行列(*Matrix*) と行列式(*Determinant*)

1. 行列(*Matrix*)の演算
  1.1 和、差、積
    1.1.1 行列とは
    1.1.2 行列の和差（加減算）
    1.1.3 行列の積（乗算）
  1.2 転置行列、対称行列、正方行列
  1.3 単位行列
2. 行列式(*Determinant*)と逆行列
  2.1 行列式
  2.2 逆行列
  2.3 多元一次連立方程式のコンピュータによる解法
  2.4 コンピュータによる逆行列の計算
    2.4.1 定数項の異なる複数の方程式
    2.4.2 逆行列の計算

1. 行列の演算

1.1 和、差、積

1.1.1 行列とは

行列とは、数値を縦 m行、横n列の長方形状に配置したものをいう。
m,n は正整数

例1. 3行5列の行列 **A**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

例2. 4行2列の行列 **B**

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

例3. 4行1列の行列 **C**
(別名:ベクトル)

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

例4. 1行4列の行列 **D**（別名:横ベクトル）

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

1.1.2 行列の和、差（加算、減算）

行数どうし及び列数どうしが等しい二つの行列は加減算ができ、結果は要素ごとの加減算である（定義）。

例1.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{F}=\begin{bmatrix} a_{11}\pm f_{11} & a_{12}\pm f_{12} & a_{13}\pm f_{13} & a_{14}\pm f_{14} & a_{15}\pm f_{15} \\ a_{21}\pm f_{21} & a_{22}\pm f_{22} & a_{23}\pm f_{23} & a_{24}\pm f_{24} & a_{25}\pm f_{25} \\ a_{31}\pm f_{31} & a_{32}\pm f_{32} & a_{33}\pm f_{33} & a_{34}\pm f_{34} & a_{35}\pm f_{35} \end{bmatrix}$$

(応用) $\mathbf{A}-\mathbf{F}=0$ ならば、$\mathbf{A}=\mathbf{F}$、すなわち、**A,F**の各要素はすべて等しい。すなわち、$a_{ij}=f_{ij}$ である。

例2.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\\ -2 & 2\\ 3 & -3\end{bmatrix}\text{のとき、}$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1+3 & 2-1\\ -1+2 & 1+2\\ 2-2 & -1+2\\ -2+3 & 2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}-\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1-3 & 2+1\\ -1-2 & 1-2\\ 2+2 & -1-2\\ -2-3 & 2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & -1\\ 4 & -3\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

1.1.3 **<u>行列の積（乗算、掛け算）</u>**

ある行列 **A** の列数と別の行列 **B** の行数が等しいとき、この二つの行列は掛け算ができ、結果の行列 **C** の i 行, j 列要素 c_{ij} は、**A** の i 行 と **B** の j 列との積和である（定義）。

Aがm行k列、**B**がk行n列のとき**C**=**AB**はm行n列となる。一般に**AB**と**BA**は違う。

例1. **<u>3</u>**行5列×5行**<u>2</u>**列➔ **<u>3</u>**行**<u>2</u>**列

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\\ b_{13} & b_{23}\\ b_{14} & b_{24}\\ b_{15} & b_{25}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\\ b_{13} & b_{23}\\ b_{14} & b_{24}\\ b_{15} & b_{25}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}+a_{15}b_{51} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}+a_{15}b_{52}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41}+a_{25}b_{51} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42}+a_{25}b_{52}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41}+a_{35}b_{51} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}+a_{35}b_{52}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{5}a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{5}a_{1k}b_{k2}\\ \sum_{k=1}^{5}a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{5}a_{2k}b_{k2}\\ \sum_{k=1}^{5}a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{5}a_{3k}b_{k2}\end{bmatrix}\qquad \textbf{(}\underline{\textbf{3}}\text{行}\underline{\textbf{2}}\text{列}\textbf{)}$$

例2.　　4行2列×2行3列→4行3列

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$ のとき、

$$\mathbf{BC}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot -1 & 1\cdot 3+2\cdot 1\\ -1\cdot 2+1\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot -1 & -1\cdot 3+1\cdot 1\\ 2\cdot 2-1\cdot 1 & 2\cdot 1-1\cdot -1 & 2\cdot 3-1\cdot 1\\ -2\cdot 2+2\cdot 1 & -2\cdot 1+2\cdot -1 & -2\cdot 3+2\cdot 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -1 & 5\\ -1 & -2 & -2\\ 3 & 4 & 5\\ -2 & -4 & -4\end{bmatrix}$$

例3.　**多元連立一次方程式**

たとえば、次のような３元連立一次方程式があるとする。

$$\begin{cases}2x-y+3z=9\\ -x+2y-2z=-3\cdots\cdots(1)\\ x+3y-z=4\end{cases}$$

この左辺の係数と右辺の定数項に着目するとそれぞれ３行３列と３行１列の行列になる。

$$係数行列=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}、定数項行列=\begin{bmatrix}9\\ -3\\ 4\end{bmatrix}$$

ここで、

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}=\mathbf{A},\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\mathbf{X},\begin{bmatrix}9\\ -3\\ 4\end{bmatrix}=\mathbf{B}$$

と書き表すと、

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}\cdots\cdots(2)$$

であることがわかる。

実際、**AX**を実行して見ると、

$$\mathbf{AX}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y+3z\\ -x+2y-2z\\ x+3y-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ -3\\ 4\end{bmatrix}$$

となり、

$$\begin{aligned}2x-y+3z&=9\\ -x+2y-2z&=-3\\ x+3y-z&=4\end{aligned}$$

で、$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ が成立していることがわかる。

1.2 **転置行列、対称行列、正方行列**

ある行列の行と列を入れ替えてできる行列を転置行列といい右肩にTを付して表す。$\mathbf{A}=(a_{ij})\rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\rightarrow(b_{ij})=(a_{ji})$

転置行列と元の行列が等しいとき、その行列を対称行列という $\{(a_{ji})=(a_{ij})\}$。

行数と列数が同じ行列を正方行列という。

転置行列の例1

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \text{のとき}$$

転置行列 $\mathbf{A}^T$ は、

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

転置行列の例2. スカラー積

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{X}=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{bmatrix} \text{とすると、} \mathbf{A}^T\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$=2u+v+3w+x+4y=\mathbf{X}^T\mathbf{A}$$

これは、ベクトル**A**とベクトル**B**のスカラー積に等しい(「ベクトル」参照)。

対称行列の例　正方行列(行数＝列数)でもある。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix} \text{のとき転置行列 } \mathbf{A}^T \text{ は、}$$

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{A}\text{は対称行列である。}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^T=\mathbf{B}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$を主対角要素という。

$Diag.\mathbf{A}$と表すこともある。

1.3 **単位行列**

主対角要素がすべて1で、他の要素が0である正方行列を**単位行列**といい **I** で表す。
行数(= 列数)を n とするとき、I_n と書くこともあるが自明の場合または不定の場合は単にI と表現する。
ある行列に単位行列を掛けても元の行列と同じである。(ある数に1を掛けても変らないのと類似的である。すなわち、I は 数値では1に相当する。)

単位行列の例

$$\mathbf{I}_{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \text{のとき、}$$

$\mathbf{AI}_{(5)} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{I}_{(3)}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ (確かめてください)

2. 行列式(*Determinant*)と逆行列

2.1行列式

正方行列 **A** に対応して、「**行列式**」と呼ばれる1 **個の数値**(スカラー) |**A**| が存在する。

① **A** = [a] のとき、|**A**| = a

② $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ のとき、$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

③ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ のとき、

$$|\mathbf{A}| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

③ 一般に、n行n列の行列 **A** の行列式 $|\mathbf{A}|$ は、

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki}, i\text{は任意の行(列)番号、}$$

$$A_{lm} = (-1)^{l+m} \times (\mathbf{A}\text{ の}l\text{行と}m\text{列を除く小行列式})$$

A_{lm} をa_{lm} の**余因子**または**余因数**という。

|A| が 0 でないとき、A は「正則である」という。

行列式の例1

単位行列の行列式は、1

$$|\mathbf{I}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot$$

$$|\mathbf{I}_{(3)}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

行列式の例2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 2\cdot 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot 2 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \text{(第1行で展開)}$$

$$= -2 + 2 + 9 = 9$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \text{(第2行で展開)}$$

$$= 14 - 8 + 3 = 9$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \text{(第3列で展開)}$$

$$= 9 + 3 - 3 = 9$$

このように、どの行あるいは列について展開しても同じである。→0の多い行又は列について展開すると計算は楽になる。

2.2 逆行列

正方行列 **A** に対応して、「**逆行列**」と呼ばれる行列 ($\mathbf{A}^{-1}$ と表記)が存在する。$\mathbf{AX}=\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}$

① $\mathbf{A} = [a]$ のとき、$\mathbf{A}^{-1} = [1/a]$

② $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ のとき、余因子 A_{ij} を用いて、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}/|\mathbf{A}| & -a_{12}/|\mathbf{A}| \\ -a_{21}/|\mathbf{A}| & a_{11}/|\mathbf{A}| \end{bmatrix}$$

③ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ のとき、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$ 余因子の添字が転置の状態にあることに注意

$$= \begin{bmatrix} A_{11}/|\mathbf{A}| & A_{21}/|\mathbf{A}| & A_{31}/|\mathbf{A}| \\ A_{12}/|\mathbf{A}| & A_{22}/|\mathbf{A}| & A_{32}/|\mathbf{A}| \\ A_{13}/|\mathbf{A}| & A_{23}/|\mathbf{A}| & A_{33}/|\mathbf{A}| \end{bmatrix},$$ $n > 3$ も同様。

逆行列の性質 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

逆行列の利用 → 多元連立一次方程式の求解

$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ のとき、両辺に $\mathbf{A}^{-1}$ を掛けて、

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{IX} = \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, すなわち、$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

(注意)|**A**|=0 のとき逆行列は存在しない。

多元連立一次方程式を解く例

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\-1&2&-2\\1&3&-1\end{bmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}9\\-3\\4\end{bmatrix}$$ のとき、

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}|=2\begin{vmatrix}2&-2\\3&-1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-1&-2\\1&-1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-1&2\\1&3\end{vmatrix}$$
$$=2\cdot4+1\cdot3+3\cdot(-5)=8+3-15=-4$$

$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}$ の各要素は、

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&-2\\3&-1\end{vmatrix}=4,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&3\\3&-1\end{vmatrix}=8,\ A_{31}=\begin{vmatrix}-1&3\\2&-2\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-1&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-3,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}=-5,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2&3\\-1&-2\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-1&2\\1&3\end{vmatrix}=-5,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}=-7,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}4&8&-4\\-3&-5&1\\-5&-7&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\0.75&1.25&-0.25\\1.25&1.75&-0.75\end{bmatrix}$$

$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$から、

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\0.75&1.25&-0.25\\1.25&1.75&-0.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\-3\\4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-9+6+4\\6.75-3.75-1\\11.25-5.25-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

すなわち、$x=1, y=2, z=3$ が得られた。

2.3 多元一次連立方程式のコンピュータによる解法

2.3.1 直接法

① ガウスの消去法（掃き出し法）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$ として、

$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ のとき、$\mathbf{X}$が変化しないような等価な式の変換を繰り返して、

$$\begin{bmatrix}a'_{11}&a'_{12}&a'_{13}\\0&a'_{22}&a'_{23}\\0&0&a'_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b'_1\\b'_2\\b'_3\end{bmatrix}$$ を導く方法。…(3)

$n>3$も同様

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$ から$\mathbf{X}$を求めるには,

第3行の、$a'_{33}x_3 = b'_3$, から、$x_3 = b'_3 / a'_{33}$

第2行の$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$ にx_3を代入して、x_2が得られる。つぎに、x_3, x_2を第1行に代入して、x_1が得られる。

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix}$$ の形を上三角行列という。

(3)式を導く方法

連立方程式を元の式の形で表すと、

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \cdots\cdots(a)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \cdots\cdots(b)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \cdots\cdots(c)$$

ここで、$a_{11} \neq 0$とする。もし、$a_{11} = 0$なら、a_{21}, a_{31}の中で絶対値が最大のものを選び、その行と第1行を入れ替えa_{ij}、b_i の添字も付替える。このとき、xの添字は不変である。

a_{11}を基軸とした変換(掃き出し)

(2行1列、3行1列を消去し 0 にする等価変換)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \cdots\cdots(a)$$

$$(b) - (a) \times \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$0x_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}}\right)x_3$$
$$= b_2 - \frac{b_1 a_{21}}{a_{11}} \cdots (b')$$

$$(c) - (a) \times \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$0x_1 + \left(a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11}}\right)x_3$$
$$= b_3 - \frac{b_1 a_{31}}{a_{11}} \cdots (c')$$

次に、a'_{22}を基軸とした変換(掃き出し)を行うと上三角行列化が完成する。

(3行2列を消去し 0 にする等価変換)

以下、数値例で示す。

Xはこの変換によって変らないので、A,Bのみで示す。

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ のとき、

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ から出発する。◯は基軸

第2行−第1行×$\frac{-1}{2}$と第3行−第1行×$\frac{1}{2}$を実行

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 3.5 & -2.5 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 9 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

第3行−第2行×$\frac{3.5}{1.5}$を実行

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 9 \\ 1.5 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A'X} = \mathbf{B'}$ の形にすると、

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1.5 \\ -4 \end{bmatrix}$

第3行から、$z = -4/(-4/3) = 3$

第2行に代入して、

$1.5y - 0.5 \times 3 = 1.5$ から、$y = 2$

第1行に代入して、

$2x - 2 + 3 \times 3 = 9$ から、$x = 1$

ガウスの消去法は「掃き出し法」とも呼ばれる。行列式も同時に計算できて、上三角行列の主対角線上のすべての値を掛け合わせたものになる。ここでは、

$2 \times 1.5 \times (-4/3) = -4$

さらに、上三角でも掃き出しを進めて対角行列の形にもできる。

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 9 \\ 1.5 \\ -4 \end{bmatrix}$

第1行−第2行×$\frac{-1}{1.5}$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8/3 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 10 \\ 1.5 \\ -4 \end{bmatrix}$

第1行−第3行×$\frac{8/3}{-4/3}$,第2行−第3行×$\frac{-0.5}{-4/3}$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{vmatrix} = -4$

これから、直ちに、$x = 1, y = 2, z = 3$

また、行列式が、$2 \times 1.5 \times (-4/3) = -4$で、この変換によって不変であることもわかる。

② LU分解法
Aを**A** = **LU**と、上三角行列 **U** と下三角行列 **L** の積になるように分解し、**LUX** = **B** の形にし、まず、**LY**=**B**から **Y** を求めると **LUX**=**LY**→**UX**=**Y** から **X** を求めます。

2.3.2 反復法

AX = **B** から、

$$x_1 = b_1 / a_{11} - \sum_{k \neq 1} (a_{1k} / a_{11}) x_k$$

$$x_2 = b_2 / a_{22} - \sum_{k \neq 2} (a_{2k} / a_{22}) x_k$$

…

$$x_n = b_n / a_{nn} - \sum_{k \neq n} (a_{nk} / a_{nn}) x_k$$

はじめに、$x_k = 1$ などの初期値を代入し、上記の計算を反復する。収斂する保証はないがアルゴリズムは簡単である。

x_k をすべて計算してから、次の代入に進むのをヤコビ法、常に最新の x_k を用いるのをガウス　ザイデル法と呼んでいる。

実際に多元連立一次方程式を解く必要性は計算力学（有限要素法や差分法など）等で出てくる。またその未知数の数も、数万～数十万に及ぶものもある。
したがって、これを解くのに大きな時間を必要とするので、これまでに述べた方法を比較してみると
逆行列法は所要時間が長いので中小規模システム向き
直接法のLU分解法は大規模システム用としても用いられている。
反復法は、収斂の保証がなく余り用いられない。
計算回数
　逆行列法　約$8/3n^3+2n^2$回
　掃き出し法　約$2/3n^3+2n^2$回
　（名取他 「数値計算法」オーム社　による）

2.4 コンピュータによる逆行列の計算

掃き出し法による計算法を紹介する。

2.4.1 定数項の異なる複数の方程式

2.3.1 の掃き出し法による連立方程式の解法を、何組かの異なる定数項 B に対して適用し上三角掃き出しも実施すると、同時に複数の方程式の解が得られる。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}9 & 4 & 0 & 5\\ -3 & -1 & 3 & -2\\ 4 & 3 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

とする。

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}9 & 4 & 0 & 5\\ -3 & -1 & 3 & -2\\ 4 & 3 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

第2行 − 第1行 $\times\frac{-1}{2}$ と第3行 − 第1行 $\times\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1.5 & -0.5\\ 0 & 3.5 & -2.5\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}9 & 4 & 0 & 5\\ 1.5 & 1 & 3 & 0.5\\ -0.5 & 1 & 7 & -1.5\end{bmatrix}$$

第1行 − 第2行 $\times\frac{-1}{1.5}$ と第3行 − 第2行 $\times\frac{3.5}{1.5}$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 8/3\\ 0 & 1.5 & -0.5\\ 0 & 0 & -4/3\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}10 & 14/3 & 2 & 16/3\\ 1.5 & 1 & 3 & 0.5\\ -4 & -4/3 & 0 & -8/3\end{bmatrix}$$

第1行 − 第3行 $\times\frac{8/3}{-4/3}$ と第2行 − 第3行 $\times\frac{-0.5}{-4/3}$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & -4/3\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 0\\ 3 & 3/2 & 3 & 1.5\\ -4 & -4/3 & 0 & -8/3\end{bmatrix}$$

各行を左辺の主対角要素で割って、

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdots\cdots(A)$$

これで、**B**の各列に対応する解**X**が、

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$ と求められた。

2.4.2 逆行列の計算

以上の過程で、最後に **A**が単位行列 **I**に変化しているのがわかる。((*A*)式)

これを利用して、左辺 を**A**、右辺を **B**の代わりに **I**として出発して、掃き 出しを繰り返せば、**I**の部分が $\mathbf{A}^{-1}$に変化することになる 。

すなわち、 $\mathbf{AX}=\mathbf{I}$から、 $\mathbf{IX}=\mathbf{A}^{-1}$ に変化している。

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ から出発して、

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 3/4 & 5/4 & -1/4\\ 5/4 & 7/4 & -3/4\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}$$ が得られる。