

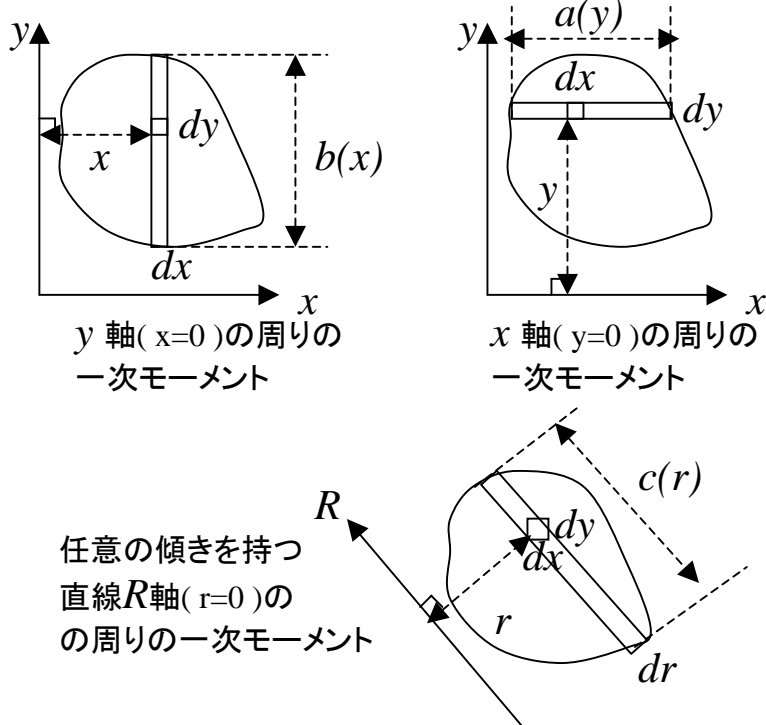
断面図形の持つ力学的性質と 棒の曲げ、ねじり

物体の曲げやねじりなどに対する応力や歪みなどを調べるための
前段階として梁の断面などの平面図形の持つ力学的性質を調べる。

1. 断面一次モーメント、
 図心の座標,重心の座標
2. 断面二次モーメント、主軸、二次半径
 - 2-1. 断面二次モーメント
 - 2-2. 断面の主軸と断面二次半径
 - 2-3. 断面二次モーメントの応用例 梁の曲げ
3. 円形断面棒のねじり
4. (参考) 慣性モーメント、回転半径

断面図形の持つ力学的性質

1. 断面一次モーメント、図心



図のような平面図形があるとき、平面上の任意の直線を軸として一次モーメントを次のように定義する。 $(\int_A$ は、図形の全面積にわたる積分の意味である)

R 軸の周り： $G_r = \int_A r dx dy = \int_A rc(r) dr$

y 軸の周り

$$G_y = \int_A x dx dy = \int_A x b(x) dx$$

x 軸の周り

$$G_x = \int_A y dx dy = \int_A y a(y) dy$$

図心の座標

図形の面積 S は、 $S = \int_A dx dy$ である。

m, n を次のように求めると、座標 (m, n) は図心の位置を表す。

$$m = \frac{G_{x0}}{S} = \frac{\int_A x dx dy}{\int_A dx dy}, \quad n = \frac{G_{y0}}{S} = \frac{\int_A y dx dy}{\int_A dx dy}$$

このとき、

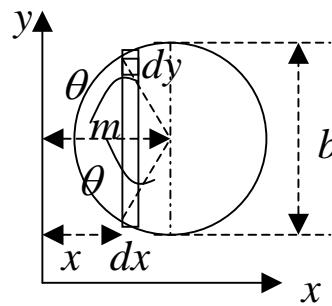
$$0 = G_{x0} - mS = \int_A x dx dy - m \int_A dx dy = \int_A (x - m) dx dy$$

同様にして、

$$0 = G_{y0} - nS = \int_A y dx dy - n \int_A dx dy = \int_A (y - n) dx dy$$

上式から、 $x = m$, および $y = n$ の周りの一次モーメントは 0 であることがわかる。すなわち、図心を通る軸に対する一次モーメントは 0 である。

例1. 円形断面の図心



円を次のように表す。

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

$$\rightarrow y = n \pm \sqrt{r^2 - (x-m)^2}$$

$$\therefore b(x) = 2\sqrt{r^2 - (x-m)^2}$$

$$G_y = 2 \int_{m-r}^{m+r} x \sqrt{r^2 - (x-m)^2} dx$$

$x = m - r \cos \theta$ と置くと、

$$dx = r \sin \theta d\theta, \sqrt{r^2 - (x-m)^2} = r \sin \theta$$

$$G_y = 2 \int_0^\pi (m - r \cos \theta)(r \sin \theta)r \sin \theta d\theta$$

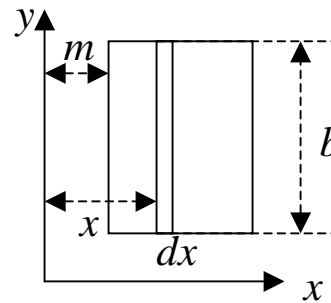
$$= 2 \left[mr^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta - r^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \right]$$

$$= 2 \left[mr^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos \theta}{2} d\theta - r^3 \int_0^0 t^2 dt \right]$$

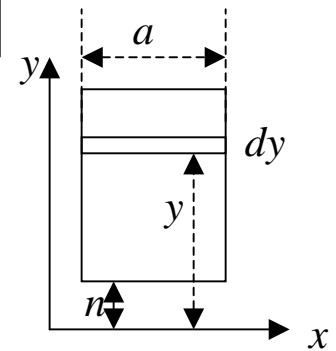
$$= 2 \left[mr^2 \left[\frac{\theta - \sin \theta}{2} \right]_0^\pi \right] = m\pi r^2 = mS$$

同様にして、 $G_x = n\pi r^2 = nS$ となり、図心は円の中心に一致する。

例2. 長方形断面の図心



y 軸の周りの
一次モーメント



x 軸の周りの
一次モーメント

$$\text{y軸の周り} : G_y = \int_m^{m+a} x b dx = b \left[\frac{x^2}{2} \right]_m^{m+a} = ab \left(m + \frac{a}{2} \right)$$

$$\text{x軸の周り} : G_x = \int_m^{m+a} y a dy = a \left[\frac{y^2}{2} \right]_n^{n+b} = ab \left(n + \frac{b}{2} \right)$$

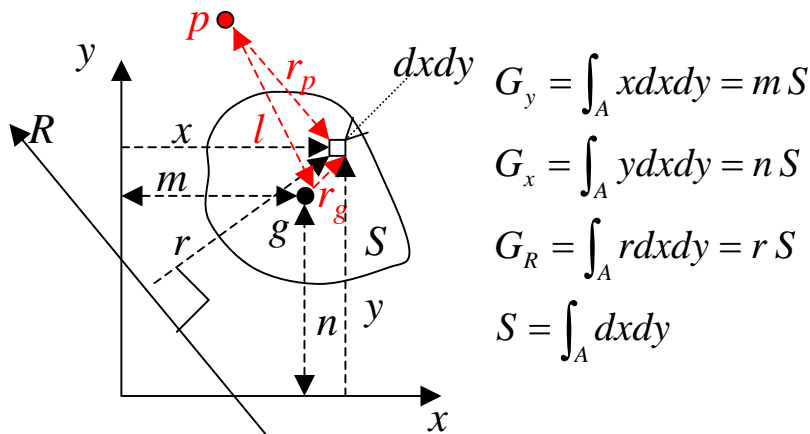
上記で、 $\left(m + \frac{a}{2}, n + \frac{b}{2} \right)$ は図心の座標であり、 ab は長方形の面積であるから、円の場合と同様、面積に図心と軸間の距離を乗じた値に等しいことが分かる。

図心では、 $G_x = 0, G_y = 0$ であるから、

$m = -a/2, n = -b/2$ 、すなわち原点に図心を置けば一次モーメントは0となる。

以上の例に見られるように、軸が図心から離れているとき、一次モーメントは、図心と軸との距離に全面積を掛けた値に等しい。

上記の円形、長方形の場合はその例である。一次モーメントは図心に全面積が集まった集中荷重によるモーメントに等しい。



$$G_y = \int_A x dx dy = m S$$

$$G_x = \int_A y dx dy = n S$$

$$G_R = \int_A r dx dy = r S$$

$$S = \int_A dx dy$$

(次節参照) 基準点 p が図心から離れているとき、 p の周りの二次モーメント I_p は、図心と p との距離 l の二乗に全面積 A を掛けた値に、図心の周りの二次モーメント I_g を加えた値に等しい。

$$I_g = \int_A r_g^2 dx dy$$

$$I_p = \int_A r_p^2 dx dy = l^2 S + I_g$$

参考 重心の座標

$\rho(x, y)$ を (x, y) における密度とすれば、図形の質量 M は、 $M = \int_A \rho dx dy$ である。 m', n' を次のように求めると、座標 (m', n') は重心の位置を表す。

$$m' = \frac{\int_A \rho x dx dy}{M}, \quad n' = \frac{\int_A \rho y dx dy}{M}$$

このとき、

$$0 = \int_A \rho x dx dy - m' M = \int_A \rho (x - m') dx dy$$

同様にして、

$$0 = \int_A \rho y dx dy - n' M = \int_A \rho (y - n') dx dy$$

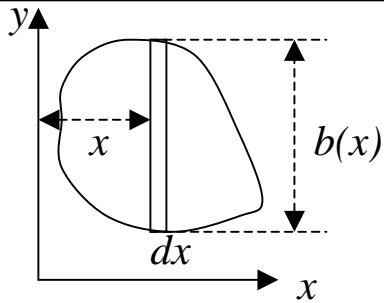
$\rho(x, y) = \rho$ 、すなわち、密度が一定であれば

$$M = \rho S, \quad \int_A \rho x dx dy = \rho \int_A x dx dy \text{ から、}$$

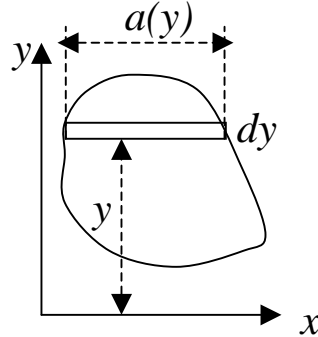
$m = m'$ 、同様に、 $n = n'$ すなわち、図心 = 重心になる。

2. 断面二次モーメント、主軸、二次半径

2-1. 断面二次モーメント



y 軸の周りの
二次モーメント



x 軸の周りの
二次モーメント

y 軸の周り

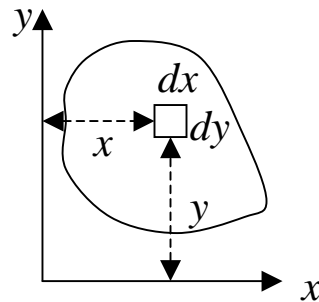
$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_A x^2 dx dy = \int_A x^2 b(x) dx$$

x 軸の周り

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 dx dy = \int_A y^2 a(y) dy$$

相乗モーメント

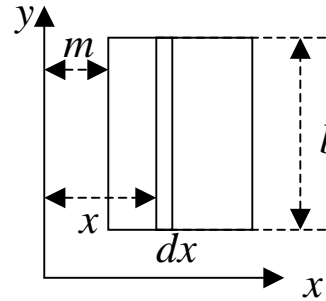
$$I_{xy} = \int_A xy dA = \iint_A xy dx dy$$



相乗モーメント

二次モーメントは、棒の曲げ応力、曲げ強度の
などの検討に使われる。

例1. 長方形の断面二次モーメント



y 軸の周りの
一次モーメント

y 軸の周り

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_m^{m+a} x^2 b dx = \frac{b}{3} [x^3]_m^{m+a}$$

$$= ab(m^2 + am + a^2/3)$$

$$= ab \left\{ (m + a/2)^2 + a^2/12 \right\}$$

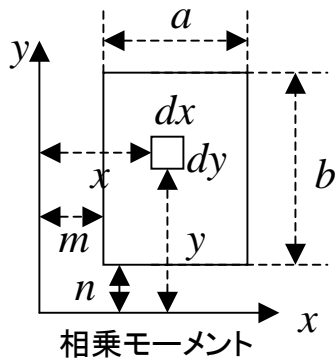
図心の座標を (x_0, y_0) とすれば、

$x_0 = m + a/2$, $y_0 = n + b/2$ であるから、
上式から、 m, n を消去して、

$$I_y = abx_0^2 + a^3b/12 = Ax_0^2 + I_Y \quad \text{同様にして、}$$

$$I_x = aby_0^2 + ab^3/12 = Ay_0^2 + I_X$$

$$I_Y = \frac{a^3b}{12}, I_X = \frac{ab^3}{12} \text{ は図心が原点の場合の値。}$$



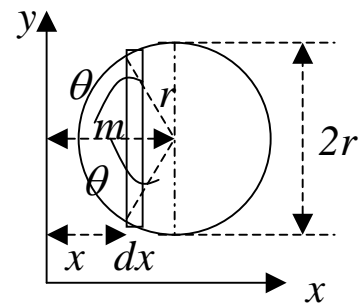
相乗モーメント

$$I_{xy} = \int_m^{m+a} \left(\int_n^{n+b} xy dy \right) dx = \int_m^{m+a} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_n^{n+b} dx$$

$$= b \left(n + \frac{b}{2} \right) \int_m^{m+a} x dx = ab \left(m + \frac{a}{2} \right) \left(n + \frac{b}{2} \right)$$

$$= S x_0 y_0 + 0, \quad I_{XY} = 0$$

例2. 円形の断面二次モーメント



(1) y軸の周りの I_y, I_Y

円の式を

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

とすると、

$$dA = \left\{ \left(n + \sqrt{r^2 - (x-m)^2} \right) - \left(n - \sqrt{r^2 - (x-m)^2} \right) \right\} dx$$

$$= 2\sqrt{r^2 - (x-m)^2} dx$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = 2 \int_{m-r}^{m+r} x^2 \sqrt{r^2 - (x-m)^2} dx$$

$$m-x = r \cos \theta \rightarrow dx = r \sin \theta d\theta$$

$$x^2 = m^2 - 2mr \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta$$

$$\sqrt{r^2 - (x-m)^2} = r \sin \theta$$

$$2x^2 \sqrt{r^2 - (x-m)^2} dx$$

$$= 2(m^2 - 2mr \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta) r^2 \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \left(2m^2 r^2 \sin^2 \theta - 4mr^3 \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{r^4 \sin^2 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$2m^2 r^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta$$

$$= m^2 r^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = m^2 \pi r^2$$

$$\int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = \int_0^0 t^2 dt = 0, \quad t = \sin \theta$$

$$\frac{r^4}{2} \int_0^\pi \sin^2 2\theta d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^\pi (1 - \cos 4\theta) d\theta$$

$$= \pi r^4 / 4 \rightarrow I_y = m^2 \pi r^2 + \pi r^4 / 4 = x_0^2 A + I_y$$

$$I_y = \pi r^4 / 4, x_0 = m, A = \pi r^2$$

x軸の周りの I_x, I_x

$x \rightarrow y, m \rightarrow n$ と置き換えて、

$$I_x = n^2 \pi r^2 + \pi r^4 / 4 = y_0^2 A + I_x$$

$$I_x = \pi r^4 / 4, y_0 = n, A = \pi r^2$$

相乗積 $I_{xy}, I_{xy} = 0$

$$I_{xy} = \int \int xy dy dx$$

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

$$y = n \pm \sqrt{r^2 - (x-m)^2} = y_1, y_2$$

$$I_{xy} = \int_{m-r}^{m+r} \left(x \int_{y_1}^{y_2} y dy \right) dx = \int_{m-r}^{m+r} x \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{2} dx$$

$$= \int_{m-r}^{m+r} x \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{2} dx$$

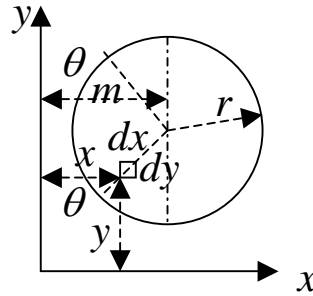
$$= 2n \int_{m-r}^{m+r} x \sqrt{r^2 - (x-m)^2} dx$$

$$x = m - r \cos \theta \rightarrow dx = r \sin \theta d\theta$$

$$\sqrt{r^2 - (x-m)^2} = r \sin \theta$$

$$I_{xy} = 2nr^2 \int_0^\pi (m - r \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta$$

$$I_{xy} = mn\pi r^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = mn\pi r^2, I_{xy} = 0$$



2-2. 断面の主軸と断面二次半径

断面2次相乗モーメントが0になる座標軸を
図形の主軸という。

図のように、図心Gを原点とするx-y座標系
を反時計式に θ だけ回転してx'-y'座標系に
なったとき、原点Gを通る軸に対する二次モ
ーメントは次のようになる。

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(I_y - I_x) \sin 2\theta$$

上式の導出は以下の通り。

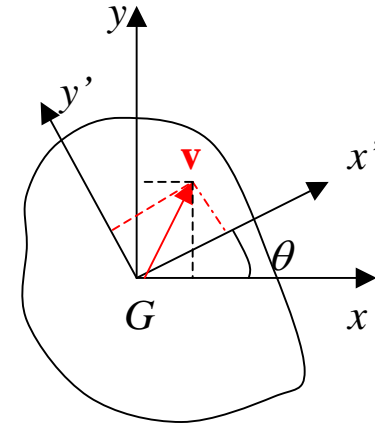
$$\mathbf{v} = x' + jy' = (x + jy) \varepsilon^{-j\theta} = (x \cos \theta - y \sin \theta) + j(x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$\text{から、} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$I_{x'} = \iint_A x'^2 dx' dy' = \iint_A x'^2 \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right| dx dy$$

$$\left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1,$$

$$x'^2 = (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 = x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta$$



$$x'^2 = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} x^2 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} y^2 - 2xy \sin \theta$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{y^2 - x^2}{2} \cos 2\theta - xy \sin 2\theta$$

$$\therefore I_{x'} = \iint_A x'^2 dx' dy' = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$y'^2 = (x \sin \theta + y \cos \theta)^2$$

$$= x^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 - x^2}{2} \cos 2\theta + xy \sin 2\theta$$

$$\therefore I_{y'} = \iint_A y'^2 dx' dy' = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$x' y' = (x \cos \theta - y \sin \theta)(x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$= xy(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (y^2 - x^2) \sin \theta \cos \theta$$

$$= xy \cos 2\theta - \frac{y^2 - x^2}{2} \sin 2\theta$$

$$\therefore I_{x'y'} = \iint_A x' y' dx dy = I_{xy} \cos 2\theta - \frac{I_y - I_x}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0 \text{ と } \frac{dI_{y'}}{d\theta} = 0 \text{ とは、ともに}$$

$$I_{xy} \cos 2\theta - \frac{I_y - I_x}{2} \sin 2\theta = 0 \text{ となり、}$$

$$I_{x'y'} = 0 \text{ と同じ式になる。}$$

(1) 断面の主軸

主軸は、 $\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$ のときである。このとき、 $I_{x'}$ 、 $I_{y'}$

の θ による微分が 0 で主軸の断面二次モーメントは最大または最小になる(左欄末尾参照)。

$$\cos 2\theta = \frac{I_y - I_x}{R}, \sin 2\theta = \frac{2I_{xy}}{R}, R = \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}$$

主軸の $x' \rightarrow \xi$, $y' \rightarrow \eta$ と書き直せば、

$$I_{\xi} = \frac{I_x + I_y}{2} - \left(\frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \right)$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2R} \left\{ (I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2 \right\}$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}$$

同様にして、

$$I_{\eta} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}$$

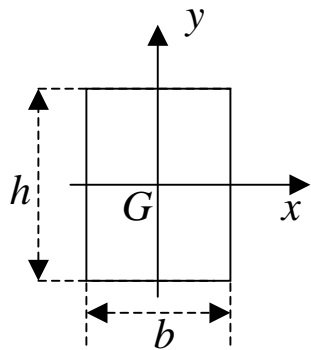
(2) 断面二次半径

断面主軸が ξ, η のとき、

$$R_{\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{A}}, R_{\eta} = \sqrt{\frac{I_{\eta}}{A}}$$

を、主軸に関する断面二次半径という。

例1. 長方形断面の主軸と断面二次半径

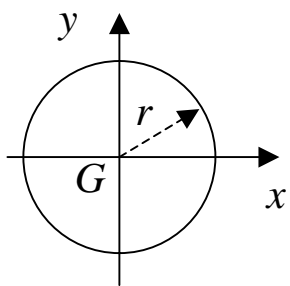


図の状態では $I_{xy} = 0$ であるから、主軸は $x = \varepsilon, y = \eta$ あるいは、 $x = \eta, y = -\xi$ など長方形の辺に平行な向きである。

断面二次半径は、

$$R_{\xi} = \sqrt{\frac{bh^3}{12hb}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}, R_{\eta} = \sqrt{\frac{hb^3}{12hb}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

例2. 円形断面の主軸と断面二次半径

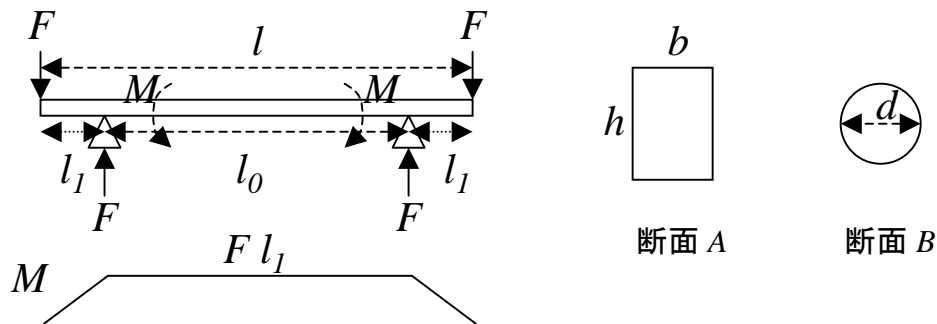


$x-y$ の向きに無関係に $I_{xy} = 0$ であるから、主軸の方向は任意である。
図心を原点とする直交座標系はすべて主軸になり得る。

断面二次半径は、

$$R_{\xi} = R_{\eta} = \sqrt{\frac{\pi r^4}{4\pi r^2}} = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}$$

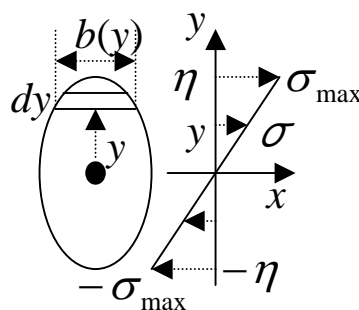
2-3 断面二次モーメントの応用例 水平梁の曲げ



上図のように、水平梁の l_0 部分に一定の曲げモーメント $M = Fl_1$ を受けている状態を考える。

水平梁の l_0 部分に生ずる応力は、左図の断面および応力分布図で、図心より上では引張り、下部では圧縮応力であり、その大きさは、最上部 $y = \eta$ で最大値 σ_{\max} 、最下部 $y = -\eta$ で $-\sigma_{\max}$ である。

$y = y$ では、 $\sigma = \sigma_{\max} \frac{y}{\eta}$ である。



断面の曲げモーメントは、

$$\int_{-\eta}^{\eta} y \sigma b(y) dy = \int_{-\eta}^{\eta} y \sigma_{\max} \frac{y}{\eta} b(y) dy = \frac{\sigma_{\max}}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} y^2 b(y) dy = \frac{\sigma_{\max}}{\eta} I_x$$

すなわち、つりあい条件は、 $M = \frac{\sigma_{\max}}{\eta} I_x$ となる。9

$M = \frac{\sigma_{\max}}{\eta} I_X$ が得られたのでこれを断面図形が

長方形の場合と、円形の場合(前頁右上の図)に適用してみる。

A: 長方形断面の場合

$$\eta = \frac{h}{2}, I_X = \frac{bh^3}{12},$$

$$\therefore M = \frac{\sigma_{\max} I_X}{\eta} = \frac{2\sigma_{\max} bh^3}{12h} = \frac{\sigma_{\max} bh^2}{6}$$

$$\sigma_{\max} = \text{許容応力とすれば、} M \leq \frac{\sigma_{\max} bh^2}{6}$$

とする必要がある。

B: 円形断面の場合

$$\eta = \frac{d}{2}, I_X = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64},$$

$$\therefore M = \frac{\sigma_{\max} I_X}{\eta} = \frac{2\sigma_{\max} \pi d^4}{64d} = \frac{\sigma_{\max} \pi d^3}{32}$$

$$\sigma_{\max} = \text{許容応力とすれば、} M \leq \frac{\sigma_{\max} \pi d^3}{32}$$

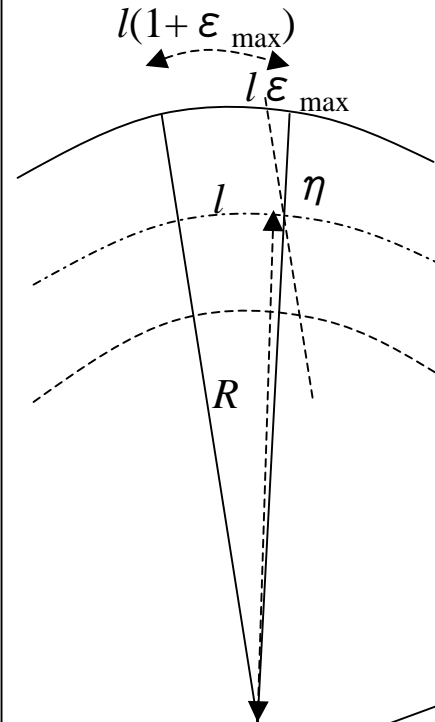
とする必要がある。

曲率半径

2-3の水平梁に曲げモーメントが加わったとき、円弧状になるが、下図から、その曲率半径 R は、

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\eta} = \frac{\sigma_{\max}}{\eta E} = \frac{M}{I_X E}$$

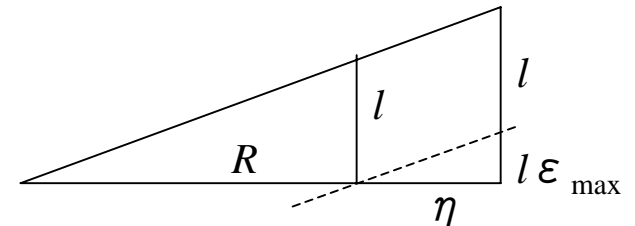
として求められることが分かる。



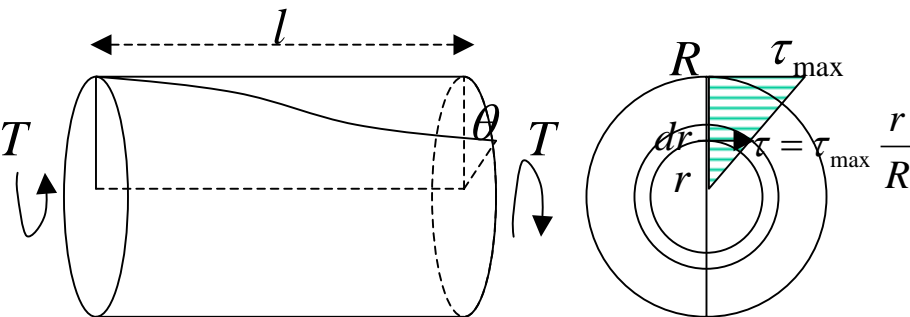
$$\frac{l}{R} \approx \frac{l\varepsilon_{\max}}{\eta} \rightarrow \frac{1}{R} \approx \frac{\varepsilon_{\max}}{\eta} = \frac{\sigma_{\max}}{E\eta}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\eta M}{I_X} \text{ を代入して、}$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{\varepsilon_{\max}}{\eta} = \frac{\sigma_{\max}}{E\eta} = \frac{M}{I_X E}$$



3. 円形断面棒(実質丸棒)のねじり



せん断応力が最大となる棒表面の値を τ_{\max} とし、ねじりモーメントのバランスから、

$$T = \int_0^R r \tau (2\pi r dr) = \frac{2\pi\tau_{\max}}{R} \int_0^R r^3 dr \left(= \frac{\tau_{\max} I_p}{R} \right)$$

$$= \frac{\tau_{\max} \pi R^4}{2R} = \frac{\tau_{\max} \pi R^3}{2} = \frac{\tau_{\max} \pi D^3}{16}, \quad D = 2R$$

$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr$ をねじり断面二次モーメント(=次頁 $\rho = 1$ での慣性モーメント)、

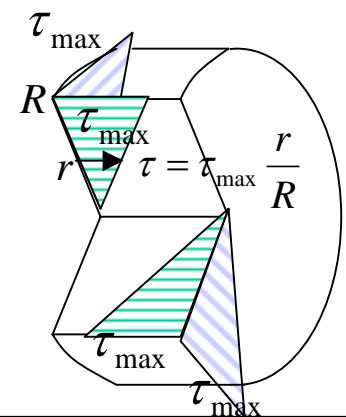
$Z_p = \frac{\pi D^3}{16}$ を、ねじり断面係数という。

Z_p を用いれば、 $T = \tau_{\max} Z_p$ となる。

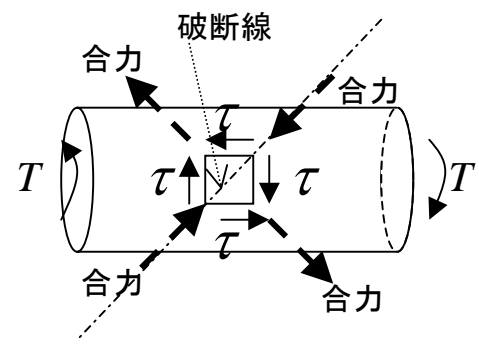
$\tau_{\max} Z_p$ を棒のねじり抵抗モーメントという。

ねじり角 θ は $R\theta = l\tau_{\max} / G$ から、 $\theta = \frac{l\tau_{\max}}{RG}$

である。 G はせん断弾性係数 $G = \tau / \gamma$ である。



丸棒に作用するねじり応力



表面小正方形のねじり応力

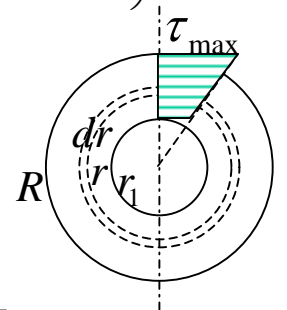
3-2. 円形断面棒(中空丸棒)のねじり

3と同様にして、次を得る。

$$T = \int_{r_1}^R r 2\pi r dr \frac{r}{r} \tau_{\max} = \frac{2\pi\tau_{\max}}{r} \int_{r_1}^R r^3 dr \left(= \frac{\tau_{\max} I_p}{R} \right)$$

$$= \left[\frac{\tau_{\max} \pi r^4}{2R} \right]_{r_1}^R = \frac{\tau_{\max} \pi (R^4 - r_1^4)}{2R}$$

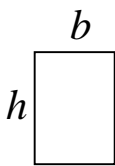
$$= \frac{\tau_{\max} \pi D^3 (1 - n^4)}{16}, \quad n = \frac{r_1}{R}$$



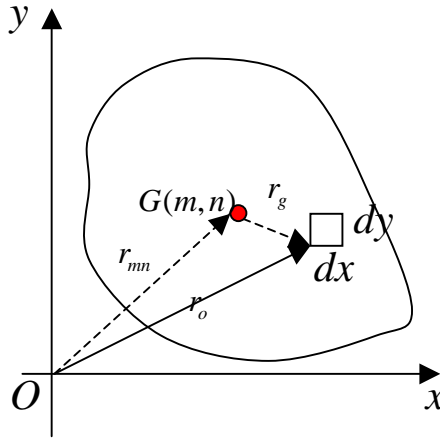
$$Z_p = \frac{\pi D^3 (1 - n^4)}{16}, \quad T = \tau_{\max} Z_p, \quad \theta = \frac{l\tau_{\max}}{RG}$$

3-3. 長方形断面棒のねじり

$$\tau_{\max} = F \cdot \frac{8T}{b^2 h}, \quad b < h \text{ で、} \tau_{\max} \text{ は } h \text{ の中央、} F = f\left(\frac{h}{b}\right).$$



4. (参考) 慣性モーメント、回転半径



ある基準点(ここでは原点 O)からの距離の2乗にその点の微小質量 dm を乗じて断面全体について積分した値を慣性モーメントという。
密度 ρ を一定とすれば、 $dm = \rho dx dy$ である。

$$\begin{aligned} I_o &= \int_A \rho r_o^2 dA = \int_A \rho (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_A \rho \{ (x-m)^2 + (y-n)^2 + 2m(x-m) + 2n(y-n) + m^2 + n^2 \} dx dy \\ &= \int_A \rho \{ (x-m)^2 + (y-n)^2 + m^2 + n^2 \} dx dy \\ &\quad + 2m \int_A \rho (x-m) dx dy + 2n \int_A \rho (y-n) dx dy \end{aligned}$$

重心の定義から、最後の2項は0

$$\therefore I_o = \int_A \rho r_g^2 dx dy + \int_A \rho r_{mn}^2 dx dy = I_g + Mr_{mn}^2$$

$$M = \int_A \rho dx dy = \text{全質量}$$

すなわち、ある基準点に対する慣性モーメント I は、「重心の周りの I_g 」+「重心に全質量が集まった時のモーメント $I = Mr_{mn}^2$ 」

$I = MK^2$ となる R を回転半径という。

$$K = \sqrt{I/M}$$

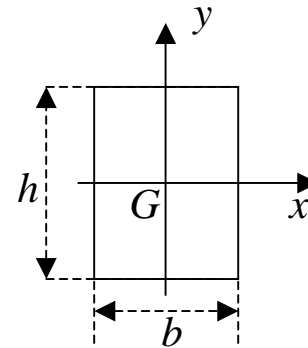
密度 ρ が一定のときは、

$$I_o / \rho = \int_A r_g^2 dx dy + \int_A r_{mn}^2 dx dy = I_g + Ar_{mn}^2$$

$$I_g / \rho = \int_A r_g^2 dx dy = \int_A \{ (x-m)^2 + (y-n)^2 \} dx dy = I_x + I_y$$

$$K = \sqrt{(I_x + I_y) / A}$$

例1. 長方形断面で ρ が一定のとき

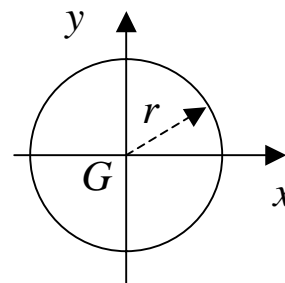


$$I_g / \rho = I_x + I_y = \frac{h^3 b}{12} + \frac{h b^3}{12}$$

$$= \frac{A(h^2 + b^2)}{12}$$

$$K = \sqrt{\frac{h^2 + b^2}{12}}$$

例2. 円形断面で ρ が一定のとき



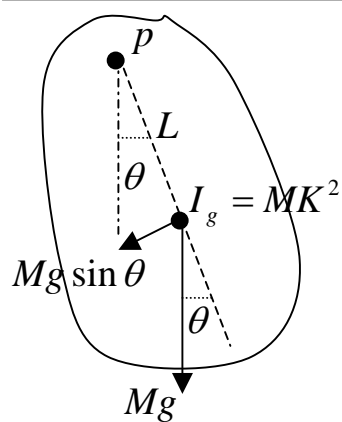
$$I_g / \rho = I_x + I_y = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$= \frac{Ar^2}{2}$$

$$K = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

慣性モーメントは、剛体の運動の解析などに使用される。
(基礎編、物理、剛体の運動参照)

剛体振り子(pを支点とする振り子)



$$I_g = MK^2$$

$$I = ML^2 + MK^2$$

運動方程式は、

$$-MgL \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$t=0$ で、 $\theta = \theta_0, d\theta/dt = 0$

$\sin \theta \approx \theta, (\theta \approx 0)$ として、

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{MgL}{I} \theta = 0, \omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} \text{ と置けば、}$$

$$\theta = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$t=0$ のとき、

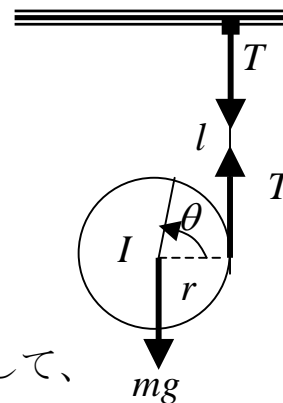
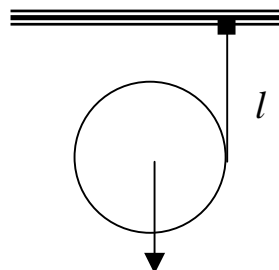
$$\theta_0 = B,$$

$$\left[\frac{d\theta}{dt} \right]_{t=0} = A\omega \cos \omega 0 - B\omega \sin \omega 0 = A\omega = 0$$

$$\therefore A = 0, \therefore \theta = \theta_0 \cos \omega t = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{MgL}{MK^2 + ML^2}} t$$

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{gL}{K^2 + L^2}} t$$

回転しつつ落下する滑車



滑車の質量 m 、半径 r 、面密度 ρ

垂直方向の力は下向きを正として、

$$mg - T, m = \rho \pi r^2, l = r\theta$$

$$\text{垂直運動の方程式は、} mg - T = m \frac{d^2 l}{dt^2} \dots (1)$$

$$\text{回転運動の方程式は、} Tr = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}, I = m \frac{r^2}{2}$$

$$\therefore Tr = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = I \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{l}{r} \right) = \frac{I}{r} \frac{d^2 l}{dt^2} \dots (2)$$

$$(2) \text{ から } T = \frac{I}{r^2} \frac{d^2 l}{dt^2}, \text{ これを(1)に代入して、}$$

$$mg - \frac{I}{r^2} \frac{d^2 l}{dt^2} = m \frac{d^2 l}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{g}{1 + I/mr^2} = \frac{2}{3} g$$

$$\therefore l = \frac{g}{3} t^2, t=0 \text{ で、} l=0, dl/dt=0 \text{ とした。}$$

重力の加速度が $\frac{2}{3}g$ 相当に減少したのと等価である。