行列の固有値、固有ベクトルとその応用

n次の正則行列 $\mathbf{A}$に対し、固有方程式 $\left|\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\right|=0$
を満たす $\lambda_i\left(i=1,2,3.\cdots n\right)$ を$\mathbf{A}$の固有値という。
1個の固有値に対し、$\left(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\right)\mathbf{v}_i=0$ を満たす固有
ベクトル $\mathbf{v}_i\left(i=1,2,3.\cdots n\right)$ が得られる。
n個の固有ベクトルを各 列とする行列 $\mathbf{P}$を作ると
$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ は、λ_iを主対角要素とし、他 の要素が
0である行列になる。(このとき、$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}$ でもある。
なお、$\mathbf{A}$が非対称で等根を持つ ときは一部の要素が 1
になる。 p.6 参照)
この応用としては、行 列の多重積、二次形式 の主
軸変換、安定判別など がある。

行列の固有値

ベクトル(縦行列)$\mathbf{v}$が座標変換行列 $\mathbf{A}$によって、$\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ に変換されたとする。ここに、λはスカラーである。この意味は、$\mathbf{A}$による座標変換によっても方向の変らないベクトル $\mathbf{v}$ ($\equiv$固有ベクトル)

($\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{v}$ とλ倍される。即ち、伸縮$(|\lambda| \neq 1)$ あるいは向きの逆転$(\lambda < 0)$はあり得る。)

があると仮定するということである。

$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{v}$, ($\mathbf{I}$は単位行列)と書ける。

すなわち、$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, もし、$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}$が存在すれば、$\mathbf{v} = 0$ になるので、$\mathbf{v} \neq 0$の解があるためには、$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$の逆行列が存在しないことが必要。そのためには$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$の行列式$= 0$, すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} - \lambda & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

この方程式を解くと、n個の λ が得られる。

n個のλ_i (固有値という, $i = 1, 2 \cdots, n$)を求め、次にそれを代入して対応する固有ベクトル $\mathbf{v}$ を求める。n個の固有ベクトルを列要素として行列$\mathbf{P}$を作り、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ を作ると固有値を対角要素とする対角行列$\mathbf{\Lambda}$(ラムダ)になる。

<u>$\mathbf{A}$が対称行列のとき、$\mathbf{P}$は直交行列となり</u>、そのとき、<u>$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$</u> である。

(直交行列とは、i, j列の要素を $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$ とするとき、

$$\mathbf{p}_i \bullet \mathbf{p}_j (= \cos\theta_{ij}) = \delta_{ij},\ \delta_{ij} = \begin{cases} i \neq j \text{ のとき } 0 \\ i = j \text{ のとき } 1 \end{cases}$$

が成り立つ行列である。($\mathbf{p}_i$と$\mathbf{p}_{j \neq i}$ が直交))

例

[固有値]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = 2 \pm 1 = 1 \ or\ 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

[固有ベクトル]

(1) $\lambda=\lambda_1=1$のときの固有ベクトルを、

$[v_{11} \quad v_{21}]^T$とすると、

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}=0$$

$v_{11}+v_{21}=0,\ v_{21}=-v_{11}$,第二式も同じ。

($|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$としているので、解不定となり一つは任意に指定できる。)

$v_{11}=k$とすれば、$v_{21}=-k$,絶対値が1になるように書き直すと、

$$k=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},v_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ v_{21}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

(2) $\lambda=\lambda_2=3$のとき、同様にして、

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}=0$$

$$-v_{12}+v_{22}=0,\ v_{12}=v_{22}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これから、$\mathbf{P}$が直交行列として得られ、

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}=\mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$の両辺に左から$\mathbf{P}$、右から$\mathbf{P}^{-1}$を掛けて、$\underline{\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}}$も得られる。

以下、座標変換と固有ベクトルについて考察して見よう。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{すなわち、} \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

において、$y' = 0,\ x' = 0$ は、座標変換後の x'軸、y'軸を表し、それぞれ、元の座標で、

$x + 2y = 0 \to y = -x/2$

$2x + y = 0 \to y = -2x$

の直線を表す(図1 のx'軸、y'軸)。

固有ベクトルの座標変 換は、

$[\mathbf{p}_1' \quad \mathbf{p}_2'] = \mathbf{A}[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2]$, すなわち、

$$\begin{bmatrix} p_{11}' & p_{12}' \\ p_{21}' & p_{22}' \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

すなわち、$\mathbf{p}_1' = 1\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2' = 3\mathbf{p}_2$ であり、座標変換でベクトルの方向は不変、大きさは λ 倍になっている。また、変換後の座標系は直交座標系ではなくなっ ている。

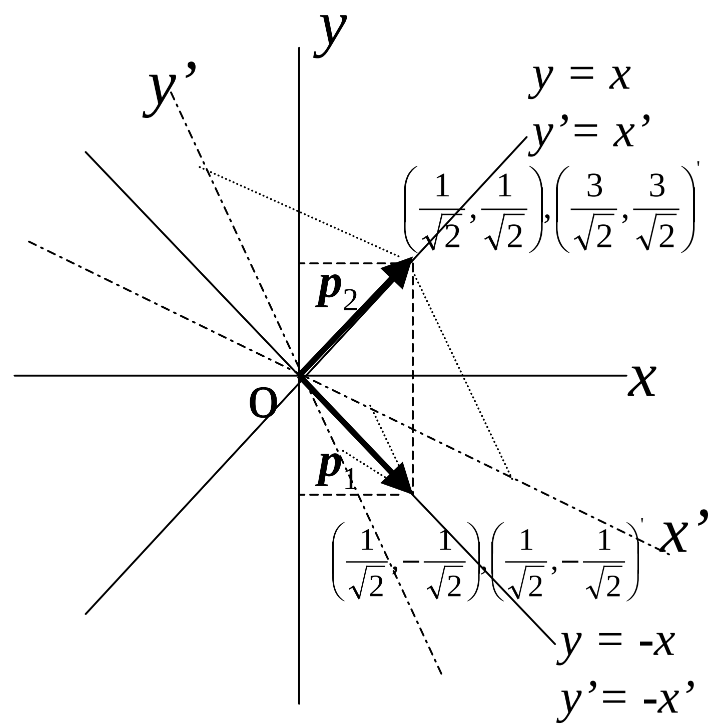


図1. **A** による座標変換と固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$

$x - y$ 座標系から$x' - y'$座標系に変化しても、$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を含む直線である $y = x$ および $y = -x$ の二つの直線は、$y' = x'$ および $y' = -x'$ で変化しないことが次式で分かる。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3x \end{bmatrix} \text{から、} y' = x'$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} \text{から、} y' = -x'$$

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ の場合

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2-\lambda\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\left\{(2-\lambda)^2-1\right\}-2(1-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)-2(1-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)\left\{(2-\lambda)(3-\lambda)-2\right\}$$

$$=(1-\lambda)\left(\lambda^2-5\lambda+4\right)$$

$$=(1-\lambda)^2(4-\lambda)=0$$

$\lambda=1, 1, 4$ (固有値に等根1を含む。)

$\lambda=1$ のとき、

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=0$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=0$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=0$

この 3 式は同じで3変数に1つの式なので

2 つの変数は任意に決められる。

仮に、$x_{11}=1, x_{21}=-1, x_{31}=0$とし、

絶対値が 1 になるように変更して、

$x_{11}=1/\sqrt{2},\ x_{21}=-1/\sqrt{2},\ x_{31}=0$

第2列についても、$\lambda=1$として、

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=0$ が 3つ得られる。

第1列と直交するように定めるが、

仮に、$x_{12}=x_{22}=1$としてみると、$x_{32}=-2$

絶対値が1になるように決めなおすと、

$x_{13}=x_{23}=-1/\sqrt{6},\ x_{33}=2/\sqrt{6}$ となる。

$\lambda=4$のとき、

$-2x_{11}+x_{21}+x_{31}=0\cdots$①

$x_{11}-2x_{21}+x_{31}=0\cdots$②

$x_{11}+x_{21}-2x_{31}=0\cdots$③

①−②　$-3x_{11}+3x_{21}=0$

②×2+③　$3x_{11}-3x_{21}=0\cdots$上式と同じ

$x_{11}=1$として、$x_{21}=1,\ x_{31}=1,$ 絶対値が

になるよう、$x_{11}=x_{21}=x_{31}=1/\sqrt{3}$ と変更。

結局、

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

が得られる。

この例のように、
一般に、**A** が対称行列で固有方程式が等根を含む場合、固有ベクトルの自由度が高まるが各列間に直交性が成り立つように選ぶことができる。
A が非対称で、固有方程式が等根を含む場合は、対角行列ではなく、それに近いジョルダン標準形という形に変形できる。
ジョルダン標準形 **J** は、対角要素の付近の部分が、ジョルダン細胞と呼ばれる次のような形に置き換わった形である。

$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$, λ_i が2重根の場合、

$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$, λ_i が3重根の場合、

$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$, λ_i がk重根の場合、

変換行列 $\mathbf{P}$ は、$\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$ から、

$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$, $\mathbf{J} = [\mathbf{j}_1 \quad \mathbf{j}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{j}_n]$

($\mathbf{p}_i$, $\mathbf{j}_i$ は、$\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$ の列要素)
として、

$\mathbf{AP} = [\mathbf{Ap}_1 \quad \mathbf{Ap}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Ap}_n]$,

$\mathbf{PJ} = \mathbf{P}[\mathbf{j}_1 \quad \mathbf{j}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{j}_n]$ なので、

$\mathbf{Ap}_i = \mathbf{Pj}_i$

として求められる。(詳細省略)

練習問題 I

(1) $\begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$, (3) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$, (5) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

応用1　行列の多重積

推移行列の無限回積

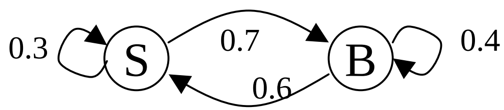


図2. ストライク S とボール B の推移確率

$$\begin{bmatrix} p_{s,n+1} \\ p_{b,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{s,n} \\ p_{b,n} \end{bmatrix} \to \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{p}_n$$

固有方程式は、

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0.3-\lambda & 0.6 \\ 0.7 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} = 0\text{、これから、}$$

$$\lambda^2 - 0.7\lambda - 0.30 = 0$$

$$\lambda = 0.35 \pm \sqrt{0.35^2 + 0.30}$$

$$= 0.35 \pm 0.65 = -0.3 \, or \, 1.0$$

$(1)\ \lambda = 1$

$$-0.7p_{11} + 0.6p_{21} = 0,\ p_{21}/p_{11} = 7/6$$

$p_{11} = 6,\ p_{21} = 7$ とする。

$(2)\ \lambda = -0.3$

$$0.6p_{12} + 0.6p_{22} = 0,\ p_{12}/p_{22} = -1$$

$p_{12} = -1,\ p_{22} = 1$ とする。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22} = (-6\times 1 + 7\times 1) \neq 0$$

$\mathbf{A}$ が非対称行列なので $\mathbf{P}$ は直交行列ではない。

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0.3 \\ 7 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -3.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1},$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\cdots\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

$$= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}\cdots\mathbf{I}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\left(\lambda_i^{\,n}\right)\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-0.3)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/13 & 1/13 \\ -7/13 & 6/13 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/13 & 1/13 \\ -7/13 & 6/13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/13 & 1/13 \\ -7/13 & 6/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/13 & 6/13 \\ 7/13 & 7/13 \end{bmatrix}$$

第1球が S のとき、$p_{s1} = 1,\ p_{b1} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} p_{s,n} \\ p_{b,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/13 & 6/13 \\ 7/13 & 7/13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/13 \\ 7/13 \end{bmatrix}$$

応用2 二次形式と主軸変換

n次元ベクトル$\mathbf{x}$と$n\times n$対称行列$\mathbf{A}$とで作る$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$を二次形式という。

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\text{のとき,}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2$$
$$+(a_{23}+a_{32})x_2x_3+(a_{31}+a_{13})x_3x_1$$

$n=3$で$\mathbf{A}$が対称行列のとき、
$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=1$は二次曲面を表す。
(楕円面、一葉～二葉双曲面)
座標変換によって$\mathbf{A}$を対角行列に変換すれば、固有値に等しい
$a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$の項だけになる。

$\mathbf{A}$の固有値から固有ベクトル行列$\mathbf{P}$を求めると、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}\rightarrow\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$,
$(\mathbf{U}\mathbf{V})^T=\mathbf{V}^T\mathbf{U}^T$ を利用して、

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}=(\mathbf{P}^T\mathbf{x})^T\mathbf{\Lambda}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x})$$

$\mathbf{A}$が対称で、$\mathbf{P}^T=\mathbf{P}^{-1}$が成り立つとき
$\mathbf{x}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$と変換すれば、

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{x}'^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}'=\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2+\lambda_3 x_3'^2$$

となる。

例

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=6$$

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$=(3-\lambda)\{(5-\lambda)(3-\lambda)-1\}+(1-3+\lambda)+$$
$$(1-5+\lambda)$$
$$=-\lambda^3+11\lambda^2-36\lambda+36$$
$$=-(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)=0$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$、以下、$\mathbf{A}$が対称で$\mathbf{P}$は直交行列にできることを利用。

(1) $\lambda = 2$

$v_{11} + v_{21} + v_{31} = 0 \cdots$ ①

$v_{11} + 3v_{21} + v_{31} = 0 \cdots$ ②

$v_{11} + v_{21} + v_{31} = 0 \cdots$ ③

② − ①　$2v_{21} = 0 \rightarrow v_{21} = 0$

$\therefore v_{11} + v_{31} = 0 \rightarrow v_{31} = -v_{21}$

$v_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$とすれば, $v_{21} = 0, v_{31} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

(2) $\lambda = 3$

$0v_{12} + v_{22} + v_{32} = 0 \cdots$ ④

$v_{12} + 2v_{22} + v_{32} = 0 \cdots$ ⑤

$v_{12} + v_{22} + 0v_{32} = 0 \cdots$ ⑥

⑤ − ④　$v_{12} + v_{22} = 0 \rightarrow v_{12} = -v_{22}$

⑥　$v_{22} + v_{32} = 0 \rightarrow v_{32} = -v_{22}$

$v_{12}^2 + v_{22}^2 + v_{32}^2 = 3v_{22}^2 = 1$ と置けば、

$\rightarrow v_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -v_{12} = -v_{32}$

$v_{12} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, v_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, v_{32} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

(3) $\lambda = 6$

$-3v_{13} + v_{23} + v_{33} = 0 \cdots$ ⑦

$v_{13} - v_{23} + v_{33} = 0 \cdots$ ⑧

$v_{13} + v_{23} - 3v_{33} = 0 \cdots$ ⑨

⑧ − ⑦　$4v_{13} - 2v_{23} = 0 \rightarrow v_{13} = v_{23}/2$

⑧ − ⑨　$2v_{23} - 4v_{33} = 0 \rightarrow v_{23} = 2v_{33}$

$v_{13}^2 + v_{23}^2 + v_{33}^2 = (1 + 2^2 + 1)v_{33}^2 = 1$ と置けば、

$\rightarrow v_{33} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}, v_{13} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}, v_{23} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

$$\therefore \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$と置けば、$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$,

すなわち、$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{x}' = \mathbf{x}'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}' = 6$

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

$= 2x_1'^2 + 3x_2'^2 + 6x_3'^2 = 6$

$x_i'^2$ の係数が固有値になっている。

$$\therefore \frac{x_1^{'2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{x_2^{'2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{x_3^{'2}}{1^2}=1,$$

これは楕円面を表す。

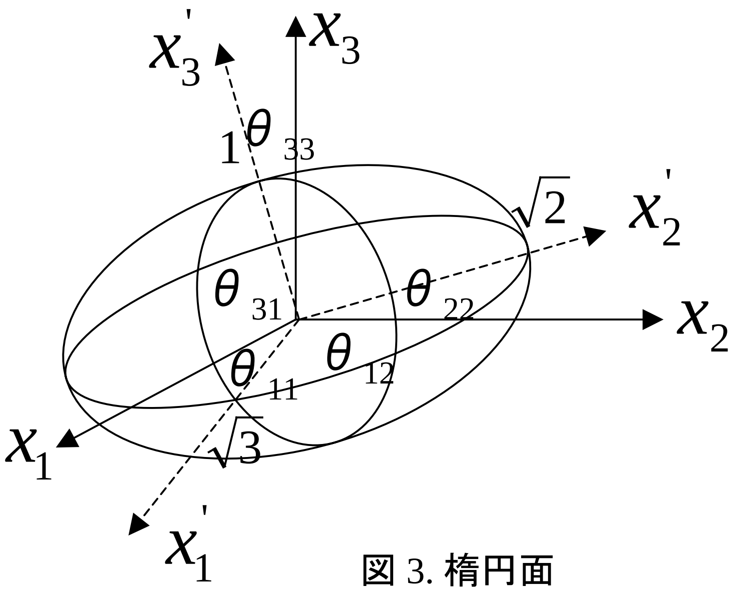


図 3. 楕円面

座標変換 $\mathbf{x}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$による変換後の基準軸を主軸、その方向を主方向という。

Pの各列は、各対応軸間の角の方向余弦である。**次頁考察 2 参照**。

$\mathbf{p}_1=(\cos\theta_{11}, \cos\theta_{21}, \cos\theta_{31})$

$\mathbf{p}_2=(\cos\theta_{12}, \cos\theta_{22}, \cos\theta_{32})$

$\mathbf{p}_3=(\cos\theta_{13}, \cos\theta_{23}, \cos\theta_{33})$

[考察 1ー直交性と右手系であることの説明]

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$ において、

$$\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

とおけば、

$$\mathbf{p}_1^T\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_1\bullet\mathbf{p}_1=\left(1/\sqrt{2}\right)^2+0+\left(-1/\sqrt{2}\right)^2=1,$$

$$\mathbf{p}_2^T\mathbf{p}_2=\left(-1/\sqrt{3}\right)^2+\left(1/\sqrt{3}\right)^2+\left(-1/\sqrt{3}\right)^2=1$$

$$\mathbf{p}_3^T\mathbf{p}_3=\left(1/\sqrt{6}\right)^2+\left(2/\sqrt{6}\right)^2+\left(1/\sqrt{6}\right)^2=1$$

$$\mathbf{p}_1^T\mathbf{p}_2=\left(1/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{3}\right)+0+\left(-1/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{3}\right)=0$$

$$\mathbf{p}_1^T\mathbf{p}_3=\left(1/\sqrt{2}\right)\left(1/\sqrt{6}\right)+0+\left(-1/\sqrt{2}\right)\left(1/\sqrt{6}\right)=0$$

$$\mathbf{p}_2^T\mathbf{p}_3=\left(-1/\sqrt{3}\right)\left(1/\sqrt{6}\right)+\left(1/\sqrt{3}\right)\left(2/\sqrt{6}\right)+$$
$$+\left(-1/\sqrt{3}\right)\left(1/\sqrt{6}\right)=0$$

すなわち、

$\mathbf{P}^T\mathbf{P}=\mathbf{I}, \therefore \mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^T$, 行と列を入れ換えると逆行列になる。

$$\mathbf{p}_1\times\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_3,\ \mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_3\times\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}_1\times\mathbf{p}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3}\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\left(0\times\left(-1/\sqrt{3}\right)-\left(-1/\sqrt{2}\right)\left(1/\sqrt{3}\right)\right)+$$
$$\mathbf{j}\left(\left(-1/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{3}\right)-\left(1/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{3}\right)\right)+$$
$$\mathbf{k}\left(\left(1/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{3}\right)-\left(-1/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{3}\right)\right)$$
$$=\left(1/\sqrt{6}\right)\mathbf{i}+\left(2/\sqrt{6}\right)\mathbf{j}+\left(1/\sqrt{6}\right)\mathbf{k}=\mathbf{p}_3$$

他は省略、これから、右手系であることも分かる。

[考察 2—$\mathbf{P}^{-1}$ が方向余弦であることの説明]

$\mathbf{x}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ において、変換前の単位ベクトルを

$\mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, 変換後を、$\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}'$として、

$$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^T=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{21} & p_{31}\\ p_{12} & p_{22} & p_{32}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1' & \mathbf{p}_2' & \mathbf{p}_3'\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}\mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}'\end{bmatrix}=\mathbf{P}^T\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{bmatrix}=\mathbf{P}^T\mathbf{I}=\mathbf{P}^T$ から、

$$\begin{bmatrix}\mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1' & \mathbf{p}_2' & \mathbf{p}_3'\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{i}'=\mathbf{p}_1',\ \mathbf{j}'=\mathbf{p}_2',\ \mathbf{k}'=\mathbf{p}_3'$$

$$\cos\theta_{11}=\mathbf{i}'\bullet\mathbf{i}=\mathbf{p}_1'\bullet\mathbf{i}=p_{11},\cos\theta_{12}=\mathbf{i}'\bullet\mathbf{j}=\mathbf{p}_1'\bullet\mathbf{j}=p_{12},$$
$$\cos\theta_{13}=\mathbf{i}'\bullet\mathbf{k}=\mathbf{p}_1'\bullet\mathbf{k}=p_{13},\cos\theta_{21}=\mathbf{j}'\bullet\mathbf{i}=\mathbf{p}_2'\bullet\mathbf{i}=p_{21}$$
$$\cos\theta_{22}=\mathbf{j}'\bullet\mathbf{j}=\mathbf{p}_2'\bullet\mathbf{j}=p_{22},\cos\theta_{33}=\mathbf{k}'\bullet\mathbf{k}=\mathbf{p}_3'\bullet\mathbf{k}=p_{33}$$

2次元では、次のようになる。

$\mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,, 変換後を、$\mathbf{i}',\mathbf{j}'$として、

$$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^T=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1' & \mathbf{p}_2'\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}\mathbf{i}' & \mathbf{j}'\end{bmatrix}=\mathbf{P}^T\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j}\end{bmatrix}=\mathbf{P}^T\mathbf{I}=\mathbf{P}^T$ から、

$$\begin{bmatrix}\mathbf{i}' & \mathbf{j}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1' & \mathbf{p}_2'\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{i}'=\mathbf{p}_1',\ \mathbf{j}'=\mathbf{p}_2'$$

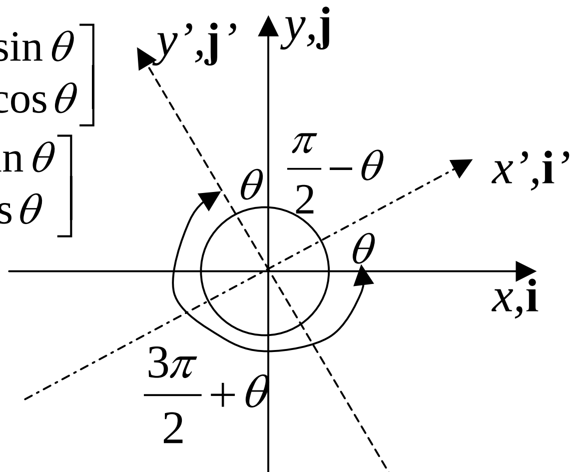
$$\cos\theta_{11}=\mathbf{i}'\bullet\mathbf{i}=\mathbf{p}_1'\bullet\mathbf{i}=p_{11},$$
$$\cos\theta_{12}=\mathbf{i}'\bullet\mathbf{j}=\mathbf{p}_1'\bullet\mathbf{j}=p_{12},$$
$$\cos\theta_{21}=\mathbf{j}'\bullet\mathbf{i}=\mathbf{p}_2'\bullet\mathbf{i}=p_{21},$$
$$\cos\theta_{22}=\mathbf{j}'\bullet\mathbf{j}=\mathbf{p}_2'\bullet\mathbf{j}=p_{22}$$

$p_{11}=\cos\theta$とすれば、下図から、

$$p_{12}=\cos\left(\pi/2-\theta\right)=\sin\theta$$
$$p_{21}=\cos\left(3\pi/2+\theta\right)=-\sin\theta$$
$$p_{22}=\cos\theta$$

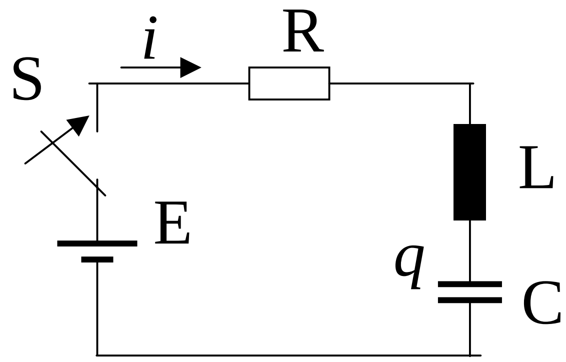
$$\mathbf{P}^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$



応用3　安定判別と固有値

例.RLC直列回路



微分方程式

$$iR+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}q=E,\ \frac{dq}{dt}=i$$

$\dot{i},\ \dot{q}$ の式として書き直すと

$$\dot{i}=\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i-\frac{1}{LC}q+\frac{E}{L}$$

$$\dot{q}=\frac{dq}{dt}=i$$

$$\begin{bmatrix}\dot{i}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-R/L & -1/LC\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E/L\\ 0\end{bmatrix}$$

ラプラス変換して、$i\to I, q\to Q$

$$\begin{bmatrix}sI-i(0^+)\\ sQ-q(0^+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-R/L & -1/LC\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ Q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E/L\\ 0\end{bmatrix}$$

$$s\begin{bmatrix}I\\ Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-R/L & -1/LC\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ Q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E/sL+i(0^+)\\ q(0^+)\end{bmatrix}$$

$i(0^+)=i_0,\ q(0^+)=q_0$ とする。

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}I\\ Q\end{bmatrix}, \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-R/L & -1/LC\\ 1 & 0\end{bmatrix}. \mathbf{K}=\begin{bmatrix}E/sL+i_0\\ q_0\end{bmatrix}$$

と書くと、$s\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{K}$ となる。

$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{K}$ と変形して、

$$\mathbf{x}=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{K}$$

$$\begin{bmatrix}I\\ Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+R/L & 1/LC\\ -1 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}E/sL+i_0\\ q_0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}s & -1/LC\\ 1 & s+R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E/sL+i_0\\ q_0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}E/L+si_0-q_0/LC\\ E/sL+i_0+sq_0+q_0R/L\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}s+R/L & 1/LC\\ -1 & s\end{vmatrix}=s^2+sR/L+1/LC$$

$\equiv(s-\alpha)(s-\beta),\ \alpha,\beta$ は $\Delta=0$ の解である。

$\Delta=0$ をこの系の特性方程式と呼ぶ。

$$\alpha,\beta=-R/2L\pm\sqrt{(R/2L)^2-1/LC}$$

$$I=\frac{E/L+si_0-q_0/LC}{(s-\alpha)(s-\beta)}$$

$$Q=\frac{E/L+si_0}{s(s-\alpha)(s-\beta)}+\frac{s+R/L}{(s-\alpha)(s-\beta)}q_0$$

$$I=\frac{E/L+si_0-q_0/LC}{(s-\alpha)(s-\beta)}$$

$$Q=\frac{E/L+si_0}{s(s-\alpha)(s-\beta)}+\frac{s+R/L}{(s-\alpha)(s-\beta)}q_0$$

これから、ラプラス逆 変換して、

$$i=\frac{E/L+\alpha i_0-q_0/LC}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{\alpha t}+\frac{E/L+\beta i_0-q_0/LC}{\beta(\beta-\alpha)}e^{\beta t}$$

$$q=\frac{E/L}{(-\alpha)(-\beta)}+\frac{E/L+\alpha i_0}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{\alpha t}+\frac{E/L+\beta i_0}{\beta(\beta-\alpha)}e^{\beta t}+\frac{\alpha+R/L}{(\alpha-\beta)}q_0e^{\alpha t}+\frac{\beta+R/L}{(\beta-\alpha)}q_0e^{\beta t}$$

i, q は、$\alpha,\beta=r\pm j\omega$ と書けば、$e^{\alpha t}=e^{(r+j\omega)t}, e^{\beta t}=e^{(r-j\omega)t}$ の項の和になっている 。i,q が安定であるかどうか は、特性方程式の解 α、β の実数部 r の正負によって定まる。$e^{\alpha t}=e^{rt}e^{j\omega t}=e^{rt}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$ なので、実数部 r が負なら振幅 e^{rt} が $t\to\infty$ のとき $e^{rt}\to 0$ に収斂し安定である。$r>0$ のときは t の増加と共に振幅が拡大し収斂しないので 不安定である。

α、β は、特性方程式 $\Delta=0$ の解で、

$$\Delta=\begin{vmatrix}R/L+s & 1/LC\\ -1 & s\end{vmatrix}=s^2+sR/L+1/LC=0$$ から求められる。

$$\begin{bmatrix}s+R/L & 1/LC\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}R/L & 1/LC\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0$$ を考えると、

$$\begin{bmatrix}-R/L & -1/LC\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$ となり、行列 $\begin{bmatrix}-R/L & -1/LC\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{A}$ の固有値として s が求められる。

固有値による安定判別 解析手順(まとめ)

(1)一次の連立微分方程式 をたてる。
高次の場合は、変数を 必要なだけ追加して
$x_n = \dfrac{dx_{n-1}}{dt}$ のようにして新たな変 数 x_n と式を
追加して一次連立形に する。
(2) $X_i(s) = L\{x_i(t)\}$ $etc.$ としてラプラス変換
した式 $s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{B}(s)$ を作る。
このとき、$X(s) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} B(s)$ である。
(3) 特性方程式 $\Delta = |\mathbf{sI} - \mathbf{A}| = 0$ を解き、
解 $s_1, s_2, s_3, \cdots s_n$ を得る。
固有値は、$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ から、$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ の解で
$\lambda = s$、特性方程式の解 $=$ 固有値 である。
(4)すべての固有値 s_i の実数部が負のとき
安定である。$s_i = r_i + j\omega_i$ と書いたとき、x_k が、

$$c_i e^{s_i t} = c_i e^{(r_i + j\omega_i)t} = c_i e^{r_i t} e^{j\omega_i t}$$

の和になるが、$e^{j\omega_i t}$ は $\cos, \sin$ の振動項、$e^{r_i t}$
がその振幅なので、$r_i < 0$ なら $e^{r_i t} \to 0 \, (t \to \infty)$
で、t に関わる項が消滅し安 定である。
$r_i > 0$ のときは、振幅が拡大 し不安定である。

先の例では、

$$\Delta = \begin{vmatrix} s + R/L & 1/LC \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + sR/L + 1/LC$$

$$\equiv (s - s_1)(s - s_2),$$

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$$

$$or \quad = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$$

いずれも、$\dfrac{R}{2L} > 0$ ならば、$\mathrm{Re}(s_i) < 0$ で安定。
実際、R, L が通常の抵抗、インダクタンス
であれば、これは成立するので、この例は
常に安定となる。