マクスウエルの電磁方程式、微分形と積分形

微分形（基礎編ベクトル参照）

$$(a)\ \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \qquad (b)\ \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(c)\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad (d)\ \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

積分形（基礎編ベクトル参照）

$$(a)\int_S\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS=\int_V\rho\, dV \qquad (b)\oint_C\mathbf{E}\cdot\mathbf{t}dC=-\int_S\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$(c)\int_S\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS=0 \qquad (d)\oint_C\mathbf{H}\cdot\mathbf{t}dC=\int_S\left(\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

∇ は、*nabla* (ナブラと読む)

Vは立体内部全体、SはVを囲む閉曲面,または閉曲線 Cが囲む面。

$\mathbf{n}$はSの単位法線ベクトル、$\mathbf{t}$はCの単位接線ベクトル。

$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\varepsilon_0\varepsilon_s\mathbf{E},\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\mu_0\mu_s\mathbf{H}$, 添字0は真空中の値、$s$ は物質中の相対値。

(a)は静電場のガウスの法則

(c)は静磁場のガウスの法則

(b)はファラデーの法則で $V=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ と等価(磁束の変化が作る誘起電圧)

(d)はアンペールの法則 (アンペール・マクスウェルの法則、電流が作る磁界)

$\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$を変位電流といいコンデンサを流れる電流などが相当。

$\nabla\cdot$を *div*(*divergence*、発散),

$\nabla\times$を *rot*(*rotation*,回転)または*curl*(回転)と書くこともある。

$$div\mathbf{D}=\rho,\ div\mathbf{B}=0,\ rot\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\ rot\mathbf{H}=\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

∇・A (Aの発散、divA)

$(a)\ \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$

$(c)\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0$

一般に$\nabla\cdot\mathbf{A}$は単位体積当たりの$\mathbf{A}$の湧き出し量(発散、基礎編参照)。

これを、ある立体内部全体について積分すると、ガウスの定理により、

$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV=\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS$ で、表面からの放出量に等しくなる。

$(a)\int_V \nabla\cdot\mathbf{D}dV=\int_S D_n dS=\int_V \rho dV=Q,$

すなわち表面から出てゆく電束の総数は立体内の総電荷Qに等しい。

立体として半径rの球をとり、電荷分布が中心に対して点対称のとき、球表面の電界は一様で球面に垂直であるから

$$Q=\int_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS=D_n\int_S dS=4\pi r^2 D_n$$

$$D_n=\frac{Q}{4\pi r^2},\ E_n=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2},$$ (右上図)

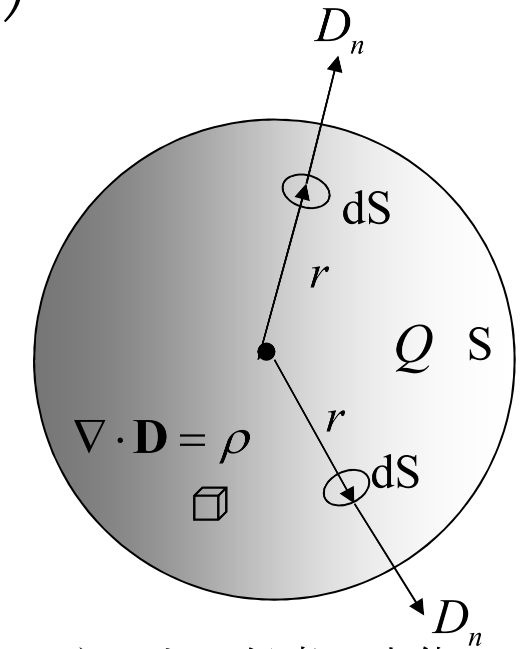
$(c)\int_S B_n dS=0,$ すなわち表面から出てゆく磁束の総数は0である。(右下図)

(磁束には、湧き出し、吸い込みなし)

$(a)\ \ Q=4\pi r^2 D_n$

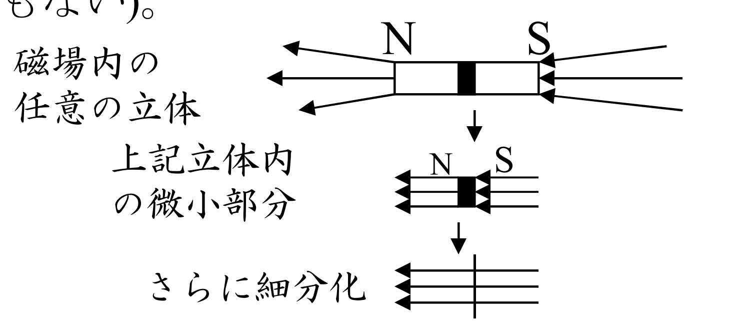
全表面積は、$4\pi r^2$

表面からの放出量総計は、$4\pi r^2 D_n$



$(c)\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ の意味

B の発散が常に0ということは任意の立体に入る磁束数とそこから出る磁束数とがいつでも等しいということで、立体をどんなに小さくしても成り立つから、結局、磁束はどこでも(磁石内でも)連続していることを意味する(磁束には始点も終点もない)。



$\nabla\times$A (Aの回転、rotA)

回転に関してはストークスの定理がある。すなわち、

$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS=\oint_C\mathbf{A}\cdot\mathbf{t}dC$, で、回転の面積分は面を囲む閉曲線上の周回積分に等しい。

S は閉曲線 C で囲まれた曲面。

$\mathbf{n}$ は S の単位法線ベクトル、

$\mathbf{t}$ は C の単位接線ベクトル

$$(b)\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

C の面内全域について積分すれば

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{n}dS=\oint_C\mathbf{E}\cdot\mathbf{t}dC=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS$$

は E の周回積分が内部の磁束の時間変化に等しいことを示す。C がコイルの一巻きを表すとき、左辺は一周分の誘起電圧を表す。巻き数 N、磁束数 Φ、誘起電圧 V とすれば

$$V=-N\frac{d\Phi}{dt}$$

$(d)\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ は、上記と類似的に H の周回積分が内部の電流と変位電流の和に等しいことを示している。

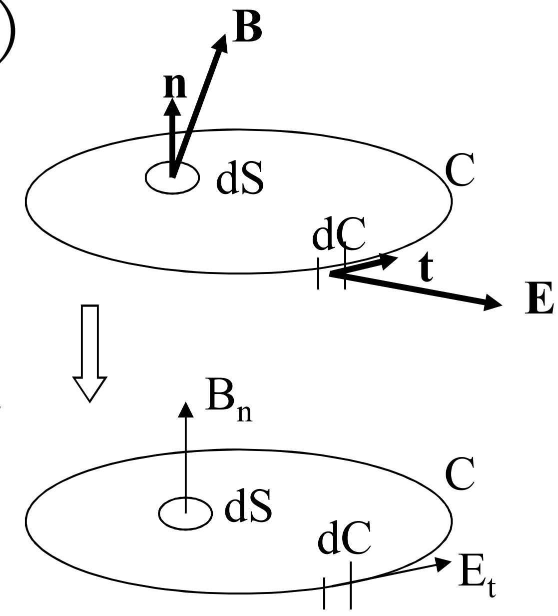
$$\oint_C\mathbf{H}\cdot\mathbf{t}dC=\mathbf{I}+\frac{\partial}{\partial t}\int_S\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$(b)\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C\mathbf{E}\cdot\mathbf{t}dC=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\rightarrow\oint_C E_t dC=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n dS$$

$$\rightarrow V=-\frac{d\Phi}{dt}$$



$$(d)\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$\mathbf{D}=0$ のとき、

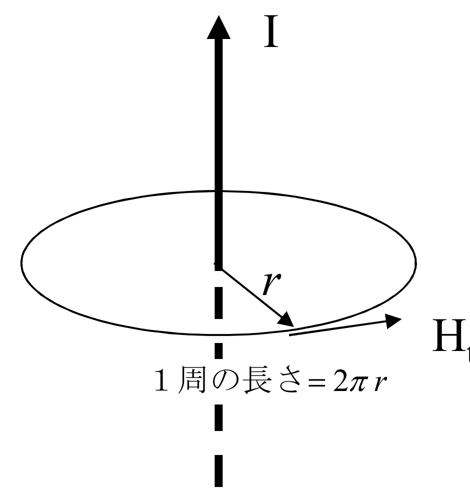
$$\oint_C\mathbf{H}\cdot\mathbf{t}dC=\oint_C H_t dC=\mathbf{I}$$

同心円の中心に電流 $\mathbf{I}$ が流れる無限長線路から半径 r の位置の磁界は、

$2\pi rH_t=I$ から、

$$H_t=\frac{I}{2\pi r},$$

向きは円周の接線の向き。



誘電体中の電場

充電されている平行版コンデンサ中に、誘電体を充填する場合の電界等の変化を調べる

図 a　電荷面密度$= -\sigma_0$

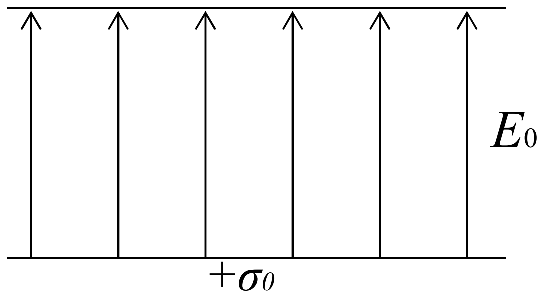


図 b　電荷面密度$= -\sigma_0$

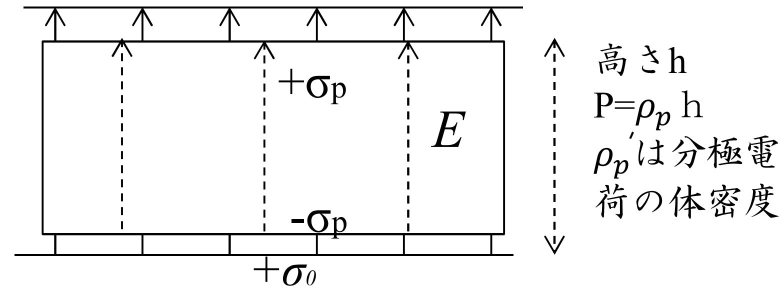


図 a のように、面電荷密度$\pm\sigma$を蓄えた空気絶縁平行板コンデンサがある。

図 b のようにσを一定に保ったまま、この空間に誘電体を差し込むと、誘電体中の原子は、空間の電界E_0により、負電荷をもつ電子は下側に、正電荷を持つ原子核は上側に移動する。この結果、誘電体の上側に$+\sigma_P$, 下側に$-\sigma_P$の密度の電荷が現れる。この電荷を分極電荷という。この電荷による電界はもともとあった電界E_0を弱める向きにできる。この結果、誘電体内部の電界は$E_0=\sigma_0/\varepsilon_0$ から $E=(\sigma_0-\sigma_P)/\varepsilon_0$ に減少する。

誘電体の電気感受率をχとすれば$(\chi=\kappa-1)$

$\sigma_p=\chi\varepsilon_0 E$ から、$E=\sigma_0/\varepsilon,\ \varepsilon=\kappa\varepsilon_0=(1+\chi)\varepsilon_0$

$\kappa=$ 比誘電率。 Pを分極による単位体積 当たり双極子モーメントとす れば、分極による電荷は，原子の＋－分離なので 、発生量 $=-$残存量 の関係がある。$\int_S \varepsilon_0 E\,dS=\int_V(\rho-\rho_p)dV$ に、

$\int_V \rho_p dV=\int_V \rho_p h dS=\int_S P\cdot dS$ を代入して、

$\int_S(\varepsilon_0 E+P)\cdot dS=\int_V \rho\,dV$, すなわち、$\int_S D\cdot dS=\int_V \rho\,dV$

ただし、$D=\varepsilon_0 E+P$ ($D=$ 電束密度)

$\int_S \varepsilon_0 E\cdot dS=\int_V(\rho+\rho_p)dV$,

微分形では、$\varepsilon_0\nabla\cdot E=\rho-\nabla\cdot P=\rho+\rho_P$,

すなわち、 $\varepsilon_0\nabla\cdot E=\rho+\rho_P$, および$\nabla\cdot D=\rho$