固有値と固有ベクトル付録

練習問題 I

次の各行列の固有値を求め、固有ベクトル(行列)を求めよ。

$$(1)\begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix},\ (2)\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},\ (3)\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(4)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix},\ (5)\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

練習問題 II

1. $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 48$ すなわち、

$13x^2 + 15y^2 - 2\sqrt{3}xy = 48$

はどんな曲線を表すか。

2. $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$ すなわち、

$x^2 + y^2 + 4xy = 1$

はどんな曲線を表すか。

練習問題Ｉの略解

(1) $\begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}$と置く。固有方程式は、

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda)+2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda = 3,\ or\ 2$

①$\lambda = 3$

$4-\lambda = 1,\ 1-\lambda = -2$

$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{p}_1 = 0, \mathbf{p}_1 = [p_{11} \quad p_{21}]^T$, を解く。

$1p_{11} - \sqrt{2}p_{21} = 0,\ p_{11} = k$ と置くと、

$p_{21} = \dfrac{k}{\sqrt{2}},\ p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1$ にする。

$$k = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \therefore p_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}},\ p_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

②$\lambda = 2$

$4-\lambda = 2,\ 1-\lambda = -1$

$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{p}_2 = 0, \mathbf{p}_2 = [p_{12} \quad p_{22}]^T$, を解く。

$\sqrt{2}p_{12} - p_{22} = 0,\ p_{22} = k'$ と置くと、

$p_{12} = \dfrac{k'}{\sqrt{2}}, p_{12}^2 + p_{22}^2 = 1$ にする。

$$k' = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, p_{22} = \sqrt{\frac{2}{3}},\ p_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \mathbf{p}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{6} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{p}_1 \bullet \mathbf{p}_2 \neq 0 \rightarrow \mathbf{p}_1$と$\mathbf{p}_2$は直交しない。($\mathbf{A}$ が非対称)

$$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}$と置く。固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} 0.6-\lambda & 0.4 \\ 0.4 & 0.6-\lambda \end{vmatrix} = (0.6-\lambda)^2 - 0.4^2 = (\lambda-1)(\lambda-0.2) = 0$$

$\therefore \lambda = 1\ or\ 0.2$

① $\lambda = 1$ のとき、

$0.6-\lambda = -0.4$

$-0.4p_{11} + 0.4p_{21} = 0 \rightarrow p_{11} = p_{21} = k$

$$p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1 \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = p_{11} = p_{21}$$

② $\lambda = 0.2$ のとき、

$0.6-\lambda = 0.4$

$0.4p_{12} + 0.4p_{22} = 0 \rightarrow -p_{12} = p_{22} = k'$

$$p_{12}^2 + p_{22}^2 = 1 \rightarrow k' = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = p_{22} = -p_{12}$$

Copyright (c) 2006 宮田明則技術士事務所

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\mathbf{p}^{-1}=\mathbf{p}^{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

$\mathbf{p}_1\bullet\mathbf{p}_2=0\rightarrow\mathbf{p}_1$と$\mathbf{p}_2$は直交させられる。($\mathbf{A}$ が対称)

$$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix}$$

(3) $\begin{bmatrix}0.3 & 0.6\\ 0.7 & 0.4\end{bmatrix}\equiv\mathbf{A}$, 固有方程式は、

$$\begin{vmatrix}0.3-\lambda & 0.6\\ 0.7 & 0.4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-0.3)(\lambda-0.4)-0.42=0$$

$$\lambda^2-0.7\lambda-0.3=0\rightarrow\lambda=\frac{0.7\pm\sqrt{1.69}}{2}=1\ or\ -0.3$$

①$\lambda=1$ のとき、$0.3-\lambda=-0.7$

$$-0.7p_{11}+0.6p_{21}=0\rightarrow p_{21}=\frac{7}{6}p_{11}$$

$p_{11}=6$とすれば、$p_{21}=7$、$\mathbf{A}$が非対称なので、$\mathbf{p}$は直交行列でない。したがって絶対値$\neq 1$でもよい。

②$\lambda=-0.3$ のとき、$0.4-\lambda=0.7$

$$0.7p_{12}+0.7p_{22}=0\rightarrow p_{12}=-p_{22}$$

$p_{22}=1$とすれば、$p_{12}=-1$

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix},\mathbf{p}^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -7 & 6\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{p}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -7 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3 & 0.6\\ 0.7 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -0.3\end{bmatrix}$$

(4) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 2-\lambda & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

①$\lambda=4$のとき、

$$-3p_{11}+2p_{21}+0=0$$
$$2p_{11}-2p_{21}+\sqrt{2}p_{31}=0$$
$$0+\sqrt{2}p_{21}-3p_{31}=0$$

$$p_{11}=k,\ p_{21}=\frac{3k}{2},\ p_{31}=\frac{\sqrt{2}}{3}p_{21}=\frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$k=1/\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{15}}$$

②$\lambda=1$のとき、

$$0+2p_{22}+0=0$$
$$2p_{12}+p_{22}+\sqrt{2}p_{32}=0$$
$$0+\sqrt{2}p_{22}+0=0$$

$$p_{22}=0,\ p_{12}=k',\ p_{32}=-\sqrt{2}k',$$

$$k'=1/\sqrt{1^2+(0)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

③$\lambda=-1$のとき、

$$2p_{31}+2p_{32}+0=0$$
$$2p_{31}+3p_{32}+\sqrt{2}p_{33}=0$$
$$0+\sqrt{2}p_{32}+2p_{33}=0$$
$$p_{33}=k'',\ p_{32}=-\sqrt{2}p_{33},\ p_{31}=-p_{32}$$
$$k''=1/\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix} 2/\sqrt{15} & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{15} & 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/\sqrt{15} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{p}^{-1}=\mathbf{p}^T=\begin{bmatrix} 2/\sqrt{15} & 3/\sqrt{15} & \sqrt{2}/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} & -\sqrt{2}/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

以下省略。

(5) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2-\lambda & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)^2=0$$

①$\lambda=1$のとき、

$$-1/2p_{11}+1/4p_{21}+1/4p_{31}=0$$
$$1/4p_{11}-1/2p_{21}+1/4p_{31}=0$$
$$1/4p_{11}+1/4p_{21}-1/2p_{31}=0$$

第1式と第2式の差を取ると、

$$-3/4p_{11}+3/4p_{21}=0,\ p_{11}=k\to p_{21}=k,$$

これを第1式に代入して、

$$-1/4k+1/4p_{31}=0\to p_{31}=k$$
$$k=1/\sqrt{1^2\times 3}=1/\sqrt{3}=p_{11}=p_{21}=p_{31}$$

②$\lambda=1/4$のとき、

$$1/4p_{12}+1/4p_{22}+1/4p_{32}=0$$
$$1/4p_{12}+1/4p_{22}+1/4p_{32}=0$$
$$1/4p_{12}+1/4p_{22}+1/4p_{32}=0$$

3式とも同じなので、2つを自由に取れる。

$p_{22}=k',\ p_{12}=-k'$とすれば、$p_{32}=0$

$$k'=1/\sqrt{2},\ p_{12}=-1/\sqrt{2},\ p_{22}=1/\sqrt{2},\ p_{32}=0$$

(3)$\lambda=1/4$は重根なので、もう一組考える。

上記と同等の等式すなわち、

$p_{13}+p_{23}+p_{33}=0\cdots i$ に加え、

直交条件から、

$$p_{11}p_{13}+p_{21}p_{23}+p_{31}p_{33}=0\cdots ii$$
$$p_{12}p_{13}+p_{22}p_{23}+p_{32}p_{33}=0\cdots iii$$
$$p_{13}p_{13}+p_{23}p_{23}+p_{33}p_{33}=1\cdots iv$$

iiは、$p_{11}=p_{21}=p_{31}$なので、iと同じになる。

iiiから、$\dfrac{-1}{\sqrt{2}}p_{13}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}p_{23}+0=0$

$$\to p_{13}=p_{23}=k''',\to p_{33}=-p_{13}-p_{23}=-2k'''$$
$$k'''=1/\sqrt{1^2\times 2+(-2)^2}=1/\sqrt{6}$$
$$p_{13}=1/\sqrt{6}=p_{23},\ p_{33}=-2/\sqrt{6}$$

Copyright (c) 2006 宮田明則技術士事務所

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1}=\mathbf{p}^{T}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

以下省略。

練習問題Ⅱ

1. $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=48$ すなわち、

$13x^2+15y^2-2\sqrt{3}xy=48$

はどんな曲線を表すか。

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 13 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix}$,固有方程式は、

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0=\begin{vmatrix} 13-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 15-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-13)(\lambda-15)-3$$

$$=\lambda^2-28\lambda+192=(\lambda-16)(\lambda-12)=0$$

$\lambda=16, or\,12$

①$\lambda=16$ のとき、

$13-\lambda=-3,\ 15-\lambda=-1$

$-3p_{11}-\sqrt{3}p_{21}=0,\ p_{11}=k$ と置くと、

$p_{21}=-\sqrt{3}k,\ p_{11}^2+p_{21}^2=1$ にする。

$$k=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{1}{2},\ p_{11}=\frac{1}{2},\ p_{21}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

②$\lambda=12$ のとき、

$13-\lambda=1,\ 15-\lambda=3$

$-\sqrt{3}p_{12}+3p_{22}=0,\ p_{22}=k'$ と置くと、

$p_{12}=\sqrt{3}k',\ p_{12}^2+p_{22}^2=1$ にする。

$$k'=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{1}{2},\ p_{22}=\frac{1}{2},\ p_{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},\ \mathbf{p}^{-1}=\mathbf{p}^{T}=\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda},\ \mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{P}^{T}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ として、

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{T}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\Lambda\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

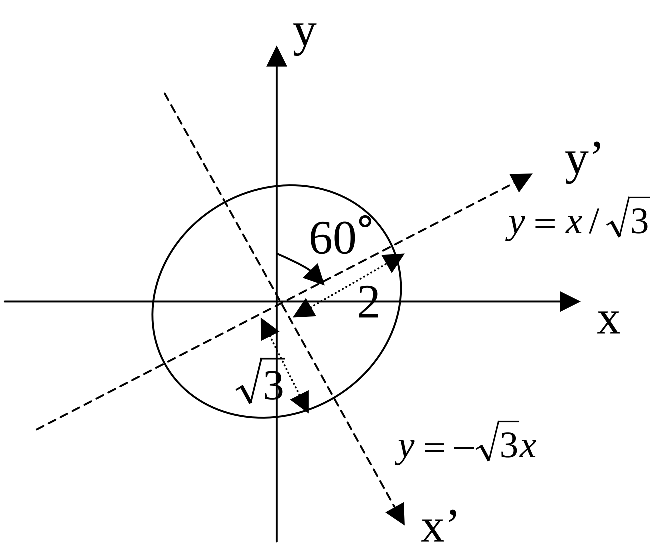
$$=16x'^2+12y'^2=48$$

$$16x'^2 + 12y'^2 = 48$$

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$$

これは、y'軸方向の半径が 2, x'軸方向の半径が$\sqrt{3}$の楕円である。

x'軸、y'軸の向きは、x, y座標の回転が$\mathbf{p}^T$から､60度であるので、座標軸は逆に-60度回転している。



$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

これを満たすθは、$\theta = \pi/3 = 60\,\mathrm{deg}.$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{p}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{p}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

新しいx軸は、$y' = 0$,元の座標系では

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{p}\begin{bmatrix} x' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'/2 \\ -\sqrt{3}x'/2 \end{bmatrix}, x' = 2x,$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x$$

同様にして、新しいy'軸は、$x' = 0$として、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{p}\begin{bmatrix} 0 \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}y'/2 \\ y'/2 \end{bmatrix}, y' = 2y, x = \sqrt{3}y,$$

$\therefore y = x/\sqrt{3}$、座標軸は$-60°$回転している。

座標軸の回転は、$\mathbf{p}$ の示す回転角に等しい。

Copyright (c) 2006 宮田明則技術士事務所

2. $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$ すなわち、

$x^2 + y^2 + 4xy = 1$

はどんな曲線を表すか。

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 2^2 = 0$$

$$= (\lambda - 1 - 2)(\lambda - 1 + 2) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

$\lambda = 3 \ or \ -1$

①$\lambda = 3$ のとき、

$-2p_{11} + 2p_{21} = 0,\ p_{11} = k,\ p_{21} = k$

$k = 1/\sqrt{1^2 \times 2} = 1/\sqrt{2} = p_{11} = p_{21}$

②$\lambda = -1$ のとき、

$2p_{12} + 2p_{22} = 0,\ p_{22} = k',\ p_{12} = -k'$

$k' = 1/\sqrt{1^2 \times 2} = 1/\sqrt{2} = p_{22},\ p_{12} = -1/\sqrt{2}$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\theta = \pi/4 = 45°$,$\mathbf{p}$から座標軸が45°回転。

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{p}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{p}^T\mathbf{x} = \left(\mathbf{p}^T\mathbf{x}\right)^T\boldsymbol{\Lambda}\left(\mathbf{p}^T\mathbf{x}\right)$$

$$= \mathbf{x}'^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= 3x'^2 - y'^2 = \frac{x'^2}{\left(1/\sqrt{3}\right)^2} - \frac{y'^2}{1^2} = 1$$

これは、$y' = \pm\sqrt{3}x'$ を漸近線とする双曲線である。