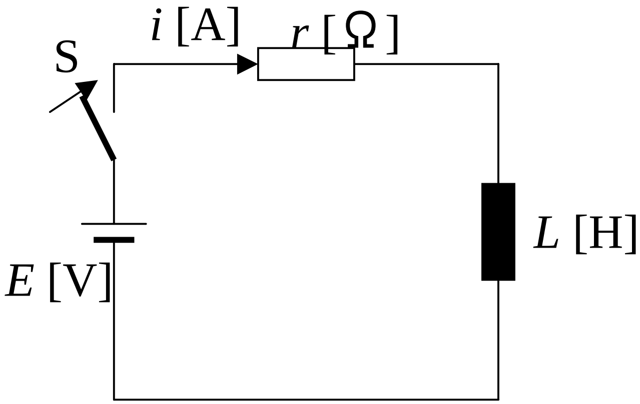
過渡現象　簡単な微分方程式

簡単な微分方程式問題(1)
簡単な微分方程式問題(2)
簡単な微分方程式問題(3)

簡単な微分方程式問題 (1)



$t = 0$ でSを投入した。その後の電流 i を求める。

回路方程式は、

$$l\frac{di}{dt} + ri = E$$

ラプラス変換すると、

$$i(t) \leftrightarrow I(s)$$

$$\frac{di}{dt} \to sI - i(0^+),\ E \to \frac{E}{s}$$

から、

$$l\left(sI - i(0^+)\right) + rI = \frac{E}{s}$$

$$(sl + r)I = \frac{E}{s} + li(0^+)$$

$$I = \frac{E}{s(sl + r)} + \frac{li(0^+)}{sl + r}$$

$$= \frac{E}{l}\frac{1}{s(s + r/l)} + \frac{i(0^+)}{s + r/l}$$

$$= \frac{E}{l}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + r/l}\right)\frac{l}{r} + \frac{i(0^+)}{s + r/l}$$

$$= \frac{E}{r}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + r/l}\right) + \frac{i(0^+)}{s + r/l}$$

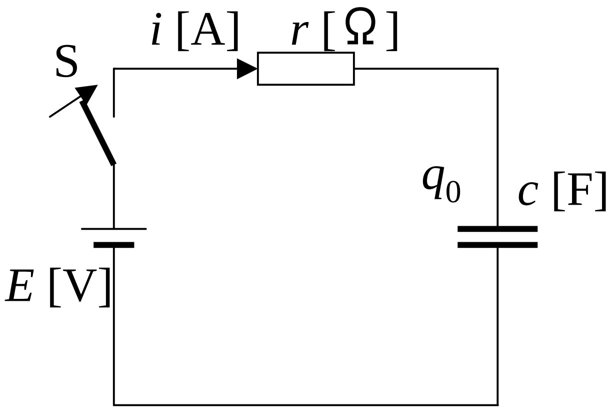
ラプラス逆変換して、

$$i(t) = \frac{E}{r}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{r}{l}t}\right) + i(0^+)\varepsilon^{-\frac{r}{l}t}$$

$i(0^+) = 0$ であるから、

$$i(t) = \frac{E}{r}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{r}{l}t}\right)$$

簡単な微分方程式問題 (2)



$t=0$ でSを投入した。その後の電流 i を求める。ただし$t=0$ での c の電荷を q_0 とする。

C の電荷を $q(t)$[C]とすれば回路方程式は、

$$\frac{dq}{dt}=i\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$r\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=E\cdots(2)$$

ラプラス変換すると、

$i(t)\leftrightarrow I(s), q(t)\leftrightarrow Q(s)$

として、

$$sQ-q(0^+)=I\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$r\left(sQ-q(0^+)\right)+\frac{Q}{c}=\frac{E}{s}\cdots(4)$$

(4)を変形整理して、

$$\left(rs+\frac{1}{c}\right)Q=\frac{E}{s}+rq(0^+)$$

$$Q=\frac{E}{r}\frac{1}{s\left(s+1/rc\right)}+\frac{q(0^+)}{s+1/rc}$$

$$=\frac{E}{r}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/rc}\right)rc+\frac{q(0^+)}{s+1/rc}$$

$$=cE\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/rc}\right)+\frac{q(0^+)}{s+1/rc}\cdots(5)$$

ラプラス逆変換して、

$$q(t)=cE\left(1-\varepsilon^{-\frac{t}{rc}}\right)+q(0^+)\varepsilon^{-\frac{t}{rc}}$$

$$=cE\left(1-\varepsilon^{-\frac{t}{rc}}\right)+q_0\varepsilon^{-\frac{t}{rc}}$$

$i(t)$は、(1)式から、上式をtで微分して

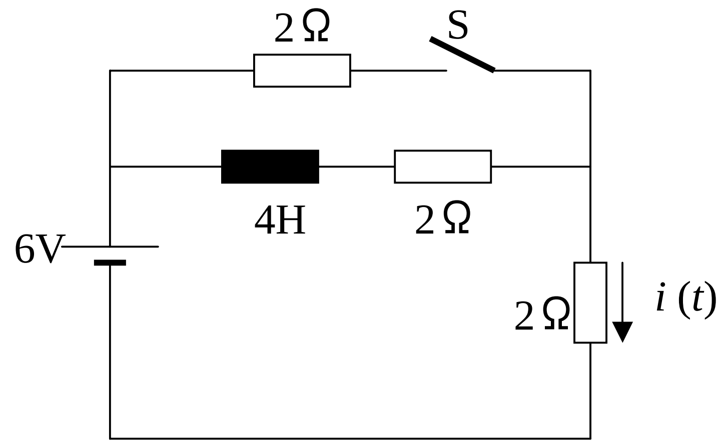
$$i(t)=\frac{1}{r}\left(E-\frac{q_0}{c}\right)\varepsilon^{-\frac{t}{rc}}=\frac{E-v_0}{r}\varepsilon^{-\frac{t}{rc}}$$

$v_0=q_0/c\cdots t=0$ でのcの電圧

$t=0$では、$q=q_0$,
$i=\left(E-q_0/c\right)/r$
$t\to\infty$では、$q=cE$,
$i=0$

簡単な微分方程式問題 (3)

右図の回路で、スイッチSを閉じたまま十分長時間放置した後、t = 0 において S を開いて切断（開路、遮断）する。t > 0 における電流 $i(t)$ は、次式のように表される（H17電気）。



$$i(t) = a\exp(-\alpha t) + b\left(1 - \exp(-\alpha t)\right)$$

a, b, α の組合せとして、正しいものは次のうちどれか。

① $a = 1,\ b = 1.5,\ \alpha = 3/4$
② $a = 1,\ b = 1.5,\ \alpha = 1$
③ $a = 1.5,\ b = 2,\ \alpha = 1$
④ $a = 2,\ b = 1.5,\ \alpha = 3/4$
⑤ $a = 2,\ b = 1.5,\ \alpha = 1$

解説・正解　②

Sの投入後十分時間がたつと電流は一定値になり、その値は6/(2+2/2)=2[A]で、S に 1[A]、4H　に　1[A] となっている。t = 0で S を開くとSを通る電流は直ちに 0 になるが、インダクタンス4H を通る電流はすぐには変化できないので 1[A] が継続する。t→∞では、インダクタンスの影響はなくなるので、i =6/4=1.5[A]になっている。また、α は、R/L　なので、あるいは、時定数 T は、L/R なので、

R/l=(2+2)/4=1,T=L/R=1

以上の条件を与式に代入して見ると、

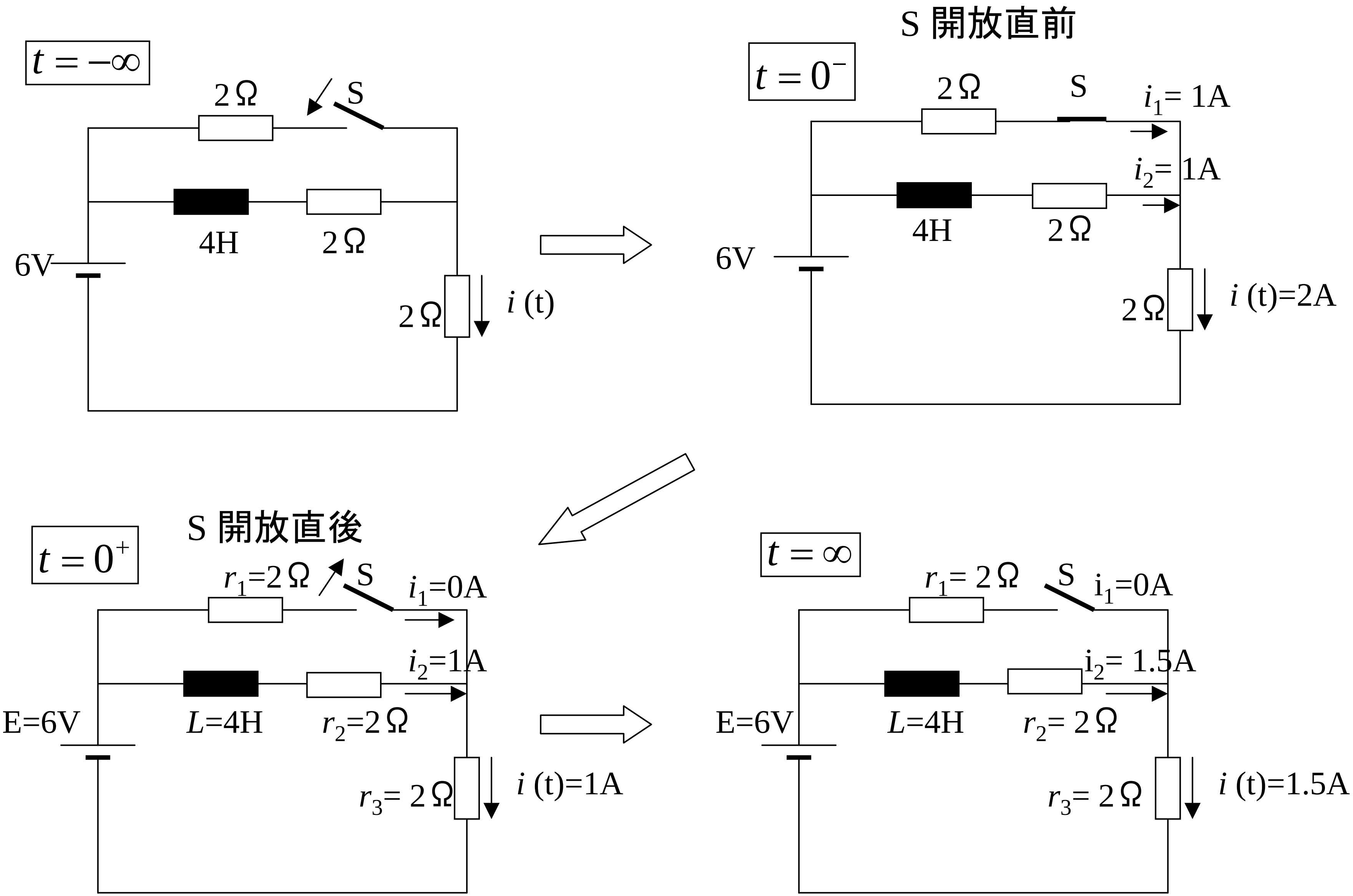
$t = 0^+$ では、$i = a = 1$

$t \to \infty$ では、$i = b = 1.5$

$\alpha = 1$

詳細は次頁以降参照

詳細図解



t = −∞
2Ω
S
4H
2Ω
6V
2Ω
i (t)
S 開放直前
t = 0⁻
2Ω
S
i1= 1A
i2= 1A
4H
2Ω
6V
2Ω
i (t)=2A
S 開放直後
t = 0⁺
r1=2Ω
S
i1=0A
i2=1A
E=6V
L=4H
r2=2Ω
r3= 2Ω
i (t)=1A
t = ∞
r1= 2Ω
S
i1=0A
i2= 1.5A
E=6V
L=4H
r2= 2Ω
r3= 2Ω
i (t)=1.5A

念のため、回路方程式を解いて見る。

$t \geq 0^+$ では、$i_1 = 0,\ i = i_2$

$$\therefore E = L\frac{d\,i_2}{d\,t} + r_2 i_2 + r_3 i_2 = L\frac{d\,i_2}{d\,t} + (r_2 + r_3)i_2$$

ラプラス変換すると、

$$L\{sI_2 - i_2(0^+)\} + (r_2 + r_3)I_2 = E/s$$

$$(sL + r_2 + r_3)I_2 = Li_2(0^+) + \frac{E}{s}$$

$$I_2 = \frac{i_2(0^+)}{s + (r_2 + r_3)/L} + \frac{E/L}{s(s + (r_2 + r_3)/L)}$$

数値を代入して整理すると、

$$I_2 = \frac{i_2(0^+)}{s+1} + \frac{3/2}{s(s+1)}$$

$$= \frac{i_2(0^+)}{s+1} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

ラプラス逆変換すると、

$$i_2 = i_2(0^+)\varepsilon^{-t} + \frac{3}{2}(1 - \varepsilon^{-t})$$

$i_2(0^+) = 1[A]$ だから、

$$i_2 = 1\varepsilon^{-t} + \frac{3}{2}(1 - \varepsilon^{-t})$$

$$= i$$

すなわち、

$$i = 1\varepsilon^{-t} + \frac{3}{2}(1 - \varepsilon^{-t})$$

$$= a\exp(-\alpha t) + b(1 - \exp(-\alpha t))$$

この 2 式を比較して、

$\therefore a = 1,\ b = 1.5,\ \alpha = 1 \cdots$ 正解は②

回路方程式を解かずに、解を知るには、解説にあるように、$t = 0$ での S の開放の前後で、インダクタンスを流れる電流が不変であること、$t = 0^+$、$t = \infty$ での値を利用する。