質点の運動とエネルギー

運動とエネルギー

0.質点の運動方程式

1.運動エネルギー(Kinetic energy)

2.位置のエネルギー(Potential energy)

(1)重力場

(2)静電場、静磁場

(3)つるまきバネ

(4)回転座標系

(5)電動機の出力とトルク

応用問題

運動とエネルギー

0. 質点の運動方程式

$$f = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = m\alpha$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

f :力、[N(ニュートン　)]

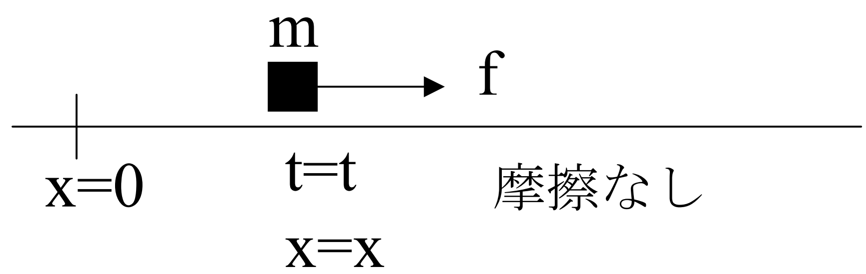
m :質量[kg]

x :位置(座標)[m]

t : 時間[s(秒)]

v : 速度[m/s]

α : 加速度[m/s^2]



fが一定のとき　αも一定で

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f}{m} = \alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = \int\left(\frac{f}{m}\right)dt = \frac{f}{m}t + c = v$$

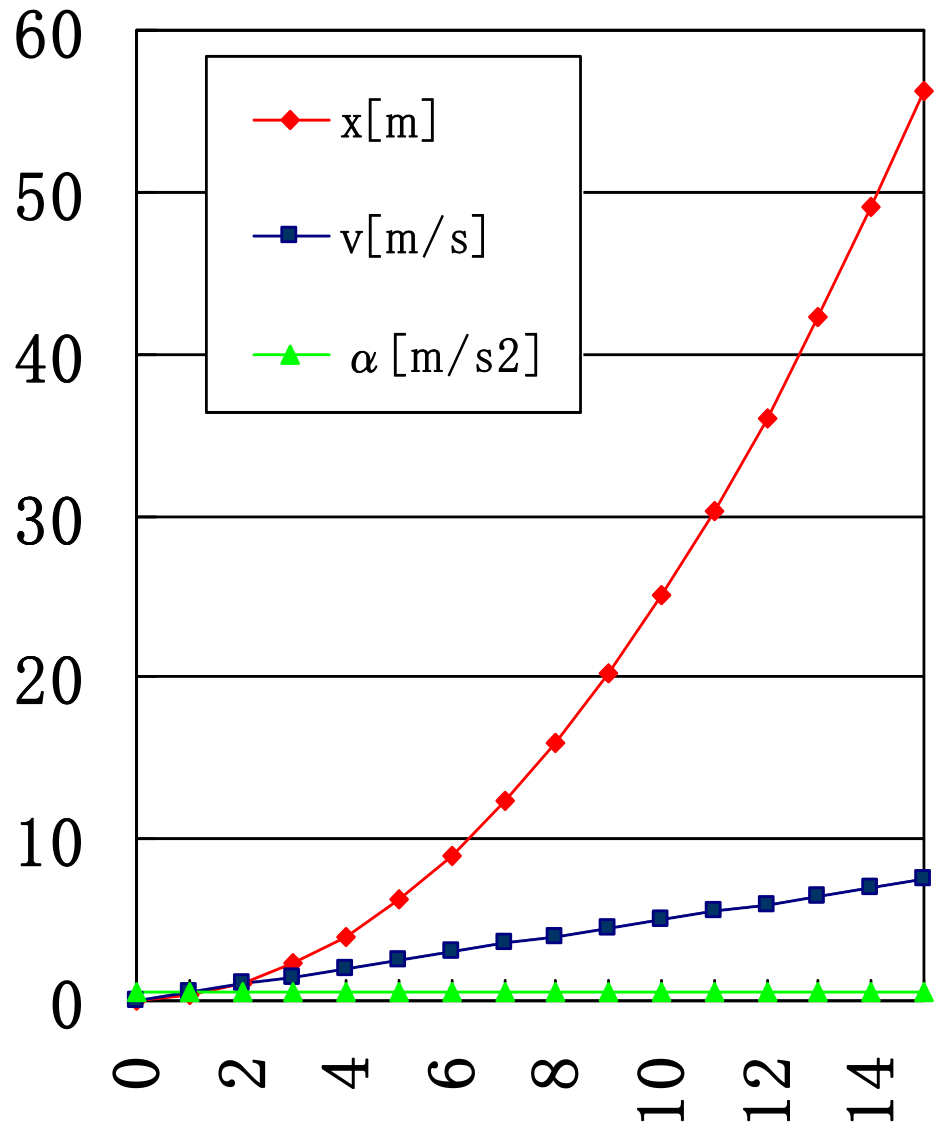
$$x = \int\left(\frac{f}{m}x + c\right)dt = \frac{f}{2m}t^2 + ct + d$$

$t = 0$ で $x = 0, \frac{dx}{dt} = v = 0$とすれば

$$c = d = 0, \therefore x = \frac{f}{2m}t^2$$

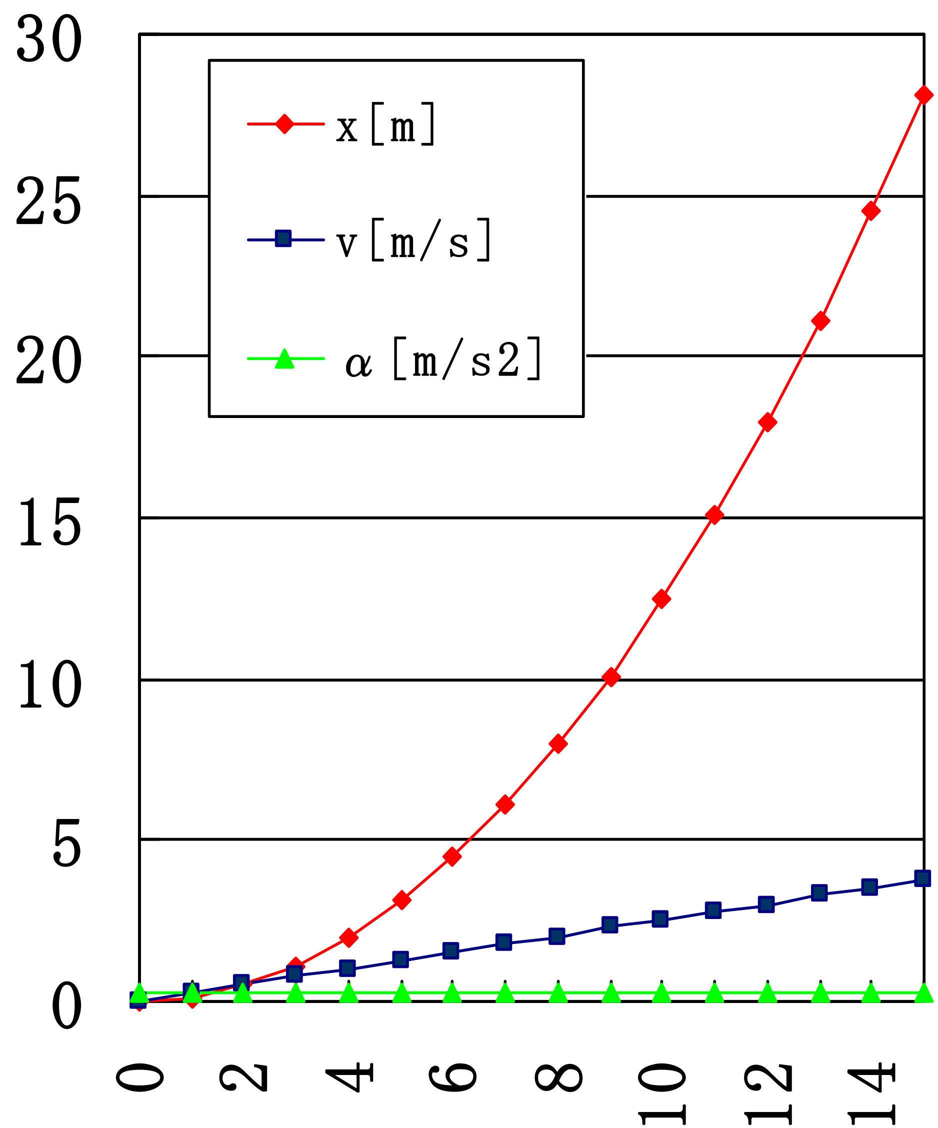
f=5[N], m=10[kg]
のとき

t[s]	x[m]	v[m/s]	α[m/s^2]
0	0.00	0.00	0.50
1	0.25	0.50	0.50
2	1.00	1.00	0.50
3	2.25	1.50	0.50
4	4.00	2.00	0.50
5	6.25	2.50	0.50
6	9.00	3.00	0.50
7	12.25	3.50	0.50
8	16.00	4.00	0.50
9	20.25	4.50	0.50
10	25.00	5.00	0.50
11	30.25	5.50	0.50
12	36.00	6.00	0.50
13	42.25	6.50	0.50
14	49.00	7.00	0.50
15	56.25	7.50	0.50



f=5[N], m=20[kg]
のとき

t[s]	x[m]	v[m/s]	α[m/s^2]
0	0.00	0.00	0.25
1	0.13	0.25	0.25
2	0.50	0.50	0.25
3	1.13	0.75	0.25
4	2.00	1.00	0.25
5	3.13	1.25	0.25
6	4.50	1.50	0.25
7	6.13	1.75	0.25
8	8.00	2.00	0.25
9	10.13	2.25	0.25
10	12.50	2.50	0.25
11	15.13	2.75	0.25
12	18.00	3.00	0.25
13	21.13	3.25	0.25
14	24.50	3.50	0.25
15	28.13	3.75	0.25



1.運動エネルギー(Kinetic Energy)

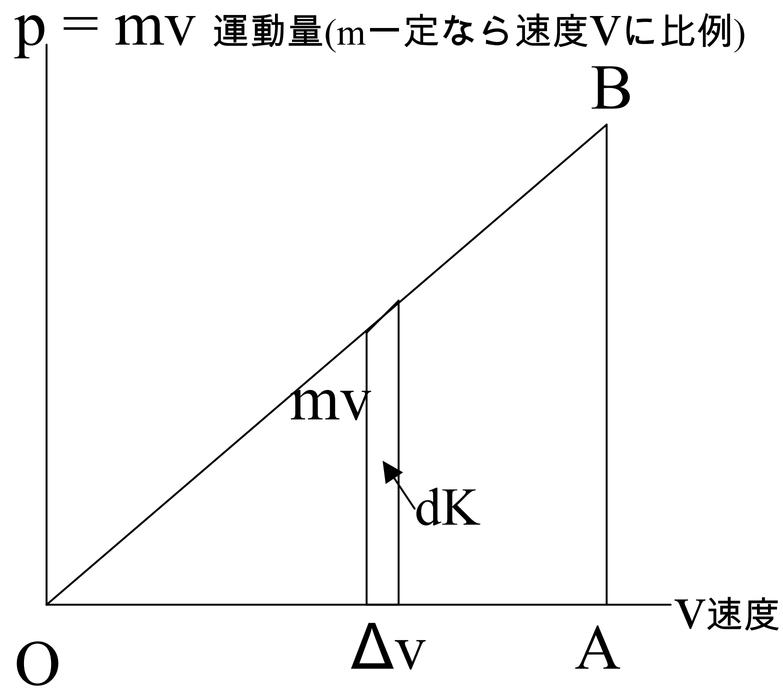
質量 mの質点に力 fを加えつづけて、時間が 0 から t になり、その間に速度が0から v になり、位置が 0 からx まで移動したとする。時間 $t \sim t+\Delta t$の間に加えられる微小増分エネルギー dK は

$$dK = fdx = m\frac{dv}{dt}dx = m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt}dt = m\frac{dv}{dt}vdt$$

$$= mvdv$$

$$\therefore K = \int_0^x fdx = \int_0^v mvdv = \frac{1}{2}mv^2$$

速度 v に達するまでにどのような力を加えてもその方法には無関係に速度がvであればK の運動エネルギーをもつ。



K= ΔOABの面積

2.位置のエネルギー(Potential Energy)

重力場[1]や静電場[2]のように距離の二乗に反比例する力が働く場合や、バネにつながれた質点[3]のように距離あるいは位置 x における力が x の関数 $F(x)$ で与えられる場合を考える。力が働かない位置{(1,2)では無限遠点､(3)ではバネが自然の長さにある位置}から x まで力に逆らって質点あるいは電荷を移動させるのに必要なエネルギー $W(x)$ を求める。

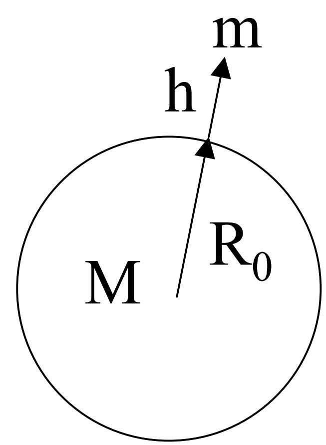
(1) 重力場　$F(x)=-G\dfrac{Mm}{x^2}$

$$W(x)=\int_\infty^x\{-F(x)\}dx=GMm\int_\infty^x\frac{1}{x^2}dx$$

$$=GMm\left[\frac{-1}{x}\right]_\infty^x=-GM\frac{m}{x}=P(x)*m$$

$P(x)=\dfrac{-GM}{x}$ を重力場のポテンシャルという

ポテンシャルは単位質量が持つ位置のエネルギーであり、質量倍すると、その質点の持つ位置エネルギーとなる。地球の半径は6300kmで大きく地表付近では



$$P(R_0+h)=-\frac{GM}{R_0+h}$$

$$=-\frac{GM}{R_0(1+h/R_0)}$$

$$\approx-\frac{GM}{R_0}(1-h/R_0)$$

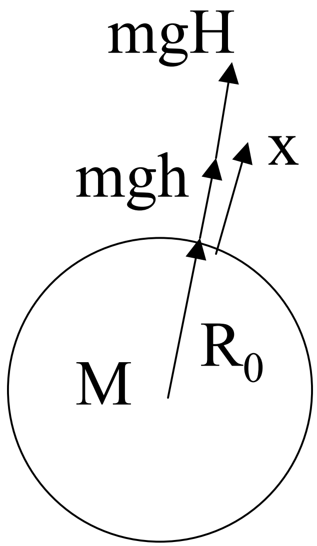
$$\approx-\frac{GM}{R_0}+\frac{GM}{R_0^2}h=-gR_o+gh$$

ここで、地表面付近では

$F(R_0)=-\dfrac{GM}{R_0^2}m=-mg$ から $g=\dfrac{GM}{R_0^2}$

であることを利用した。

前式から地上の重力場のポテンシャルは地表からの高さhが決まれば唯一つ決まるすなわち、ポテンシャルは地上高によって決まる事がわかる。
そこで、ポテンシャルを地表面のポテンシャルに



対する相対値で表すこ とにすると
$P'(h) = gh$ と書ける。
また　$P'(H) = gH$ である。
質量 m の質点が持つ位置エネ ルギーは、それぞれ mgh, mgH となる。
質点を H まで持ち上げておき自 然落下させると

$f = -mg = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ から(x は地上高)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g,$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \int(-g)dt = -gt + C_1$$

$$x = \int(-gt + C_1)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

$t = 0$ で $x = H,\ v = 0$

$t = t_h$ で $x = h,\ v = v_h$ とすれば

$C_1 = 0,\ C_2 = H, h = H - \dfrac{1}{2}gt_h^2$ から

$$t_h = \sqrt{(2(H-h)/g)},$$

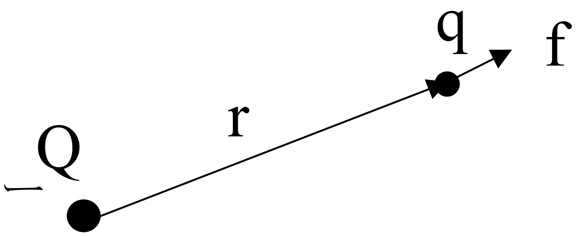
$$v_h = -gt_h = -\sqrt{2g(H-h)}$$

運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}mv_h^2 = mg(H-h)$

すなわち位置エネルギーの減少量に等しい。($PE + KE =$ 一定、E 保存則)

$$mgh + \frac{1}{2}mv_h^2 = mgH + 0 = mgh' + \frac{1}{2}mv_h'^2$$

(2)静電場、静磁場



力　$f = k\dfrac{Qq}{r^2}$

位置のエネルギー

$W(r)$は

$$W(r) = \int_\infty^r (-f)dr = -\int_\infty^r k\frac{Qq}{r^2}dr = k\left[\frac{Qq}{r}\right]_\infty^r = k\frac{Qq}{r}$$

$V(r) = k\dfrac{Q}{r}$ は場のポテンシャルで、単位電荷または単位磁荷を無限遠からその位置まで運ぶに要するエネルギーであり、「電位」「磁位」と呼ばれ、電荷あるいは磁荷倍すると位置のエネルギーとなる。

$$-\frac{\partial W}{\partial r} = k\frac{Qq}{r^2} = f = \left(k\frac{Q}{r^2}\right)q = \left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)q = qE$$

$E = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$は場の強さを表す。位置ベクトル$r$を$(x, y, z)$と表せば、

$$\frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z}\right) = \nabla$$

$E = -\nabla V$

と書ける。(∇　ナブラと読む)

∇VはVの勾配(傾き)である。

静電場では、$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}, E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

静磁場では、$k = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$, $E_m = \dfrac{\mu_0 Q_m}{4\pi r^2}$である。

$\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2$ である(c は光速)。

静電場では、Eは電界の強さ(電界強度)

$\varepsilon_0 E = D$を電束密度と呼ぶ。

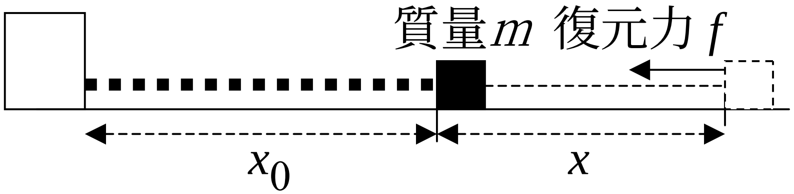
$D = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$, $Q = 4\pi r^2 D =$ 半径rの球表面積$*D$

静磁場では、Eにあたる量E_mをBと書き磁束密度と呼ぶ。

$H = B/\mu_0$ を磁界の強さという。$B = \mu_0 H$

$B = \dfrac{Q_m}{4\pi r^2}$, $Q_m = 4\pi r^2 B =$ 半径rの球表面積$*B$

(3)つるまきバネ



バネの復元力は　自然長x_0からの変位をxとして、$f=-kx$,運動法則から

$$f=m\frac{d^2x}{dt^2}、\therefore -kx=m\frac{d^2x}{dt^2}$$、変形して、

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

$x=e^{\lambda t}$ と置いてみると、$\left(\lambda^2+\frac{k}{m}\right)\quad e^{\lambda t}=0$

$$\lambda^2=-\frac{k}{m},\quad \lambda=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}=\pm i\omega$$

$$x=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$$

$$=(A+iB)\cos\omega t+(A-iB)\sin\omega t$$

$t=0$ で、$x=a,\ v=\frac{dx}{dt}=0$ とすれば

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega(A+iB)\sin\omega t+\omega(A-iB)\cos\omega t$$

$$A+iB=a,\omega(A-iB)=0,\ A=iB$$

$v=-a\omega\sin\omega t\cdots$正弦波振動

$x=a\cos\omega t\cdots$正弦波振動

$x=x$ における位置のエネルギーPEは

$$PE=\int_0^x(-f)dx=\int_0^x kxdx=\frac{1}{2}kx^2$$

$$=\frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega t$$

運動エネルギー KE は

$$KE=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\omega t$$

$$=\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{k}{m}\right)\sin^2\omega t=\frac{1}{2}ka^2\sin^2\omega t$$

$PE+KE=\frac{1}{2}ka^2=$一定

(4) 回転座標系

運動方程式

$N = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$, あるいは$N = \frac{dL}{dt}$, Lは角運動量

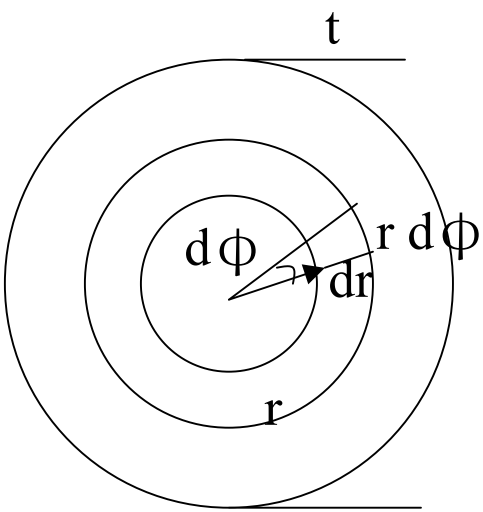
$L = I\omega$, $N = \sum r\times f$, 力のモーメント

I は慣性モーメントとよばれ $I = \sum mr^2$

I の例

密度ρ半径a,厚さtの円柱が円断面の中心を軸に

回転するとき $I = \rho\pi a^2 t\frac{a^2}{2} = M\frac{a^2}{2}$



$r^2 dm$

$= r^2\rho\cdot rd\varphi\cdot dr\cdot t^4$

$= \rho t\cdot r^3 dr\cdot d\phi$

$I = 2\pi\rho t\int_0^a r^3 dr$

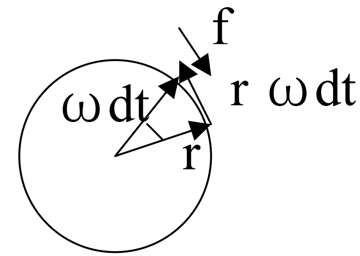
$= \frac{\pi a^4\rho t}{2}$

$= \pi a^2 t\rho\cdot\frac{a^2}{2}$

$= M\frac{a^2}{2}$

回転体に蓄えられるエネルギー

半径rの円筒状回転体を考える。



$dW = r\times f\ d\phi = I\frac{d\omega}{dt}\cdot\omega dt$

$= I\omega d\omega$

$W = \int_0^\omega I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega^2$

直径10m,厚さ2m,密度4kg/m^3の円筒を36,000rpmで回転させているとき蓄えられるエネルギーを求めよ。

$W = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot(\pi\cdot 5^2\cdot 2\cdot 4)\cdot\frac{5^2}{2}\cdot\left(\frac{2\pi*36000}{3600}\right)^2$

$\approx 100\pi*12.5*4000 = 15.7*10^6[J]$

$= 15.7[MJ]$

回転数を10倍にすると100倍になる。

(5) 電動機の出力とトルク

仕事率(工率)p[W]は、1 秒間当りの仕事である。仕事を$W[J]$で表すと、

$p = \dfrac{dW}{dt}, W = \int pdt$、単位で書くと、

$[Ws] = [J], [W] = [J/s]$

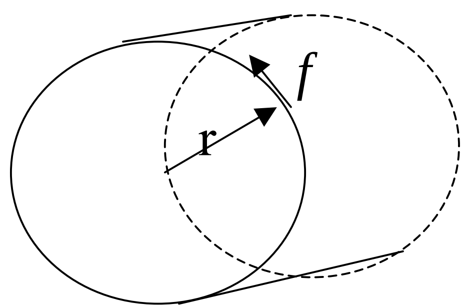
図で、

トルク $\tau = f \times r\ [Nm]$,

出力　$p = f \times 2\pi r \times n = f \times r \times 2\pi n = \tau \times \omega [W]$

n : 回転数$[rps]$

$\therefore p = \tau\omega \rightarrow \tau = \dfrac{p}{\omega}$



1 回転でする仕事は、$f \times 2\pi r$

1 秒間に n回転するので、

1 秒間にする仕事(= 仕事率　$p[W]$)は、

$p = f \times 2\pi r \times n$

掛ける順序を変えて、

$p = (f \times r) \times 2\pi n = \tau \times \omega$

例題

回転速度1,461rpm, トルク137Nmを要する負荷がある。これを駆動するのに最低限必要な電動機の出力[kW]は次のうちどれか。

① 19kW② 20kW③ 21kW

④ 22kW⑤ 23kW

$$p = \tau \times \omega = 137 \times \left(2\pi \times \frac{1461}{60} \right)$$
$$= 20960.39 \cdots [W] \approx 20.960[kW]$$

応用問題

(1)長さの単位[m],質量の単位[kg],時間の単位[s]は基本単位である。
力の単位[N]はこれらの基本単位であらわすとどうなるか。
速度、加速度の単位はどうか

(2)長さの単位の元は地球の赤道から北極までの距離の一万分の一を1kmとしたのが始まりである。地球の半径はおよそ何kmか。

(3)二物体間の万有引力は

$$f = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

と表される。

r = 重心間の距離[m]、
m_1, m_2 二つの物体の質量、
G = 比例定数

地表上での重力の加速度が$g=9.8[m/s^2]$であることを知って
Gm_1 の概数値を求めよ。

(4)高さ方向に一定な-gの加速度が働く場がある。質点を下向き初速v_0で落下させたときh[m]落下したときの速さをエネルギー保存則を利用して求めよ。

(5)電荷qを持つ質量mの質点を強さEの電場に置いたときに質点に働く加速度を求めよ。