ を求める。

step 7. 点 $p_3(x_3, f(x_3))$ を通り、勾配が $f'(x_3)$ である直線、つまり p_3 における接線が x 軸と交わる点 x_4 を求める。……以下同様

ニュートン法



拡大図



左に示した繰り返し計算を続けることにより x_b の近似値 x_n を求める。 $|x_n - x_{n-1}|$ が所定の数値 (精度) 以下になったら終わる。

図からも明らかのように、出発点の数値によっては、 x_a や x_c に到達することもあり、グラフなどで確かめる場合もある。

計算式 1

$x = x_1$ における接線が、 $x = x_2$ で x 軸と交わるので、その方程式は、

$$\frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

これから、

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad n \text{ 回目の計算では、}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \dots \textcircled{1}, \quad \text{これはまた、}$$

$$x^{\text{new}} = x^{\text{old}} - \frac{f(x^{\text{old}})}{f'(x^{\text{old}})} \dots \textcircled{2} \quad \text{と書くこともできる。}$$

例題1

$\sqrt{19}$ を求めよ。

[解]

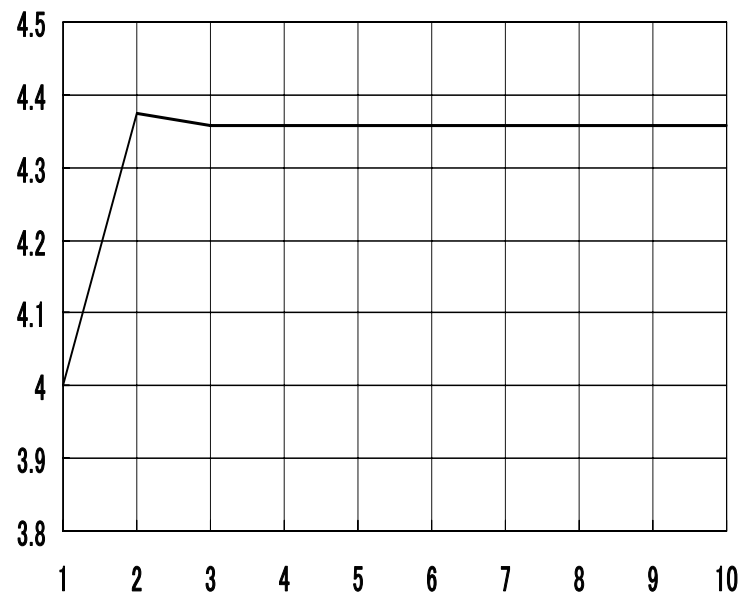
$f(x) = x^2 - 19$ と置く。

$$f'(x) = 2x$$

$$\therefore x^{\text{new}} = x^{\text{old}} - \frac{(x^{\text{old}})^2 - 19}{2x^{\text{old}}} = \frac{1}{2} \left(x^{\text{old}} + \frac{19}{x^{\text{old}}} \right)$$

$x^{\text{old}} = 4$ として順次計算する。

結果は、右の図、表の通りで、3回目には0.000001の精度に到達している。



n	xold	xnew
1	4	4.375
2	4.375	4.358929
3	4.358929	4.358899
4	4.358899	4.358899
5	4.358899	4.358899
6	4.358899	4.358899
7	4.358899	4.358899
8	4.358899	4.358899
9	4.358899	4.358899
10	4.358899	4.358899

例題2

例題1を正の数Aの平方根を求める式に修正せよ。

[解]

$$x^{new} = \frac{1}{2} \left(x^{old} + \frac{A}{x^{old}} \right)$$

x^{old} の初期値は、概算値を代入する。

例題3

正の数Aの3乗根を求める式を作れ。

[解]

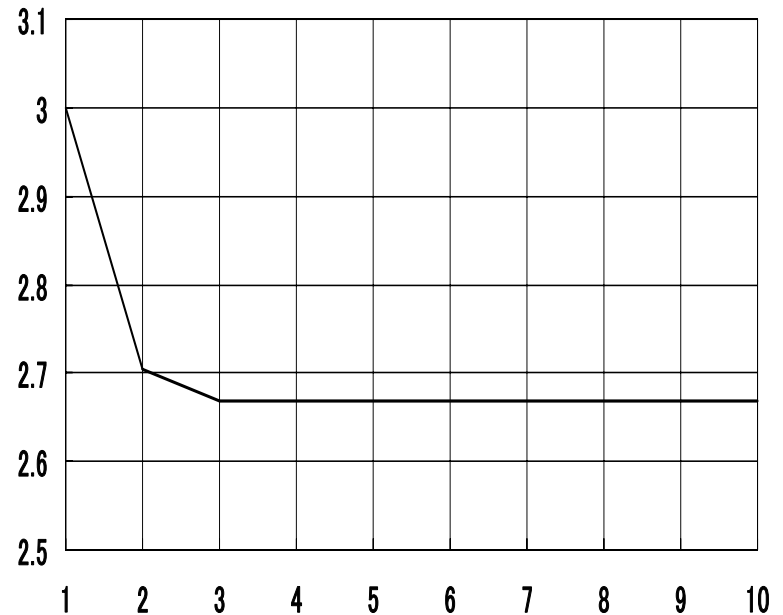
$$f(x) = x^3 - A \text{ と置く。}$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\therefore x^{new} = x^{old} - \frac{(x^{old})^3 - A}{3(x^{old})^2}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ 2x^{old} + \frac{A}{(x^{old})^2} \right\}$$

A=19, 初期値を3として10回まで計算した結果を右の図、表に示す。



n	xold	xnew
1	3	2.703704
2	2.703704	2.668861
3	2.668861	2.668402
4	2.668402	2.668402
5	2.668402	2.668402
6	2.668402	2.668402
7	2.668402	2.668402
8	2.668402	2.668402
9	2.668402	2.668402
10	2.668402	2.668402

ニュートンの逐次近似法(多変数の場合)
 ニュートン-ラフソン法

$f(x, y)=0, g(x, y)=0$ の連立方程式の解を初期値を x_1, y_1 として逐次近似計算で求める方法を考える。

まず、1変数の場合を別の見方で見てみる。

$f(x)=0$ の解を求めるのであるが、
 $f(x+dx)-f(x)=f'(x)dx$ から、
 $f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x \dots \textcircled{3}$

$$\Delta x = x_n - x_{n-1} \dots \textcircled{4}$$

初期値 x_1 から出発して、 x_{n-1} に達し、
 x_{n-1} に修正値 Δx を加えた x_n を新しい
 近似値 x_n で $f(x_{n-1}+\Delta x) \approx 0$ になったと
 する。すると、 $\textcircled{3}$ 式から、

$$0 \approx f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})\Delta x$$

$$\therefore \Delta x = x_n - x_{n-1} \approx -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$\therefore x_n \approx x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_n \approx x_{n-1} - [f'(x_{n-1})]^{-1} f(x_{n-1}) \dots \textcircled{5}$$

これは $\textcircled{2}$ 式と同等である。

次に、 $f(x, y)=0, g(x, y)=0$ の連立方程式を
 考える。 $\partial f / \partial x = f_x, \partial f / \partial y = f_y$ 等と書いて、

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy \text{ から、}$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \approx f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx 0 \text{ になると考えると } -f(x, y) \approx f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y \dots \textcircled{6}$$

同様にして、

$$-g(x, y) \approx g_x(x, y)\Delta x + g_y(x, y)\Delta y \dots \textcircled{7}$$

行列表示すると、 (x, y) を省略して、

$$-\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

これから、

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n - x_{n-1} \\ y_n - y_{n-1} \end{bmatrix} \approx -\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \dots \textcircled{8}$$

この式は、一次元の場合の $\textcircled{5}$ 式に相当する。

例題4

楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ と放物線 $y = x^2$ との交点の座標を求めよ。

[解]

$$f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1$$

$$g(x, y) = x^2 - y$$

と置く。

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{8}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{9}$$

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y} = -1$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} x/8 & 2y/9 \\ 2x & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{-1}{x/8 + 4xy/9} \begin{bmatrix} -1 & -2y/9 \\ -2x & x/8 \end{bmatrix} \\ &= \frac{72}{x(9+32y)} \begin{bmatrix} 1 & 2y/9 \\ 2x & -x/8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \frac{72}{x_{n-1}(9+32y_{n-1})} \begin{bmatrix} 1 & 2y_{n-1}/9 \\ 2x_{n-1} & -x_{n-1}/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$

第1象限の解を求めるため、 $x_1 = y_1 = 1$ として逐次計算する。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{72}{41} \begin{bmatrix} 1 & 2/9 \\ 2 & -1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -119/144 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{72}{41} \begin{bmatrix} -119/144 \\ -238/144 \end{bmatrix}$$

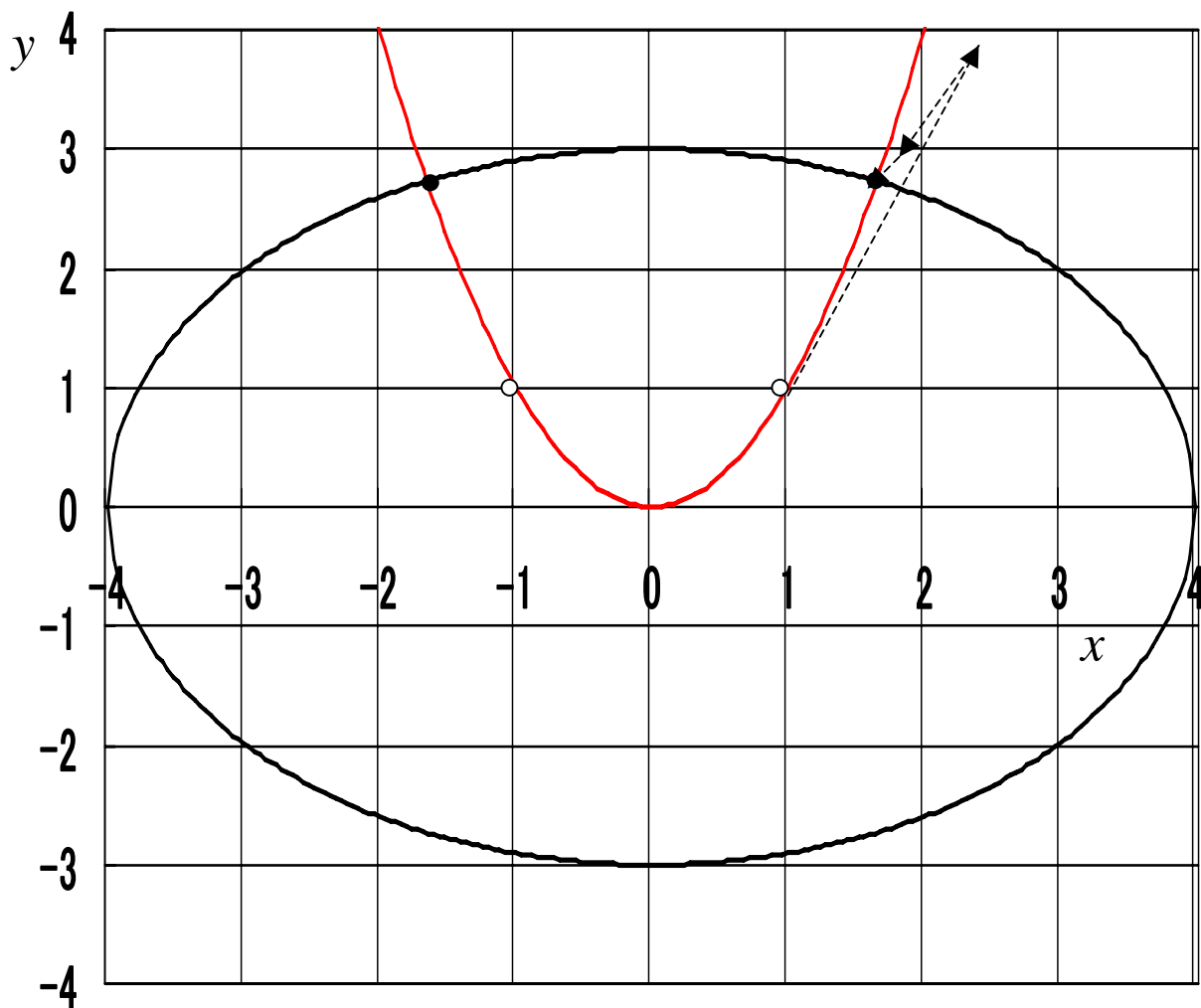
$$\approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.451220 \\ -2.902439 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.451220 \\ 3.902439 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \frac{72}{x_2(9+32y_2)} \begin{bmatrix} 1 & 2y_2/9 \\ 2x_2 & -x_2/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

以下、プログラムを組んで計算した結果とグラフを次頁に示す。第2象限の解は、初期値を、 $x_1 = -1, y_1 = 1$ として得られる。

ニュートン-ラフソン法は、高次(非線形)多元連立方程式の近似解を得るのに便利である。ただし、初期値の選び方によっては収斂しない場合もある(接線とx軸が交差しない場合など)なのでおおよその見当をつけて始めるなど工夫が必要がある。

楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ と放物線 $y = x^2$ との
交点の座標。



繰り返し回数	x	y
0	1	1
1	2.451220	3.902439
2	1.816266	2.895654
3	1.661361	2.736125
4	1.652870	2.731908
5	1.652847	2.731905
6	1.652847	2.731905
7	1.652847	2.731905
8	1.652847	2.731905
9	1.652847	2.731905
繰り返し回数	x	y
0	-1	1
1	-2.45122	3.902439
2	-1.81627	2.895654
3	-1.66136	2.736125
4	-1.65287	2.731908
5	-1.65285	2.731905
6	-1.65285	2.731905
7	-1.65285	2.731905
8	-1.65285	2.731905
9	-1.65285	2.731905

例題 5

楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ と放物線 $y = x^2 - x$ との交点の座標を求めよ。

[解]

$$f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1$$

$$g(x, y) = x^2 - x - y$$

と置く。

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{8}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{9}$$

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 1, \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y} = -1$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} x/8 & 2y/9 \\ 2x-1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{-1}{x/8 + (4xy - 2y)/9} \begin{bmatrix} -1 & -2y/9 \\ -2x+1 & x/8 \end{bmatrix} \\ &= \frac{72}{9x + 32xy - 16y} \begin{bmatrix} 1 & 2y/9 \\ 2x-1 & -x/8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} -$$

$$\frac{72}{9x_{n-1} + 32x_{n-1}y_{n-1} - 16y_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 2y_{n-1}/9 \\ 2x_{n-1} - 1 & -x_{n-1}/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$

第1象限の解を求めるため、 $x_1 = y_1 = 1$ として逐次計算する。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{72}{25} \begin{bmatrix} 1 & 2/9 \\ 1 & -1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -119/144 \\ -1 \end{bmatrix}$$

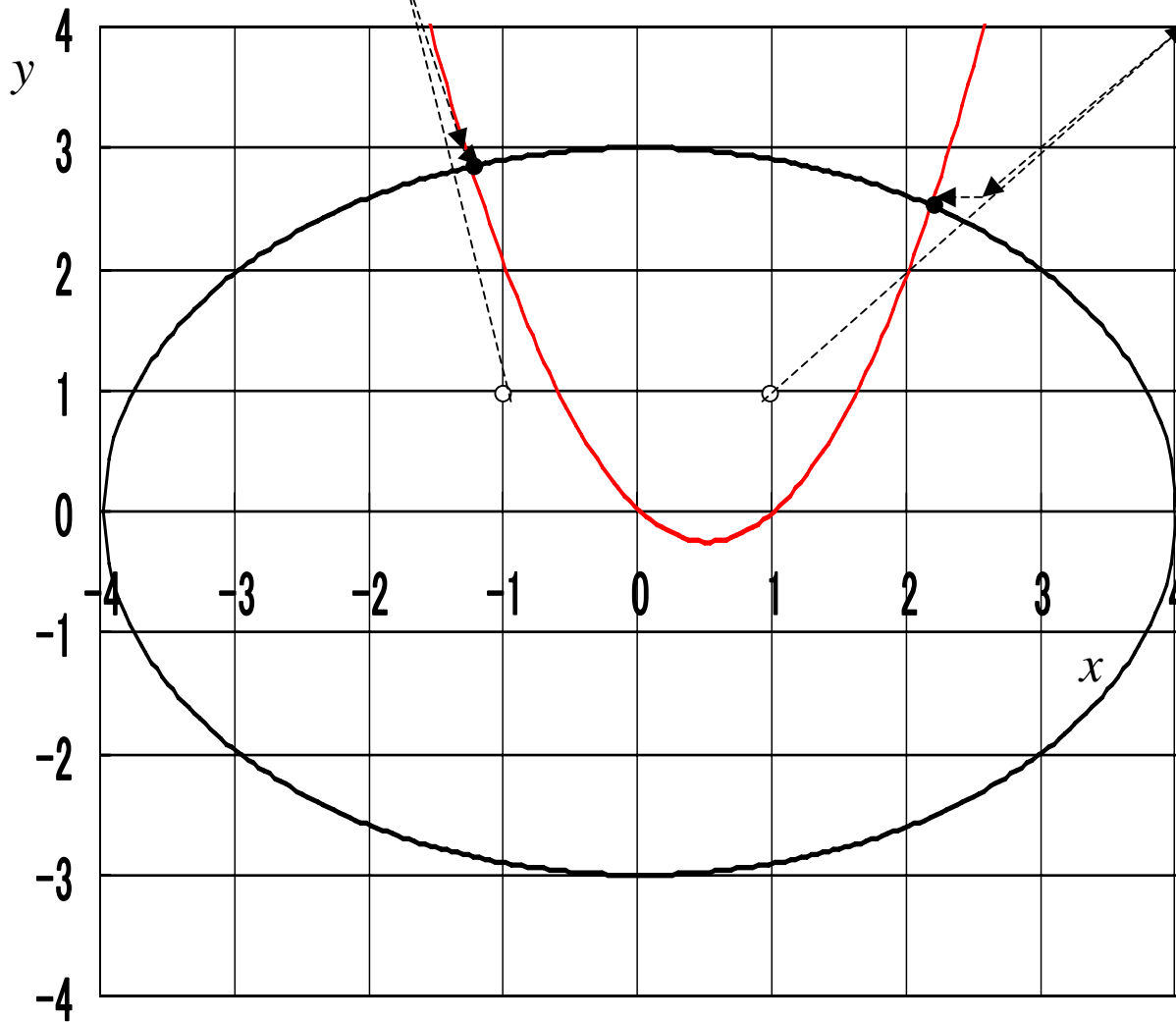
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{72}{25} \begin{bmatrix} -119/144 - 2/9 \\ -119/144 + 1/8 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.02 \\ -2.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.02 \\ 3.02 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \frac{72}{9x_2 + 32x_2y_2 - 16y_2} \begin{bmatrix} 1 & 2y_2/9 \\ 2x_2 - 1 & -x_2/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

以下、プログラムを組んで計算した結果とグラフを次頁に示す。第2象限の解は、初期値を、 $x_1 = -1, y_1 = 1$ として得られる。

楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ と放物線 $y = x^2 - x$
との交点の座標



繰り返し回数	x	y
0	1	1
1	4.020000	3.020000
2	2.653243	2.518433
3	2.219166	2.517111
4	2.165922	2.522462
5	2.165095	2.522540
6	2.165094	2.522540
7	2.165094	2.522540
8	2.165094	2.522540
9	2.165094	2.522540

繰り返し回数	x	y
0	-1	1
1	-1.763158	4.289474
2	-1.367596	3.081444
3	-1.265322	2.855901
4	-1.259926	2.847309
5	-1.259914	2.847296
6	-1.259914	2.847296
7	-1.259914	2.847296
8	-1.259914	2.847296
9	-1.259914	2.847296

さらに多次元(多変数)の場合

方程式と未知数の数をそれぞれ m とする。

変数を $x_i, i=1,2,3,\dots,m$, それらの n 回目の近似値を ${}^n x_i$ で表す。

関数を ${}^n f_i$ 、その変数 ${}^n x_j$ での偏微分を ${}^n f_{ij}$ で表す。

前節の x_n は ${}^n x_1$, y_n は ${}^n x_2$ となる。

前節の2次元の形から推定して 以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} {}^n x_1 \\ {}^n x_2 \\ \vdots \\ {}^n x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{n-1} x_1 \\ {}^{n-1} x_2 \\ \vdots \\ {}^{n-1} x_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{n-1} f_{11} & {}^{n-1} f_{12} & \dots & {}^{n-1} f_{1m} \\ {}^{n-1} f_{21} & {}^{n-1} f_{22} & \dots & {}^{n-1} f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{n-1} f_{m1} & {}^{n-1} f_{m2} & \dots & {}^{n-1} f_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} {}^{n-1} f_1 \\ {}^{n-1} f_2 \\ \vdots \\ {}^{n-1} f_m \end{bmatrix}$$

これを、集約的に次のように表現する。

$${}^n \mathbf{x} = {}^{n-1} \mathbf{x} - \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} {}^{n-1} \mathbf{f}, \text{ 初期値 } {}^1 \mathbf{x} \text{ から始め、} \max |{}^n \mathbf{x} - {}^{n-1} \mathbf{x}| < \varepsilon \text{ で終了。}$$

ニュートン-ラフソン法は、高次(非線形)多元連立方程式の解法として多用され、特に三角関数を含む電力系統の電圧、潮流計算では日常的な使用ツールとなっている。

有限要素法で非線形問題を扱うのにも用いられる。

ニュートン-ラフソン法では、問題の性質によっては初期値の設定や、収斂性を高めるためいろいろな工夫が行われている。