

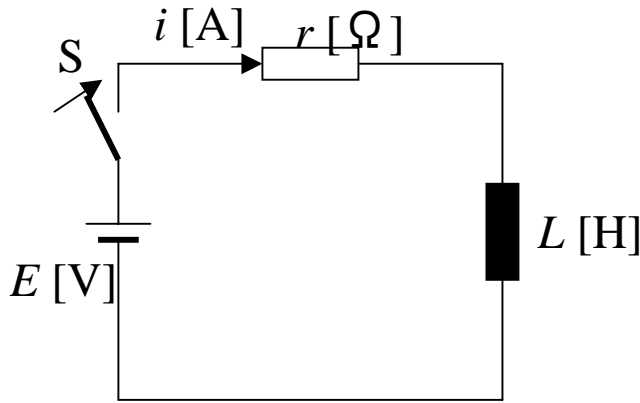
過渡現象 簡単な微分方程式

簡単な微分方程式問題(1)

簡単な微分方程式問題(2)

簡単な微分方程式問題(3)

簡単な微分方程式問題 (1)



$t = 0$ で S を投入した。その後の電流 i を求める。

回路方程式は、

$$l \frac{di}{dt} + ri = E$$

ラプラス変換すると、

$$i(t) \leftrightarrow I(s)$$

$$\frac{di}{dt} \rightarrow sI - i(0^+), E \rightarrow \frac{E}{s}$$

から、

$$l(sI - i(0^+)) + rI = \frac{E}{s}$$

$$(sl + r)I = \frac{E}{s} + li(0^+)$$

$$I = \frac{E}{s(sl + r)} + \frac{li(0^+)}{sl + r}$$

$$= \frac{E}{l} \frac{1}{s(s + r/l)} + \frac{i(0^+)}{s + r/l}$$

$$= \frac{E}{l} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + r/l} \right) \frac{l}{r} + \frac{i(0^+)}{s + r/l}$$

$$= \frac{E}{r} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + r/l} \right) + \frac{i(0^+)}{s + r/l}$$

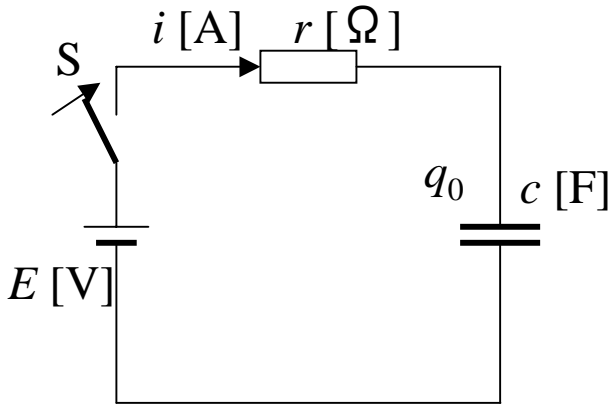
ラプラス逆変換して、

$$i(t) = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{l}t} \right) + i(0^+) e^{-\frac{r}{l}t}$$

$$i(0^+) = 0 \text{ であるから、}$$

$$i(t) = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{l}t} \right)$$

簡単な微分方程式問題 (2)



$t = 0$ で S を投入した。その後の電流 i を求める。
ただし $t = 0$ での c の電荷を q_0 とする。

C の電荷を $q(t) [C]$ とすれば回路方程式は、

$$\frac{dq}{dt} = i \dots \dots \dots (1)$$

$$r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E \dots \dots (2)$$

ラプラス変換すると、
 $i(t) \leftrightarrow I(s), q(t) \leftrightarrow Q(s)$
として、

$$sQ - q(0^+) = I \dots \dots \dots (3)$$

$$r(sQ - q(0^+)) + \frac{Q}{c} = \frac{E}{s} \dots \dots (4)$$

(4) を変形整理して、

$$\left(rs + \frac{1}{c} \right) Q = \frac{E}{s} + rq(0^+)$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{E}{r} \frac{1}{s(s + 1/rc)} + \frac{q(0^+)}{s + 1/rc} \\ &= \frac{E}{r} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/rc} \right) rc + \frac{q(0^+)}{s + 1/rc} \\ &= cE \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/rc} \right) + \frac{q(0^+)}{s + 1/rc} \dots \dots (5) \end{aligned}$$

ラプラス逆変換して、

$$\begin{aligned} q(t) &= cE \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{rc}} \right) + q(0^+) \varepsilon^{-\frac{t}{rc}} \\ &= cE \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{rc}} \right) + q_0 \varepsilon^{-\frac{t}{rc}} \end{aligned}$$

$i(t)$ は、(1) 式から、上式を t で微分して

$$i(t) = \frac{1}{r} \left(E - \frac{q_0}{c} \right) \varepsilon^{-\frac{t}{rc}} = \frac{E - v_0}{r} \varepsilon^{-\frac{t}{rc}}$$

$v_0 = q_0 / c \dots t = 0$ での c の電圧

$t = 0$ では、 $q = q_0$,
 $i = (E - q_0 / c) / r$
 $t \rightarrow \infty$ では、 $q = cE$,
 $i = 0$

簡単な微分方程式問題 (3)

右図の回路で、スイッチSを閉じたまま十分長時間放置した後、 $t=0$ においてSを開いて切断(開路、遮断)する。 $t>0$ における電流 $i(t)$ は、次式のように表される(H17電気)。

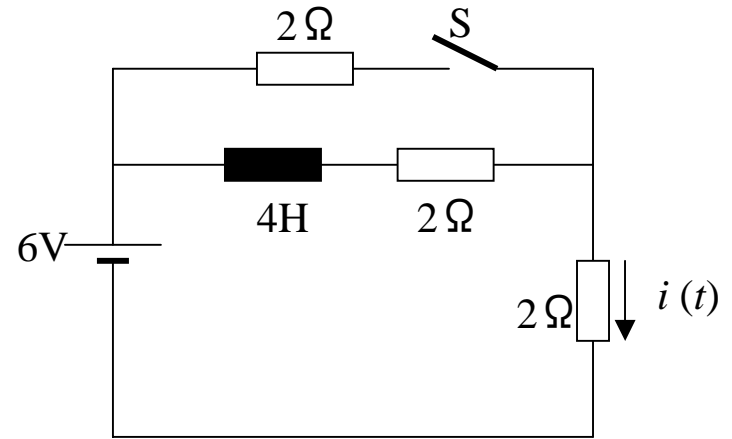
$$i(t) = a \exp(-\alpha t) + b(1 - \exp(-\alpha t))$$

a, b, α の組合せとして、正しいものは次のうちどれか。

- ① $a=1, b=1.5, \alpha=3/4$
- ② $a=1, b=1.5, \alpha=1$
- ③ $a=1.5, b=2, \alpha=1$
- ④ $a=2, b=1.5, \alpha=3/4$
- ⑤ $a=2, b=1.5, \alpha=1$

解説・正解 ②

Sの投入後十分時間がたつと電流は一定値になり、その値は $6/(2+2/2)=2[\text{A}]$ で、Sに $1[\text{A}]$ 、 4H に $1[\text{A}]$ となっている。 $t=0$ でSを開くとSを通る電流は直ちに0になるが、インダ



クタンス 4H を通る電流はすぐには変化できないので $1[\text{A}]$ が継続する。 $t \rightarrow \infty$ では、インダクタンスの影響はなくなるので、 $i=6/4=1.5[\text{A}]$ になっている。また、 α は、 R/L なので、あるいは、時定数 T は、 L/R なので、 $R/l=(2+2)/4=1, T=L/R=1$

以上の条件を与式に代入して見ると、

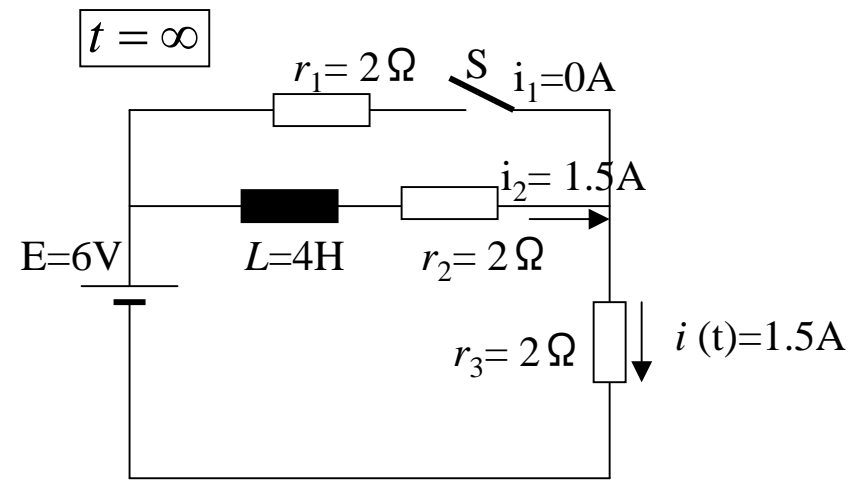
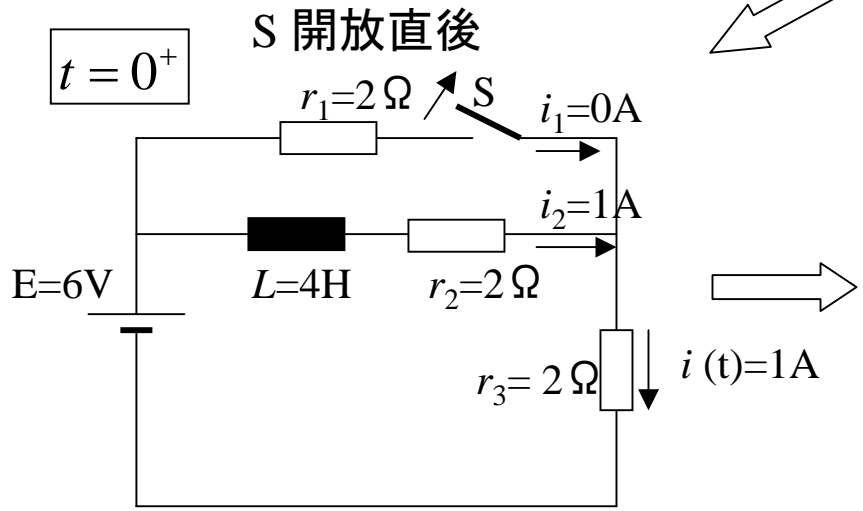
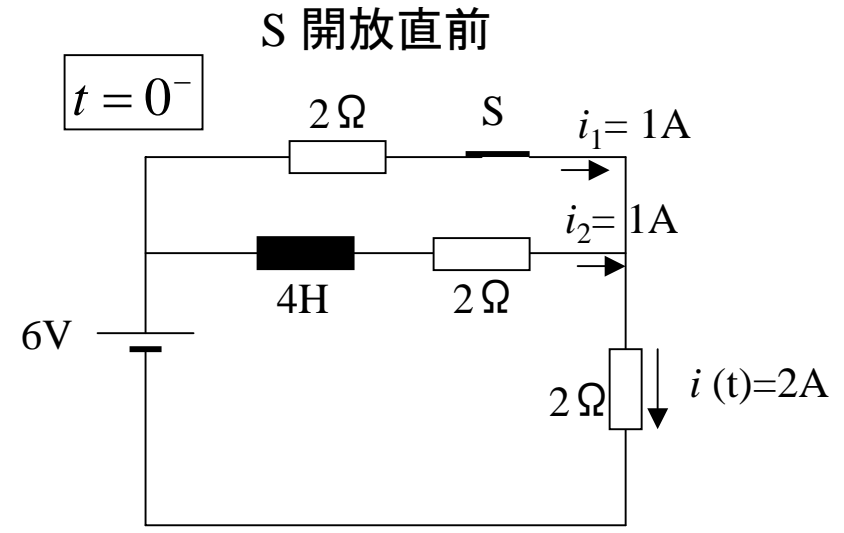
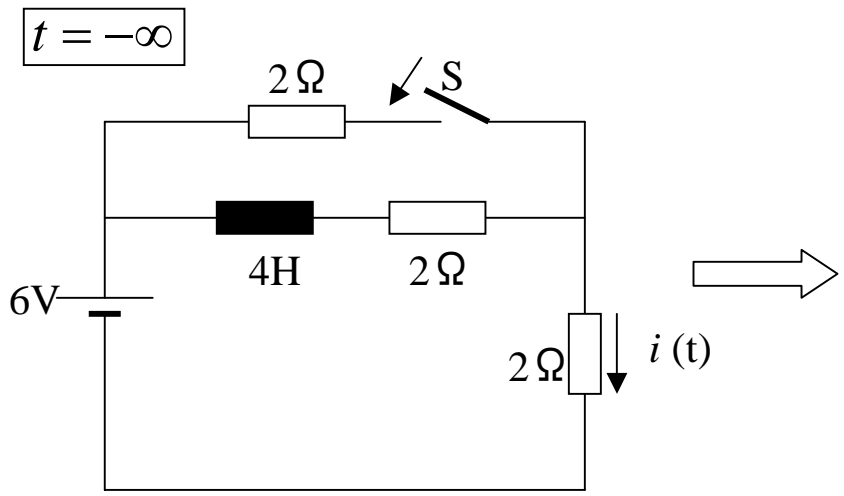
$$t=0^+ \text{ では、 } i = a = 1$$

$$t \rightarrow \infty \text{ では、 } i = b = 1.5$$

$$\alpha = 1$$

詳細は次頁以降参照

詳細図解



念のため、回路方程式を解いて見る。

$t \geq 0^+$ では、 $i_1 = 0$, $i = i_2$

$$\therefore E = L \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + r_3 i_2 = L \frac{di_2}{dt} + (r_2 + r_3) i_2$$

ラプラス変換すると、

$$L\{sI_2 - i_2(0^+)\} + (r_2 + r_3)I_2 = E/s$$

$$(sL + r_2 + r_3)I_2 = Li_2(0^+) + \frac{E}{s}$$

$$I_2 = \frac{i_2(0^+)}{s + (r_2 + r_3)/L} + \frac{E/L}{s(s + (r_2 + r_3)/L)}$$

数値を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i_2(0^+)}{s+1} + \frac{3/2}{s(s+1)} \\ &= \frac{i_2(0^+)}{s+1} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \end{aligned}$$

ラプラス逆変換すると、

$$i_2 = i_2(0^+) \varepsilon^{-t} + \frac{3}{2} (1 - \varepsilon^{-t})$$

$i_2(0^+) = 1[\text{A}]$ だから、

$$\begin{aligned} i_2 &= 1 \varepsilon^{-t} + \frac{3}{2} (1 - \varepsilon^{-t}) \\ &= i \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} i &= 1 \varepsilon^{-t} + \frac{3}{2} (1 - \varepsilon^{-t}) \\ &= a \exp(-\alpha t) + b(1 - \exp(-\alpha t)) \end{aligned}$$

この2式を比較して、

$\therefore a = 1, b = 1.5, \alpha = 1 \dots$ 正解は②

回路方程式を解かずに、解を知るには、解説にあるように、 $t = 0$ でのSの開放の前後で、インダクタンスを流れる電流が不変であること、 $t = 0^+$ 、 $t = \infty$ での値を利用する。