

固有値と固有ベクトル付録

練習問題 I

次の各行列の固有値を求め、固有ベクトル(行列)を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, (3) \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, (5) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

練習問題 II

$$1. \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 48 \text{ すなわち.}$$

$$13x^2 + 15y^2 - 2\sqrt{3}xy = 48$$

はどんな曲線を表すか

$$2. \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \text{ すなわち.}$$

$$x^2 + y^2 + 4xy = 1$$

はどんな曲線を表すか

練習問題 I の略解

(1) $\begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}$ と置く。固有方程式は、

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 3, \text{ or } 2$$

① $\lambda = 3$

$$4 - \lambda = 1, 1 - \lambda = -2$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{p}_1 = 0, \mathbf{p}_1 = [p_{11} \ p_{21}]^T, \text{ を解く。}$$

$$1p_{11} - \sqrt{2}p_{21} = 0, p_{11} = k \text{ と置くと、}$$

$$p_{21} = \frac{k}{\sqrt{2}}, p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1 \text{ にする。}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \therefore p_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}}, p_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

② $\lambda = 2$

$$4 - \lambda = 2, 1 - \lambda = -1$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{p}_2 = 0, \mathbf{p}_2 = [p_{12} \ p_{22}]^T, \text{ を解く。}$$

$$\sqrt{2}p_{12} - p_{22} = 0, p_{22} = k' \text{ と置くと、}$$

$$p_{12} = \frac{k'}{\sqrt{2}}, p_{12}^2 + p_{22}^2 = 1 \text{ にする。}$$

$$k' = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, p_{22} = \sqrt{\frac{2}{3}}, p_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \mathbf{p}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{6} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \neq 0 \rightarrow \mathbf{p}_1$ と \mathbf{p}_2 は直交しない。(A が非対称)

$$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}$ と置く。固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} 0.6 - \lambda & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 - \lambda \end{vmatrix} = (0.6 - \lambda)^2 - 0.4^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 1 \text{ or } 0.2$$

① $\lambda = 1$ のとき、

$$0.6 - \lambda = -0.4$$

$$-0.4p_{11} + 0.4p_{21} = 0 \rightarrow p_{11} = p_{21} = k$$

$$p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1 \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = p_{11} = p_{21}$$

② $\lambda = 0.2$ のとき、

$$0.6 - \lambda = 0.4$$

$$0.4p_{12} + 0.4p_{22} = 0 \rightarrow -p_{12} = p_{22} = k'$$

$$p_{12}^2 + p_{22}^2 = 1 \rightarrow k' = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = p_{22} = -p_{12}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{p}_1 \bullet \mathbf{p}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{p}_1$ と \mathbf{p}_2 は直交させられる。(Aが対称)

$$\mathbf{p}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(3) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}$, 固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} 0.3 - \lambda & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 0.3)(\lambda - 0.4) - 0.42 = 0$$

$$\lambda^2 - 0.7\lambda - 0.3 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{0.7 \pm \sqrt{1.69}}{2} = 1 \text{ or } -0.3$$

① $\lambda = 1$ のとき、 $0.3 - \lambda = -0.7$

$$-0.7p_{11} + 0.6p_{21} = 0 \rightarrow p_{21} = \frac{7}{6}p_{11}$$

$p_{11} = 6$ とすれば、 $p_{21} = 7$ 、 \mathbf{A} が非対称なので、 \mathbf{p} は直交行列でない。したがって絶対値 $\neq 1$ でもよい。

② $\lambda = -0.3$ のとき、 $0.4 - \lambda = 0.7$

$$0.7p_{12} + 0.7p_{22} = 0 \rightarrow p_{12} = -p_{22}$$

$p_{22} = 1$ とすれば、 $p_{12} = -1$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{p} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

① $\lambda = 4$ のとき、

$$-3p_{11} + 2p_{21} + 0 = 0$$

$$2p_{11} - 2p_{21} + \sqrt{2}p_{31} = 0$$

$$0 + \sqrt{2}p_{21} - 3p_{31} = 0$$

$$p_{11} = k, p_{21} = \frac{3k}{2}, p_{31} = \frac{\sqrt{2}}{3}p_{21} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$k = 1 / \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

② $\lambda = 1$ のとき、

$$0 + 2p_{22} + 0 = 0$$

$$2p_{12} + p_{22} + \sqrt{2}p_{32} = 0$$

$$0 + \sqrt{2}p_{22} + 0 = 0$$

$$p_{22} = 0, p_{12} = k', p_{32} = -\sqrt{2}k',$$

$$k' = 1 / \sqrt{1^2 + (0)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lambda = -1 \text{ のとき、} \\ 2p_{31} + 2p_{32} + 0 = 0 \\ 2p_{31} + 3p_{32} + \sqrt{2}p_{33} = 0 \\ 0 + \sqrt{2}p_{32} + 2p_{33} = 0 \end{aligned}$$

$$p_{33} = k'', p_{32} = -\sqrt{2}p_{33}, p_{31} = -p_{32}$$

$$k'' = 1 / \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{15} & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{15} & 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/\sqrt{15} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{15} & 3/\sqrt{15} & \sqrt{2}/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} & -\sqrt{2}/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

以下省略。

$$(5) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 - \lambda & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{1}{4} \right)^2 = 0$$

① $\lambda = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} -1/2 p_{11} + 1/4 p_{21} + 1/4 p_{31} &= 0 \\ 1/4 p_{11} - 1/2 p_{21} + 1/4 p_{31} &= 0 \\ 1/4 p_{11} + 1/4 p_{21} - 1/2 p_{31} &= 0 \end{aligned}$$

第1式と第2式の差を取ると、

$$-3/4 p_{11} + 3/4 p_{21} = 0, p_{11} = k \rightarrow p_{21} = k,$$

これを第1式に代入して、

$$-1/4 k + 1/4 p_{31} = 0 \rightarrow p_{31} = k$$

$$k = 1 / \sqrt{1^2 \times 3} = 1 / \sqrt{3} = p_{11} = p_{21} = p_{31}$$

② $\lambda = 1/4$ のとき、

$$1/4 p_{12} + 1/4 p_{22} + 1/4 p_{32} = 0$$

$$1/4 p_{12} + 1/4 p_{22} + 1/4 p_{32} = 0$$

$$1/4 p_{12} + 1/4 p_{22} + 1/4 p_{32} = 0$$

3式とも同じなので、2つを自由にとれる。

$$p_{22} = k', p_{12} = -k' \text{ とすれば、 } p_{32} = 0$$

$$k' = 1 / \sqrt{2}, p_{12} = -1 / \sqrt{2}, p_{22} = 1 / \sqrt{2}, p_{32} = 0$$

(3) $\lambda = 1/4$ は重根なので、もう一組考える。

上記と同等の等式すなわち、

$$p_{13} + p_{23} + p_{33} = 0 \dots i \text{ に加え、}$$

直交条件から、

$$p_{11} p_{13} + p_{21} p_{23} + p_{31} p_{33} = 0 \dots ii$$

$$p_{12} p_{13} + p_{22} p_{23} + p_{32} p_{33} = 0 \dots iii$$

$$p_{13} p_{13} + p_{23} p_{23} + p_{33} p_{33} = 1 \dots iv$$

iiは、 $p_{11} = p_{21} = p_{31}$ なので、 i と同じになる。

$$iii \text{ から、 } \frac{-1}{\sqrt{2}} p_{13} + \frac{1}{\sqrt{2}} p_{23} + 0 = 0$$

$$\rightarrow p_{13} = p_{23} = k''', \rightarrow p_{33} = -p_{13} - p_{23} = -2k'''$$

$$k''' = 1 / \sqrt{1^2 \times 2 + (-2)^2} = 1 / \sqrt{6}$$

$$p_{13} = 1 / \sqrt{6} = p_{23}, p_{33} = -2 / \sqrt{6}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

以下省略。

練習問題 II

1. $[x \ y] \begin{bmatrix} 13 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 48$ すなわち、

$$13x^2 + 15y^2 - 2\sqrt{3}xy = 48$$

はどんな曲線を表すか。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix}, \text{固有方程式は、}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 15-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-13)(\lambda-15) - 3$$

$$= \lambda^2 - 28\lambda + 192 = (\lambda-16)(\lambda-12) = 0$$

$$\lambda = 16, \text{ or } 12$$

① $\lambda = 16$ のとき、

$$13 - \lambda = -3, 15 - \lambda = -1$$

$$-3p_{11} - \sqrt{3}p_{21} = 0, p_{11} = k \text{ と置くと、}$$

$$p_{21} = -\sqrt{3}k, p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1 \text{ にする。}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}, p_{11} = \frac{1}{2}, p_{21} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

② $\lambda = 12$ のとき、

$$13 - \lambda = 1, 15 - \lambda = 3$$

$$-\sqrt{3}p_{12} + 3p_{22} = 0, p_{22} = k' \text{ と置くと、}$$

$$p_{12} = \sqrt{3}k', p_{12}^2 + p_{22}^2 = 1 \text{ にする。}$$

$$k' = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}, p_{22} = \frac{1}{2}, p_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ として、}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

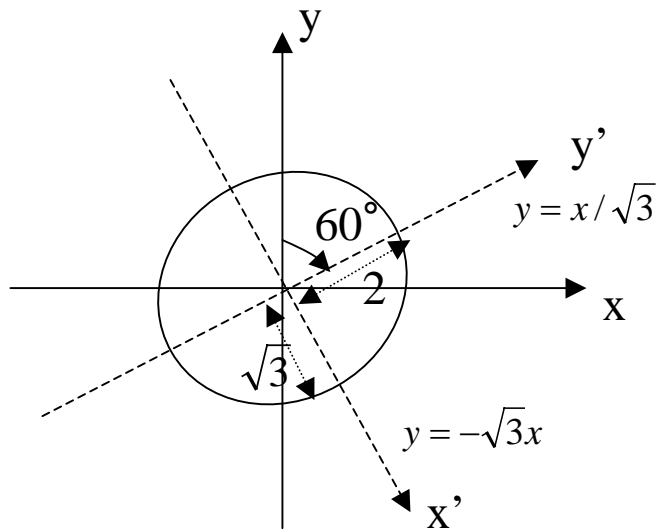
$$= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= 16x'^2 + 12y'^2 = 48$$

$$16x'^2 + 12y'^2 = 48$$

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$$

これは、 y' 軸方向の半径が2、 x' 軸方向の半径が $\sqrt{3}$ の楕円である。
 x' 軸、 y' 軸の向きは、 x, y 座標の回転が \mathbf{p}^T から、60度であるので、座標軸は逆に -60 度回転している。



$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

これを満たす θ は、 $\theta = \pi/3 = 60 \text{ deg}$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{p}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{p} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

新しい x 軸は、 $y' = 0$,元の座標系では

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{p} \begin{bmatrix} x' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'/2 \\ -\sqrt{3}x'/2 \end{bmatrix}, x' = 2x,$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x$$

同様にして、新しい y' 軸は、 $x' = 0$ として、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{p} \begin{bmatrix} 0 \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}y'/2 \\ y'/2 \end{bmatrix}, y' = 2y, x = \sqrt{3}y,$$

$\therefore y = x/\sqrt{3}$ 、座標軸は -60° 回転している。

座標軸の回転は、 \mathbf{p} の示す回転角に等しい。

$$2. [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \text{ すなわち、}$$

$$x^2 + y^2 + 4xy = 1$$

はどんな曲線を表すか。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{固有方程式は、}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 2^2 = 0$$

$$= (\lambda-1-2)(\lambda-1+2) = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

$$\lambda = 3 \text{ or } -1$$

① $\lambda = 3$ のとき、

$$-2p_{11} + 2p_{21} = 0, p_{11} = k, p_{21} = k$$

$$k = 1/\sqrt{1^2 \times 2} = 1/\sqrt{2} = p_{11} = p_{21}$$

② $\lambda = -1$ のとき、

$$2p_{12} + 2p_{22} = 0, p_{22} = k', p_{12} = -k'$$

$$k' = 1/\sqrt{1^2 \times 2} = 1/\sqrt{2} = p_{22}, p_{12} = -1/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$\theta = \pi/4 = 45^\circ$, \mathbf{p} から座標軸が 45° 回転。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \mathbf{p} \mathbf{\Lambda} \mathbf{p}^T \mathbf{x} = (\mathbf{p}^T \mathbf{x})^T \mathbf{\Lambda} (\mathbf{p}^T \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}' = [x' \ y'] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= 3x'^2 - y'^2 = \frac{x'^2}{(1/\sqrt{3})^2} - \frac{y'^2}{1^2} = 1 \end{aligned}$$

これは、 $y' = \pm\sqrt{3}x'$ を漸近線とする双曲線である。

