

行列の固有値、固有ベクトルとその応用

n 次の正則行列 \mathbf{A} に対し、固有方程式 $|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0$ を満たす λ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) を \mathbf{A} の固有値という。
1 個の固有値に対し、 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = 0$ を満たす固有ベクトル \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) が得られる。
 n 個の固有ベクトルを各列とする行列 \mathbf{P} を作ると $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ は、 λ_i を主対角要素とし、他の要素が 0 である行列になる。(このとき、 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ でもある。なお、 \mathbf{A} が非対称で等根を持つときは一部の要素が 1 になる。p.6 参照)
この応用としては、行列の多重積、二次形式の主軸変換、安定判別などがある。

行列の固有値

ベクトル(縦行列) \mathbf{v} が座標変換行列 \mathbf{A} によって、 $\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ に変換されたとする。ここに、 λ はスカラーである。この意味は、 \mathbf{A} による座標変換によっても方向の変らないベクトル \mathbf{v} (\equiv 固有ベクトル)
 $(\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{v}$ と λ 倍される。即ち、伸縮($|\lambda| \neq 1$)
 (あるいは向きの逆転($\lambda < 0$)はあり得る。)
 があると仮定するということである。

$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{v}$, (\mathbf{I} は単位行列)と書ける。
 すなわち、 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, もし、 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}$ が存在すれば、 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ になるので、 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ の解があるためには、 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ の逆行列が存在しないことが必要。そのためには
 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ の行列式 $= 0$, すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} - \lambda & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

この方程式を解くと、 n 個の λ が得られる。

n 個の λ_i (固有値という, $i=1,2,\dots,n$)を求め、次にそれを代入して対応する固有ベクトル \mathbf{v} を求める。 n 個の固有ベクトルを列要素として行列 \mathbf{P} を作り、 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ を作ると固有値を対角要素とする対角行列 $\mathbf{\Lambda}$ (ラムダ)になる。 \mathbf{A} が対称行列のとき、 \mathbf{P} は直交行列となり、そのとき、 $\mathbf{P}^{-1} \equiv \mathbf{P}^T$ である。

(直交行列とは、 i, j 列の要素を $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$ とするとき、
 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j (= \cos \theta_{ij}) = \delta_{ij}, \delta_{ij} = \begin{cases} i \neq j \text{ のとき } 0 \\ i = j \text{ のとき } 1 \end{cases}$
 が成り立つ行列である。 $(\mathbf{p}_i$ と $\mathbf{p}_{j \neq i}$ が直交))

例

[固有値]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = 2 \pm 1 = 1 \text{ or } 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

【固有ベクトル】

(1) $\lambda = \lambda_1 = 1$ のときの固有ベクトルを、

$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \end{bmatrix}^T$ とすると、

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0$$

$v_{11} + v_{21} = 0$, $v_{21} = -v_{11}$, 第二式も同じ。

($|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ としているので、解不定) となり一つは任意に指定できる。

$v_{11} = k$ とすれば、 $v_{21} = -k$, 絶対値が1になるように書き直すと、

$$k = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, v_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, v_{21} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

(2) $\lambda = \lambda_2 = 3$ のとき、同様にして、

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$-v_{12} + v_{22} = 0, v_{12} = v_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これから、 \mathbf{P} が直交行列として得られ、

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ の両辺に左から \mathbf{P} 、右から \mathbf{P}^{-1} を掛けて、 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ も得られる。

以下、座標変換と固有ベクトルについて考察して見よう。

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ すなわち、 $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

において、 $y' = 0$, $x' = 0$ は、座標変換後の x' 軸、 y' 軸を表し、それぞれ、元の座標で、

$x + 2y = 0 \rightarrow y = -x/2$

$2x + y = 0 \rightarrow y = -2x$

の直線を表す(図1の x' 軸、 y' 軸)。

固有ベクトルの座標変換は、
 $\begin{bmatrix} p_1' & p_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ すなわち、

$$\begin{bmatrix} p_{11}' & p_{12}' \\ p_{21}' & p_{22}' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

すなわち、 $\mathbf{p}_1' = 1\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2' = 3\mathbf{p}_2$ であり、座標変換でベクトルの方向は不変、大きさは λ 倍になっている。また、変換後の座標系は直交座標系ではなくなっている。

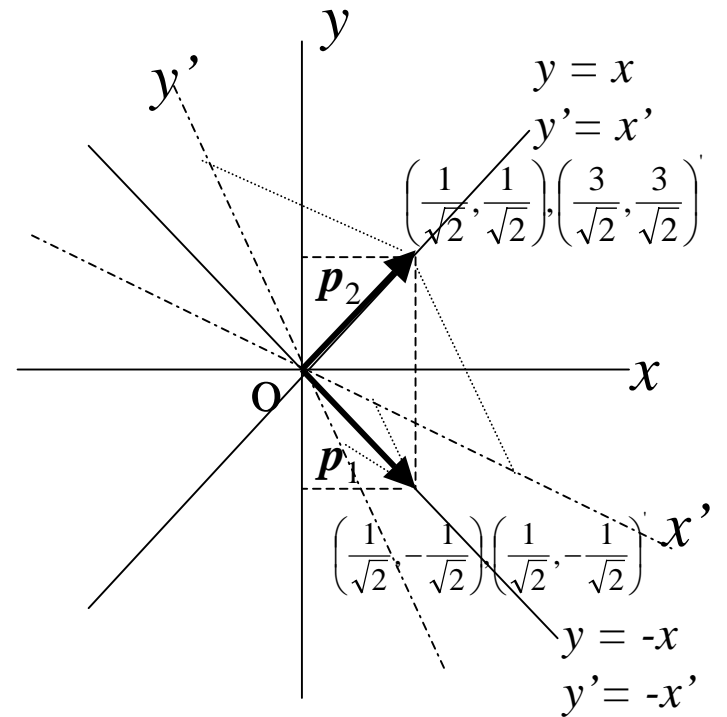


図1. \mathbf{A} による座標変換と固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$

$x-y$ 座標系から $x'-y'$ 座標系に変化しても、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を含む直線である $y = x$ および $y = -x$ の二つの直線は、 $y' = x'$ および $y' = -x'$ で変化しないことが次式で分かる。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3x \end{bmatrix} \text{ から、 } y' = x'$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} \text{ から、 } y' = -x'$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ の場合}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \{(2-\lambda)^2 - 1\} - 2(1-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda) \{(2-\lambda)(3-\lambda) - 2\}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

$\lambda = 1, 1, 4$ (固有値に等根1を含む。)

$\lambda = 1$ のとき、

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0$$

この3式は同じで3変数に1つの式なので
2つの変数は任意に決められる。

仮に、 $x_{11} = 1, x_{21} = -1, x_{31} = 0$ とし、
絶対値が1になるように変更して、

$$x_{11} = 1/\sqrt{2}, x_{21} = -1/\sqrt{2}, x_{31} = 0$$

第2列についても、 $\lambda = 1$ として、

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 0$ が3つ得られる。

第1列と直交するように定めるが、

仮に、 $x_{12} = x_{22} = 1$ としてみると、 $x_{32} = -2$

絶対値が1になるように決めなおすと、

$$x_{13} = x_{23} = -1/\sqrt{6}, x_{33} = 2/\sqrt{6} \text{ となる。}$$

$\lambda = 4$ のとき、

$$-2x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$x_{11} - 2x_{21} + x_{31} = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$x_{11} + x_{21} - 2x_{31} = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad -3x_{11} + 3x_{21} = 0$$

$$\textcircled{2} \times 2 + \textcircled{3} \quad 3x_{11} - 3x_{21} = 0 \dots \text{上式と同じ}$$

$x_{11} = 1$ として、 $x_{21} = 1, x_{31} = 1$, 絶対値が

になるよう、 $x_{11} = x_{21} = x_{31} = 1/\sqrt{3}$ と変更。

結局、

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

が得られる。

この例のように、

一般に、 \mathbf{A} が対称行列で固有方程式が等根を含む場合、固有ベクトルの自由度が高まるが各列間に直交性が成り立つように選ぶことができる。

\mathbf{A} が非対称で、固有方程式が等根を含む場合は、対角行列ではなく、それに近いジョルダン標準形という形に変形できる。ジョルダン標準形 \mathbf{J} は、対角要素の付近の部分が、ジョルダン細胞と呼ばれる次のような形に置き換わった形である。

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \lambda_i \text{ が2重根の場合、}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \lambda_i \text{ が3重根の場合、}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}, \lambda_i \text{ が} k \text{重根の場合、}$$

変換行列 \mathbf{P} は、 $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$ から、

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n], \mathbf{J} = [\mathbf{j}_1 \quad \mathbf{j}_2 \quad \dots \quad \mathbf{j}_n]$$

($\mathbf{p}_i, \mathbf{j}_i$ は、 \mathbf{P}, \mathbf{J} の列要素)

として、

$$\mathbf{AP} = [\mathbf{Ap}_1 \quad \mathbf{Ap}_2 \quad \dots \quad \mathbf{Ap}_n],$$

$$\mathbf{PJ} = \mathbf{P}[\mathbf{j}_1 \quad \mathbf{j}_2 \quad \dots \quad \mathbf{j}_n] \text{なので、}$$

$$\mathbf{Ap}_i = \mathbf{Pj}_i$$

として求められる。(詳細省略)

練習問題 I

$$(1) \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, (3) \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, (5) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

応用1 行列の多重積

推移行列の無限回積

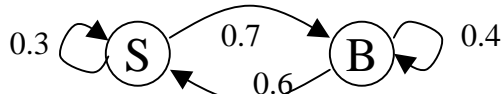


図2. ストライク S とボール B の推移確率

$$\begin{bmatrix} p_{s,n+1} \\ p_{b,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{s,n} \\ p_{b,n} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{p}_n$$

固有方程式は、

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0.3 - \lambda & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ これから、}$$

$$\lambda^2 - 0.7\lambda - 0.30 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.35 \pm \sqrt{0.35^2 + 0.30} \\ &= 0.35 \pm 0.65 = -0.3 \text{ or } 1.0 \end{aligned}$$

(1) $\lambda = 1$

$$-0.7p_{11} + 0.6p_{21} = 0, p_{21} / p_{11} = 7/6$$

$$p_{11} = 6, p_{21} = 7 \text{ とする。}$$

(2) $\lambda = -0.3$

$$0.6p_{12} + 0.6p_{22} = 0, p_{12} / p_{22} = -1$$

$$p_{12} = -1, p_{22} = 1 \text{ とする。}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22} = (-6 \times 1 + 7 \times 1) \neq 0$
 \mathbf{A} が非対称行列なので \mathbf{P} は直交行列ではない。

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0.3 \\ 7 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -3.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1},$$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} \dots \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

$$= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}\mathbf{I} \dots \mathbf{I}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}(\lambda_i^n)\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-0.3)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/13 & 1/13 \\ -7/13 & 6/13 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/13 & 1/13 \\ -7/13 & 6/13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/13 & 1/13 \\ -7/13 & 6/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/13 & 6/13 \\ 7/13 & 7/13 \end{bmatrix}$$

第1球がSのとき、 $p_{s1} = 1, p_{b1} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p_{s,n} \\ p_{b,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/13 & 6/13 \\ 7/13 & 7/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/13 \\ 7/13 \end{bmatrix}$$

応用2 二次形式と主軸変換

n 次元ベクトル \mathbf{x} と $n \times n$ 対称行列 \mathbf{A} とで作る $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ を二次形式という。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ のとき,}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + (a_{31} + a_{13})x_3x_1$$

$n=3$ で \mathbf{A} が対称行列のとき、

$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$ は二次曲面を表す。

(楕円面、一葉～二葉双曲面)

座標変換によって \mathbf{A} を対角行列に変換すれば、固有値に等しい

$a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$ の項だけになる。

\mathbf{A} の固有値から固有ベクトル行列 \mathbf{P} を求めると、 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^{-1}$,
($\mathbf{UV})^T = \mathbf{V}^T \mathbf{U}^T$ を利用して、

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} = (\mathbf{P}^T \mathbf{x})^T \Lambda (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{x})$$

\mathbf{A} が対称で、 $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ が成り立つとき

$\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$ と変換すれば、

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \Lambda \mathbf{x}' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2$$

となる。

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 6$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (3-\lambda)\{(5-\lambda)(3-\lambda)-1\} + (1-3+\lambda) + (1-5+\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ 、以下、 \mathbf{A} が対称で \mathbf{P} は直交行列にできることを利用。

(1) $\lambda = 2$

$$v_{11} + v_{21} + v_{31} = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$v_{11} + 3v_{21} + v_{31} = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$v_{11} + v_{21} + v_{31} = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad 2v_{21} = 0 \rightarrow v_{21} = 0$$

$$\therefore v_{11} + v_{31} = 0 \rightarrow v_{31} = -v_{21}$$

$$v_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{とすれば, } v_{21} = 0, v_{31} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

(2) $\lambda = 3$

$$0v_{12} + v_{22} + v_{32} = 0 \cdots \textcircled{4}$$

$$v_{12} + 2v_{22} + v_{32} = 0 \cdots \textcircled{5}$$

$$v_{12} + v_{22} + 0v_{32} = 0 \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} - \textcircled{4} \quad v_{12} + v_{22} = 0 \rightarrow v_{12} = -v_{22}$$

$$\textcircled{6} \quad v_{22} + v_{32} = 0 \rightarrow v_{32} = -v_{22}$$

$$v_{12}^2 + v_{22}^2 + v_{32}^2 = 3v_{22}^2 = 1 \text{ と置けば、}$$

$$\rightarrow v_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} = -v_{12} = -v_{32}$$

$$v_{12} = \frac{-1}{\sqrt{3}}, v_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}, v_{32} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

(3) $\lambda = 6$

$$-3v_{13} + v_{23} + v_{33} = 0 \cdots \textcircled{7}$$

$$v_{13} - v_{23} + v_{33} = 0 \cdots \textcircled{8}$$

$$v_{13} + v_{23} - 3v_{33} = 0 \cdots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{8} - \textcircled{7} \quad 4v_{13} - 2v_{23} = 0 \rightarrow v_{13} = v_{23} / 2$$

$$\textcircled{8} - \textcircled{9} \quad 2v_{23} - 4v_{33} = 0 \rightarrow v_{23} = 2v_{33}$$

$$v_{13}^2 + v_{23}^2 + v_{33}^2 = (1 + 2^2 + 1)v_{33}^2 = 1 \text{ と置けば、}$$

$$\rightarrow v_{33} = \frac{1}{\sqrt{6}}, v_{13} = \frac{1}{\sqrt{6}}, v_{23} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T, \mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \text{ と置けば、 } \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}',$$

$$\text{すなわち、 } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{x}' = \mathbf{x}'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}' = 6$$

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1'^2 + 3x_2'^2 + 6x_3'^2 = 6$$

$x_i'^2$ の係数が固有値になっている。

$$\therefore \frac{x_1^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{x_2^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{x_3^2}{1^2} = 1,$$

これは楕円面を表す。

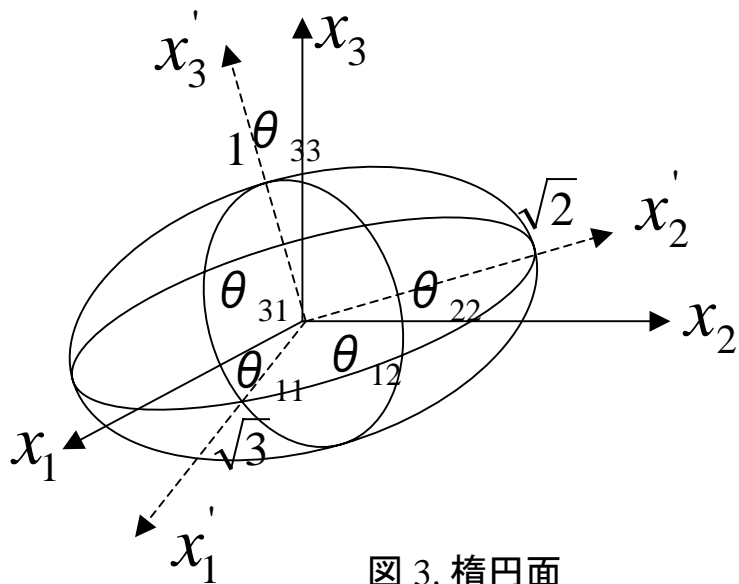


図 3. 楕円面

座標変換 $\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ による変換後の基準軸を主軸、その方向を主方向という。

\mathbf{P} の各列は、各対応軸間の角の方向余弦である。次頁考察 2 参照。

$$\mathbf{p}_1 = (\cos \theta_{11}, \cos \theta_{21}, \cos \theta_{31})$$

$$\mathbf{p}_2 = (\cos \theta_{12}, \cos \theta_{22}, \cos \theta_{32})$$

$$\mathbf{p}_3 = (\cos \theta_{13}, \cos \theta_{23}, \cos \theta_{33})$$

[考察 1—直交性と右手系であることの説明]

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ において、}$$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

とおけば、

$$\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = \left(1/\sqrt{2}\right)^2 + 0 + \left(-1/\sqrt{2}\right)^2 = 1,$$

$$\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_2 = \left(-1/\sqrt{3}\right)^2 + \left(1/\sqrt{3}\right)^2 + \left(-1/\sqrt{3}\right)^2 = 1$$

$$\mathbf{p}_3^T \mathbf{p}_3 = \left(1/\sqrt{6}\right)^2 + \left(2/\sqrt{6}\right)^2 + \left(1/\sqrt{6}\right)^2 = 1$$

$$\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 = \left(1/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{3}\right) + 0 + \left(-1/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_3 = \left(1/\sqrt{2}\right)\left(1/\sqrt{6}\right) + 0 + \left(-1/\sqrt{2}\right)\left(1/\sqrt{6}\right) = 0$$

$$\mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_3 = \left(-1/\sqrt{3}\right)\left(1/\sqrt{6}\right) + \left(1/\sqrt{3}\right)\left(2/\sqrt{6}\right) + \left(-1/\sqrt{3}\right)\left(1/\sqrt{6}\right) = 0$$

すなわち、

$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}, \therefore \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, 行と列を入れ換えると逆行列になる。

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(0 \times (-1/\sqrt{3}) - (-1/\sqrt{2})(1/\sqrt{3})) +$$

$$\mathbf{j}((-1/\sqrt{2})(-1/\sqrt{3}) - (1/\sqrt{2})(-1/\sqrt{3})) +$$

$$\mathbf{k}((1/\sqrt{2})(-1/\sqrt{3}) - (-1/\sqrt{2})(-1/\sqrt{3}))$$

$$= (1/\sqrt{6})\mathbf{i} + (2/\sqrt{6})\mathbf{j} + (1/\sqrt{6})\mathbf{k} = \mathbf{p}_3$$

他は省略、これから、右手系であることも分かる。

【考察 2— \mathbf{P}^{-1} が方向余弦であることの説明】

$\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ において、変換前の単位ベクトルを

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{変換後を、}\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\text{として、}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{p}'_1 \quad \mathbf{p}'_2 \quad \mathbf{p}'_3]$$

$$[\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}'] = \mathbf{P}^T [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] = \mathbf{P}^T \mathbf{I} = \mathbf{P}^T \text{ から、}$$

$$[\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}'] = [\mathbf{p}'_1 \quad \mathbf{p}'_2 \quad \mathbf{p}'_3] \rightarrow \mathbf{i}' = \mathbf{p}'_1, \mathbf{j}' = \mathbf{p}'_2, \mathbf{k}' = \mathbf{p}'_3$$

$$\cos \theta_{11} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = p_{11}, \cos \theta_{12} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = p_{12},$$

$$\cos \theta_{13} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_3 = p_{13}, \cos \theta_{21} = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}'_1 = p_{21}$$

$$\cos \theta_{22} = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' = \mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}'_2 = p_{22}, \cos \theta_{33} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{p}'_3 \cdot \mathbf{p}'_3 = p_{33}$$

2次元では、次のようになる。

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{変換後を、}\mathbf{i}', \mathbf{j}'\text{として、}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{p}'_1 \quad \mathbf{p}'_2]$$

$$[\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}'] = \mathbf{P}^T [\mathbf{i} \quad \mathbf{j}] = \mathbf{P}^T \mathbf{I} = \mathbf{P}^T \text{ から、}$$

$$[\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}'] = [\mathbf{p}'_1 \quad \mathbf{p}'_2] \rightarrow \mathbf{i}' = \mathbf{p}'_1, \mathbf{j}' = \mathbf{p}'_2$$

$$\cos \theta_{11} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = p_{11},$$

$$\cos \theta_{12} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = p_{12},$$

$$\cos \theta_{21} = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}'_1 = p_{21},$$

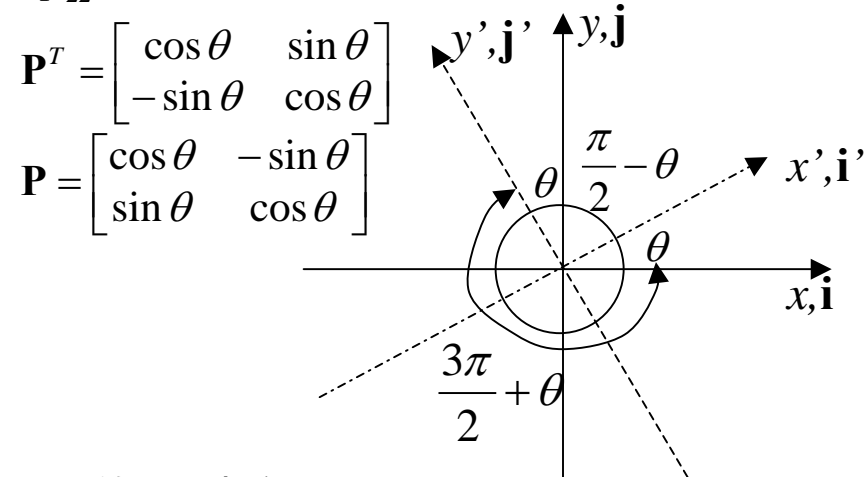
$$\cos \theta_{22} = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' = \mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}'_2 = p_{22}$$

$p_{11} = \cos \theta$ とすれば、下図から、

$$p_{12} = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$$

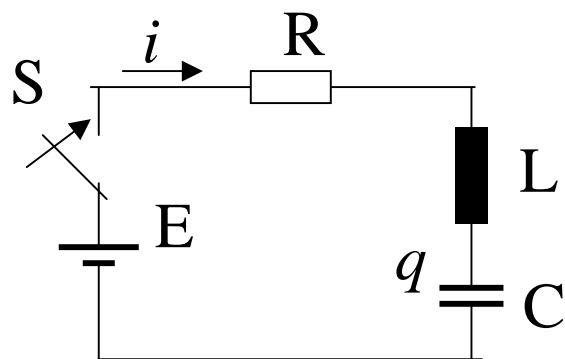
$$p_{21} = \cos(3\pi/2 + \theta) = -\sin \theta$$

$$p_{22} = \cos \theta$$



応用3 安定判別と固有値

例.RLC直列回路



微分方程式

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q = E, \quad \frac{dq}{dt} = i$$

i, \dot{q} の式として書き直すと

$$\dot{i} = \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{LC}q + \frac{E}{L}$$

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E/L \\ 0 \end{bmatrix}$$

ラプラス変換して、 $i \rightarrow I, q \rightarrow Q$

$$\begin{bmatrix} sI - i(0^+) \\ sQ - q(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E/L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s \begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E/sL + i(0^+) \\ q(0^+) \end{bmatrix}$$

$i(0^+) = i_0, q(0^+) = q_0$ とする。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} E/sL + i_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$$

と書くと、 $s\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{K}$ となる。

$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{K}$ と変形して、

$$\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{K}$$

$$\begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + R/L & 1/LC \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E/sL + i_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s & -1/LC \\ 1 & s + R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E/sL + i_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E/L + si_0 - q_0/LC \\ E/sL + i_0 + sq_0 + q_0R/L \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s + R/L & 1/LC \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + sR/L + 1/LC$$

$\equiv (s - \alpha)(s - \beta)$, α, β は $\Delta = 0$ の解である。

$\Delta = 0$ をこの系の特性方程式と呼ぶ。

$$\alpha, \beta = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$$

$$I = \frac{E/L + si_0 - q_0/LC}{(s - \alpha)(s - \beta)}$$

$$Q = \frac{E/L + si_0}{s(s - \alpha)(s - \beta)} + \frac{s + R/L}{(s - \alpha)(s - \beta)} q_0$$

$$I = \frac{E/L + si_0 - q_0/LC}{(s - \alpha)(s - \beta)}$$

$$Q = \frac{E/L + si_0}{s(s - \alpha)(s - \beta)} + \frac{s + R/L}{(s - \alpha)(s - \beta)} q_0$$

これから、ラプラス逆変換して、

$$i = \frac{E/L + \alpha i_0 - q_0/LC}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{\alpha t} + \frac{E/L + \beta i_0 - q_0/LC}{\beta(\beta - \alpha)} e^{\beta t}$$

$$q = \frac{E/L}{(-\alpha)(-\beta)} + \frac{E/L + \alpha i_0}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{\alpha t} + \frac{E/L + \beta i_0}{\beta(\beta - \alpha)} e^{\beta t} + \frac{\alpha + R/L}{(\alpha - \beta)} q_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta + R/L}{(\beta - \alpha)} q_0 e^{\beta t}$$

i, q は、 $\alpha, \beta = r \pm j\omega$ と書けば、 $e^{\alpha t} = e^{(r+j\omega)t}$, $e^{\beta t} = e^{(r-j\omega)t}$ の項の和になっている。
 i, q が安定であるかどうかは、特性方程式の解 α, β の実数部 r の正負によって定まる。 $e^{\alpha t} = e^{rt} e^{j\omega t} = e^{rt} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$ なので、実数部 r が負なら振幅 e^{rt} が $t \rightarrow \infty$ のとき $e^{rt} \rightarrow 0$ に収斂し安定である。 $r > 0$ のときは t の増加と共に振幅が拡大し収斂しないので不安定である。

α, β は、特性方程式 $\Delta = 0$ の解で、

$$\Delta = \begin{vmatrix} R/L + s & 1/LC \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + sR/L + 1/LC = 0 \text{ から求められる。}$$

$$\begin{bmatrix} s + R/L & 1/LC \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R/L & 1/LC \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ を考えると、}$$

$$\begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ となり、行列 } \begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \text{ の固有値として}$$

s が求められる。

固有値による安定判別 解析手順(まとめ)

(1) 一次の連立微分方程式をたてる。
高次の場合は、変数を必要なだけ追加して

$x_n = \frac{dx_{n-1}}{dt}$ のようにして新たな変数 x_n と式を

追加して一次連立形にする。

(2) $X_i(s) = L\{x_i(t)\}$ etc. としてラプラス変換した式 $s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}(s)$ を作る。

このとき、 $X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}(s)$ である。

(3) 特性方程式 $\Delta = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ を解き、
解 $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ を得る。

固有値は、 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ から、 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ の解で
 $\lambda = s$ 、特性方程式の解 = 固有値 である。

(4) すべての固有値 s_i の実数部が負のとき
安定である。 $s_i = r_i + j\omega_i$ と書いたとき、 x_k が、

$$c_i e^{s_i t} = c_i e^{(r_i + j\omega_i)t} = c_i e^{r_i t} e^{j\omega_i t}$$

の和になるが、 $e^{j\omega_i t}$ は \cos, \sin の振動項、 $e^{r_i t}$
がその振幅なので、 $r_i < 0$ なら $e^{r_i t} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$
で、 t に関わる項が消滅し安定である。

$r_i > 0$ のときは、振幅が拡大し不安定である。

先の例では、

$$\Delta = \begin{vmatrix} s + R/L & 1/LC \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + sR/L + 1/LC$$

$$\equiv (s - s_1)(s - s_2),$$

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$$

$$\text{or } = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$$

いずれも、 $\frac{R}{2L} > 0$ ならば、 $\text{Re}(s_i) < 0$ で安定。

実際、 R, L が通常抵抗、インダクタンス
であれば、これは成立するので、この例は
常に安定となる。