解説に入る前に、関連する実際の出題を見てみましょう。

例題 1　20年度解析 1-3-5

3次元直交座標系 (x, y, z) におけるベクトル $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = (x^3, xy + yz + zx,\ z)$

の点(2,1,1) での発散 $div\vec{V} = \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z}$ の値を次の中から選べ。

① $(3x^2, x+z, 1)$ ② $(12,3,1)$ ③ $(12,2,1)$ ④ 16 ⑤ 15

例題 2 21年度解析 1-3-4

2次元直交座標系 (x, y) におけるベクトルを $\vec{V} = (V_x, V_y) = (y^2, x + y)$ とする。

このとき関数 $rot\vec{V} = \dfrac{\partial V_x}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial x}$ の点 $(3,2)$ における値を次の中から選べ。

① $(2y,1)$ ② $(4\ 1)$ ③ $(6,1)$ ④ 3 ⑤ 5

上記のいずれも、$div\vec{V}$ や $rot\ \overline{V}$ の式が問題の中に書いてありますので、その意味が分らなくても単に偏微分の計算をすれば答えが得られます。

偏微分は分母側にある変数だけを変数と考え、他の変数は定数と考えて微分をすればよいので、次のようになります。(編微分の解説は高校編の数学参照)

例題1 $div\vec{V} = \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z} = \dfrac{\partial x^3}{\partial x} + \dfrac{\partial (xy + yz)}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 3x^2 + (x+z) + 1 = 3 \times 2^2 + (2+1) + 1 = 16$

例題2 $rot\vec{V} = \dfrac{\partial V_x}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial x} = \dfrac{\partial y^2}{\partial y} - \dfrac{\partial (x+y)}{\partial x} = 2y - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3$

勾配、発散、回転の意味

1．まず、日本語の意味を再確認してみましょう。

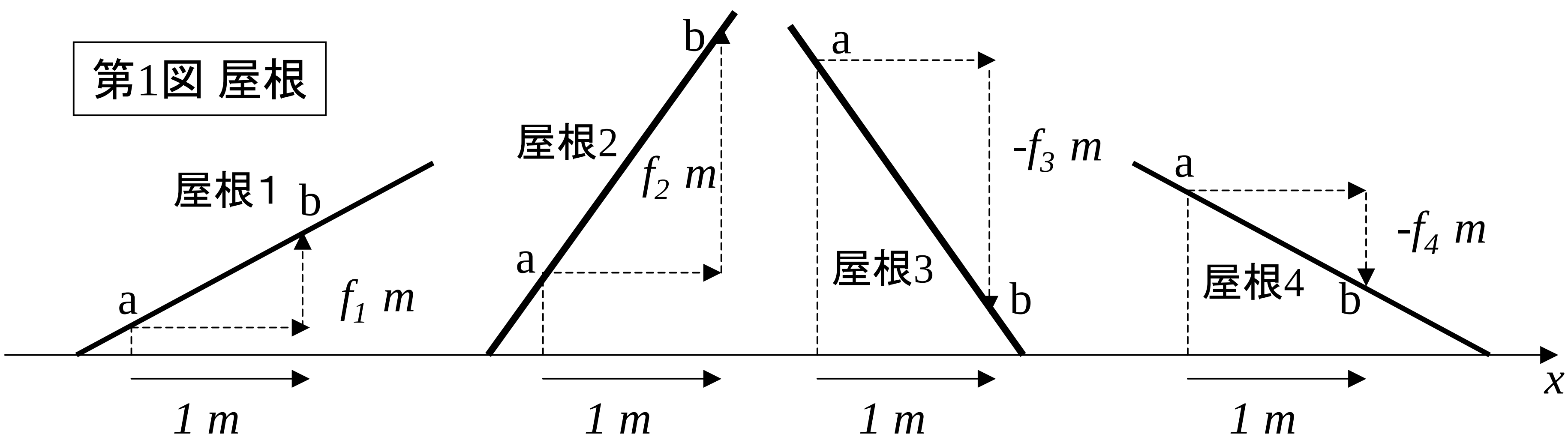
2．次に、その数値的表現法を考えてみましょう。

①**勾配**(こうばい、gradient グレィディエント)

「急**勾配**の屋根」、「急**勾配**の上り坂」などという表現があります。これは何を意味しますか。そうです。これは、坂などの傾き（位置による変化の度合い）を現す表現です。（広辞苑では、「傾斜面の傾きの度合い」）

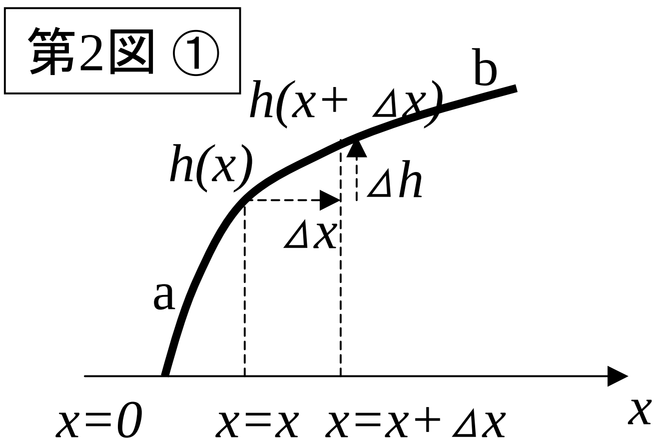
「傾きが**急か緩やか**か」を数値的に表すには、どんな方法が便利ですか。

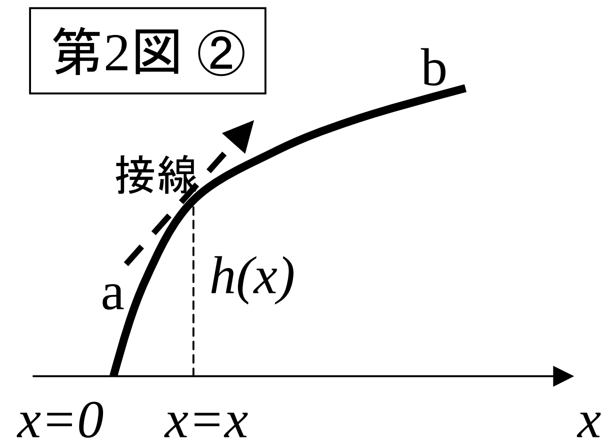
a→bと、水平方向に1ｍ進んだとき高さが何m上がるか、あるいは下がるかで表せば比較のための数値として適当ですね。第1図のf_1、f_2、$-f_3$、$-f_4$、のように、$f_1<f_2$、$f_3>f_4$、であり大きさと符号（－は右下がり、＋は右上がり）で区別できます。



傾きが曲線の場合

次に第2図のように1mに相当するa b間が曲線になっている時はどうすればよいかを考えましょう。この場合傾きは場所によって違いますから一つの値で表すことはできません。場所 x の関数として表せればよいですね。





このようなときには、場所（横軸）$x = x$ のときの高さを表す関数を$h(x)$として、①のように $x= x+\Delta x$ における高さ $h(x+\Delta x)$ との差 $\Delta h= h(x+\Delta x) - h(x)$ を位置の差 Δx で割った値、すなわち

$\dfrac{\Delta h}{\Delta x} = \dfrac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$ で表せばよいと考えましょう。Δx を十分小さく取れば、

これは $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \frac{d\,h(x)}{d\,x}$, すなわち、$x = x$ における微分値となります。

これはまた②図に示すように $x = x$ における $h(x)$ の接線の勾配です。

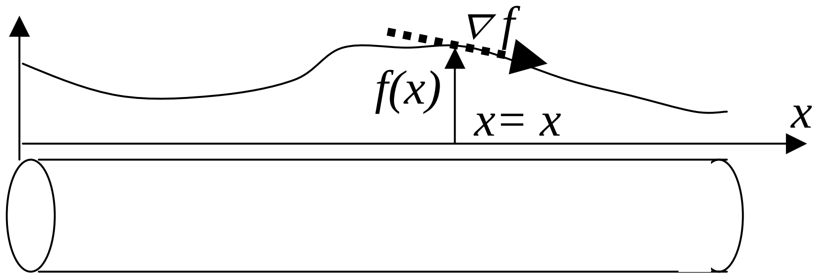
微分値を勾配とすることは傾きが直線の場合にも使えます。

座標が2次元、3次元の場合

位置座標が1次元の例の復習

丸棒の温度、密度など長さ方向の位置のみで定まる場合。温度、密度= $f(x)$

第3図
$f(x)$



第3図で温度あるいは密度　の勾配は、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{d f(x)}{d x}$$

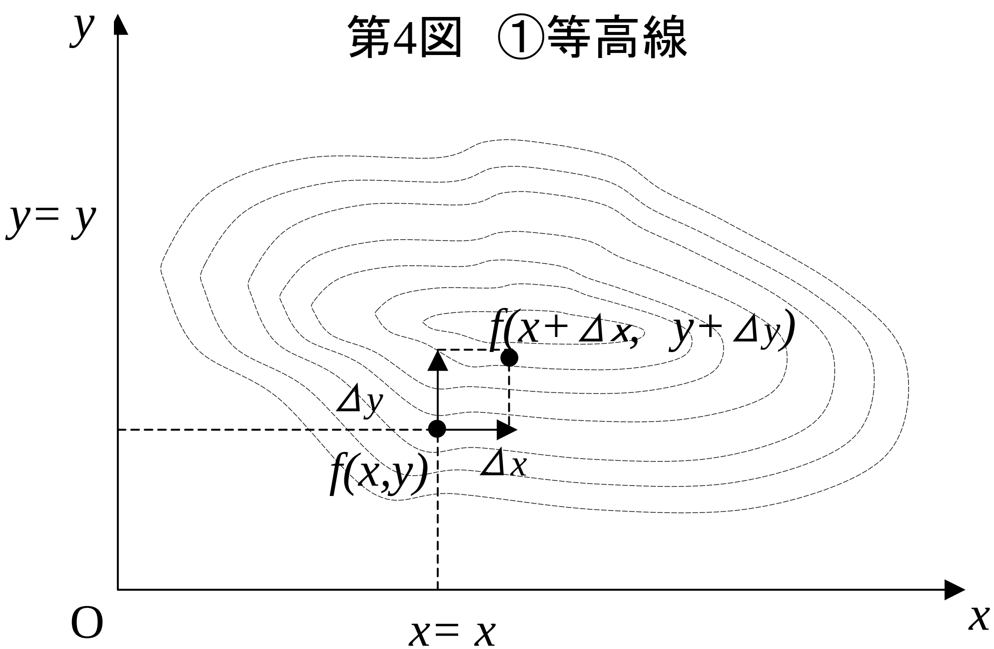
これは、 $\nabla f(x) = \dfrac{d}{dx} f(x)$ と書けます。

2次元分布の例

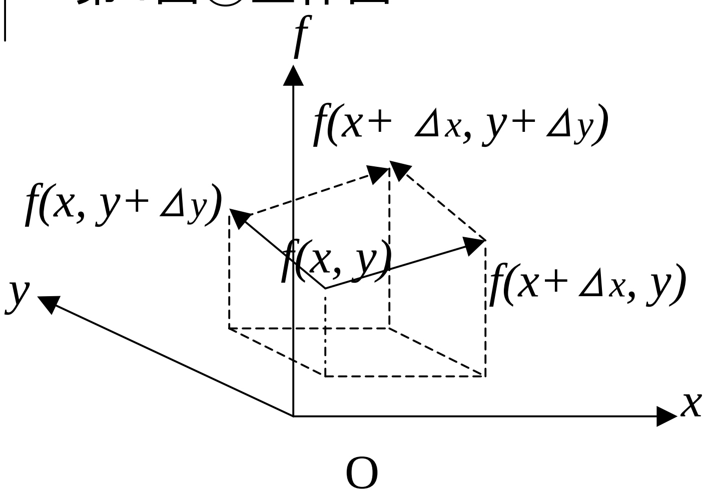
土地の高さや平板の温度、密度、濃度分布など

第4図で、$f(x+\ \Delta x, y+\Delta y)$と $f(x,y)$
との差を計算します。(次ページ)

第4図　①等高線



第４図②立体図



位置座標が2次元の場合

$f(x,y)$から$f(x+\Delta x, y+\Delta y)$までの間に f が変化する量 Δf は、

$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ これを次のように書き 換えます。

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \times \Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \times \Delta y$$

分数部分の $\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0}$ として微分に置き換え れば、$\Delta f \approx df = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \times dx + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \times dy$

(偏微分は、分母にある 変数だけを変数とし他 の変数は定数と考えた ときの微分です。)

すなわち、y が一定で、xだけが増加する方向（ x方向）には、$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ つまり

$f(x,y)$の xによる偏微分が勾配で 、これが勾配の x成分です。

また、x が一定で y だけが増加する方向（ y方向）には、$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ つまり

$f(x,y)$の yによる偏微分が勾配で 、これが勾配の y成分です。

z成分は0なので、∇を使って書けば、 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$,と$f(x,y)$から

$\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ となります。

移動量が $\Delta x,\ \Delta y$ と小さいとき高さの差 は、$\Delta f \approx \nabla f \bullet (\Delta x, \Delta y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

位置座標が3次元の場合

立体の表面や内部の位置は3次元座標で表すことができます。そのそれぞれの位置の温度や密度や濃度は位置の関数であり *f(x,y,z)* で表現できます。

$f(x,y,z)$から$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ までの間に f が変化する量 Δf は、

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) + f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y, z+\Delta z)$$

$$+ f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x} \times \Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z+\Delta z)}{\Delta y} \times \Delta y$$

$$+ \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z} \times \Delta z$$

$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0}$ として、分数部分を微 分に置き換えれば、

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x} \times dx + \frac{\partial f}{\partial y} \times dy + \frac{\partial f}{\partial z} \times dz$$

(簡単のため、$f(x,y,z)$を単に f と表現した。)

となります。すなわち 、勾配の x, y, z 成分はそれぞれ

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$となります。$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f,$ これは方向成分を持つ ベクトル量です。

> ここでは、スカラー $f(x,y,z)$ からベクトル∇f が得られています。

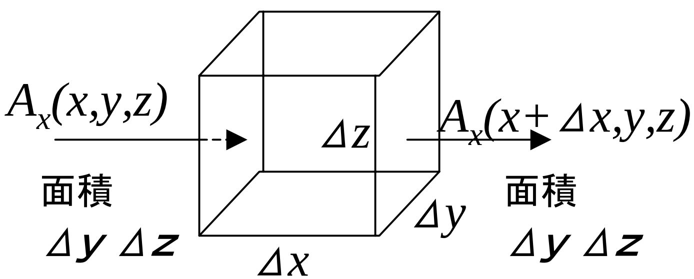
これらにx, y, z方向の変位をかけたも のを加算すれば高低差 $\Delta f(x,y,z)$ が求められます。

$$\Delta f \approx \nabla f \bullet (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \bullet (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

②発散（はっさん divergence ダイバージェンス）

発散とは、ある物体から何かが飛び出し飛散して行く状態を表すことばです。（広辞苑では「外へ発し、散ること」）、ベクトルの場合は、ある位置に小さな立体を考え、そこから出てくる成分から、そこに入り込む成分を差し引いたもの、すなわちそこからの湧き出し量を体積当りにした数値のことです。

第5図



ベクトル$\boldsymbol{A}$からスカラー$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ が得られる

第5図のように、$\Delta x, \Delta y, \Delta z,$を稜とする直方体を考え、その中に入る液体の流速などのベクトル成分を考え、そこかから出て来るベクトルから入り込む分を差し引き、この直方体内での発生量を求めてみます。図ではx 方向の矢印のみ体積当りのを示していますが、y方向、z方向の成分も求め合計します。

$$x\text{方向} : \frac{\{A_x(x+\Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)\}\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \to \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$y\text{方向} : \frac{\{A_y(x, y+\Delta y, z) - A_y(x, y, z)\}\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \to \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

$$x\text{方向} : \frac{\{A_z(x, y, z+\Delta x) - A_z(x, y, z)\}\Delta z \Delta x}{\Delta x \Delta y \Delta z} \to \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

以上を合計して、発散は

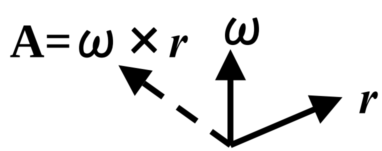
$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(A_x, A_y, A_z \right) = \nabla \bullet \boldsymbol{A}$$

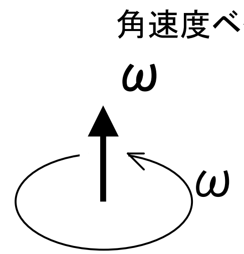
③回転（かいてん、rotation ローテイション、または curl カール）

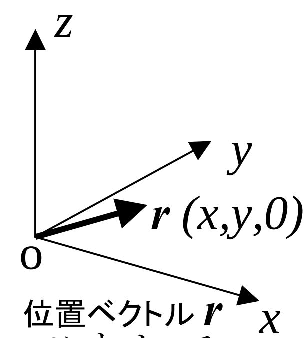
あるベクトルが回転成分を持っているかどうか、またその値はどれほどかを表すために使います。
下図とその下の式からx, y 平面上を角速度ωで回転するベクトルは回転$\nabla\times\mathbf{A}$ の z 成分として 2ωになります。したがってベクトルの回転$\nabla\times$Aを調べることによって、回転成分の有無と角速度が分ります。回転$\nabla\times\mathbf{A}$ が (0,0,0) なら回転成分は存在しない。(0,1,0) なら y 成分のみ存在する等。

成分が$\left(A_x, A_y, A_z\right)$（いずれも位置$(x,y,z)$の関数）であるベクトル$\boldsymbol{A}$ があるとき、回転は次のベクトルで定義されます。

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$







上図の場合は、xy 平面上を回転する速度ベクトル$\boldsymbol{A}$は、位置ベクトルを$\boldsymbol{r}=(x,y,0)$として

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}\rightarrow\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}=-\frac{\partial\omega x}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\omega y}{\partial z}\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial\omega x}{\partial x}+\frac{\partial\omega y}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$\nabla\times\boldsymbol{A}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+2\omega\boldsymbol{k}=2\omega\boldsymbol{k}$となり、z 軸に平行で大きさが$2\omega$ のベクトルになります。

つまり回転$(rot, \boldsymbol{A}, \nabla\times\boldsymbol{A})$を計算したら角速度$\boldsymbol{\omega}$に関連する量が得られました。

したがって、「回転」はそのベクトルの回転要素の有無とその量の情報を持つベクトルです。