

微分の近似値

微分の近似値

(0)微分の定義(右図参照)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots \textcircled{1}$$

(1)微分の近似値(その1)

①式で、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ の部分を、「できるだけ小さい Δx をとる」ことで代行する。

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots \textcircled{2}$$

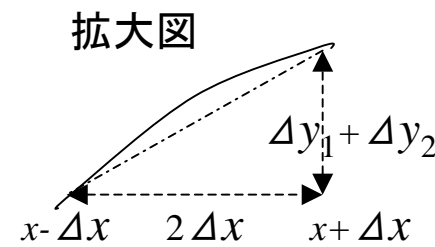
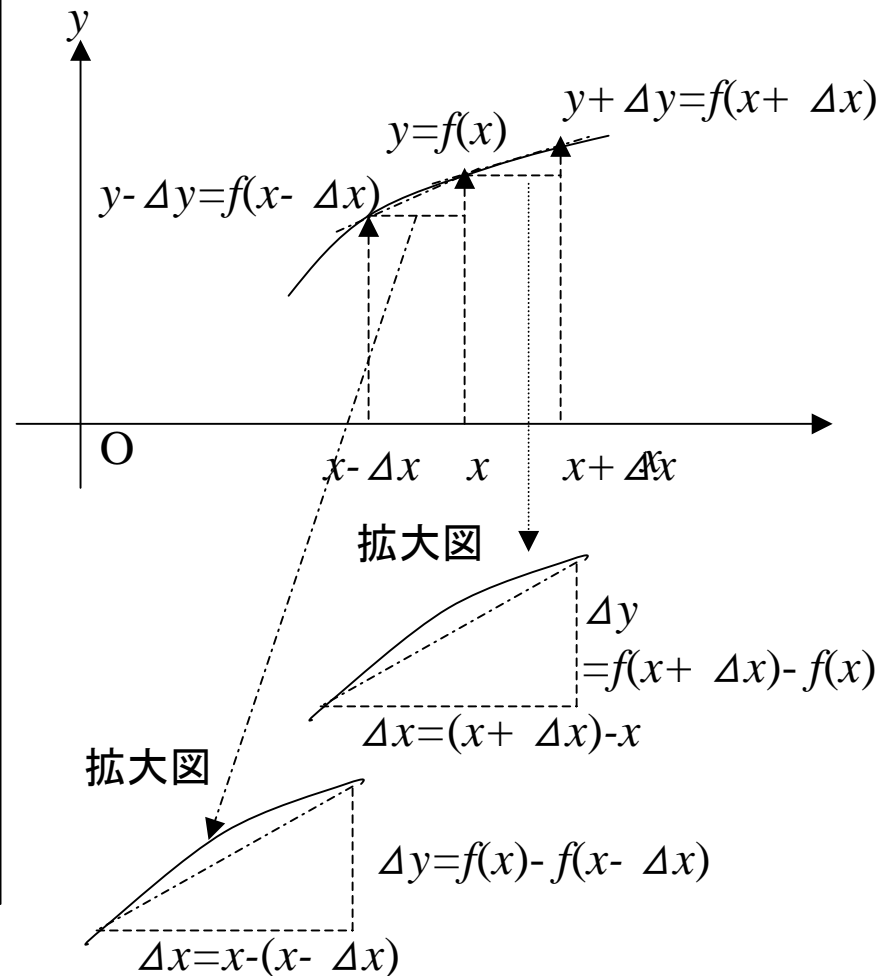
(2)微分の近似値(その2)

①式の連続2区間の平均値を取る。

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

これは、次のようにして得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_2 \right\} &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right\} + \left\{ \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} \right\} \right] \\ &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \approx \frac{f(x+2\Delta x) - f(x)}{2\Delta x} \approx \frac{f(x) - f(x-2\Delta x)}{2\Delta x} \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$



2次微分の近似値

(0)2次微分の定義(微分の微分)

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d}{d x} \left\{ \frac{d f(x)}{d x} \right\}$$

$$= f(x) \text{を微分した関数の微分} = \frac{d y'}{d x},$$

$$y' = \frac{d f(x)}{d x}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \{y'(x + \Delta x) - y'(x)\}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \dots \textcircled{4}$$

(1)2次微分の近似値

④式で、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ の部分を、「できるだけ小さい Δx をとる」ことで代行する。

$$\frac{d y'}{d x} \approx \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \dots \textcircled{5}$$

(2)2次微分の近似値(その2)

Δx は十分小さくとるので、微分を取る位置をずらして、⑤式の代わりに

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d x^2} &\approx \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} \\ &\approx \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2} \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

と書くこともできる。

3次微分の近似値

$$\frac{d^3 f}{d x^3} = \frac{d}{d x} \left\{ \frac{d^2 f}{d x^2} \right\}$$

$$\approx \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^3}$$

$$- \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^3}$$

$$\approx \frac{f(x + 2\Delta x) - 3f(x + \Delta x) + 3f(x) - f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^3}$$

$$\approx \frac{f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^3}$$

... ⑦