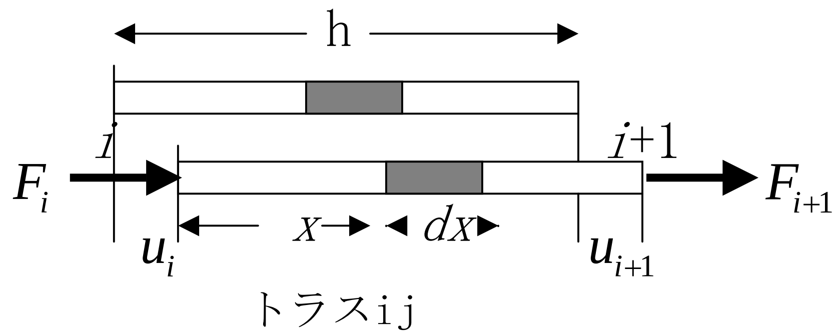
一次元トラスの有限要素法

1次元弾性体(トラス)の有限要素法。
縦軸に変位を表す図に書き換えると
熱伝導モデルと同様に扱える。
支配方程式として「仮想仕事の原理」。

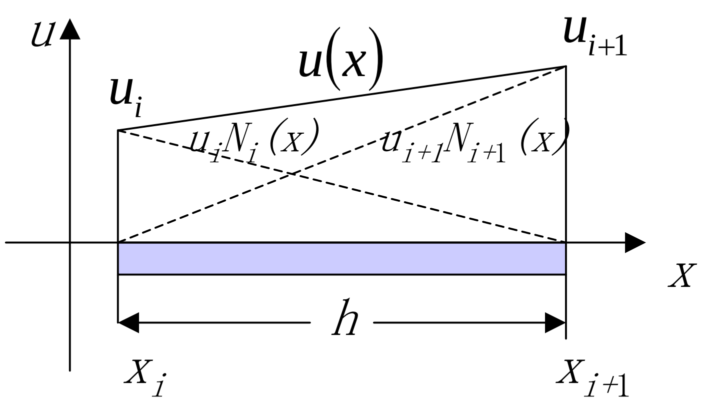
例題　棒の連結

1次元弾性体(トラス)の有限要素法の例

トラスの計算には、釣合い式、仮想仕事の原理、ポテンシャルエネルギー法(変分法)などがありますが、ここでは、「仮想仕事の原理」で説明します。



縦軸に変位を表す図に書き換える。



図のように釣合い状態 のトラスがあり

$$F=\begin{bmatrix}F_i\\F_{i+1}\end{bmatrix},\quad F_i+F_{i+1}=0$$ とします。

下図で基底関数を、次のように決めます。

$$N_i(x)=\frac{x_{i+1}-x}{h},\ N_{i+1}(x)=\frac{x-x_i}{h}\cdots p.4$$ の注参照

これを用いて、$x=x$ における変位の近似関数(形状関数ともいう。)$u(x)$は、

$$u(x)=u_iN_i(x)+u_{i+1}N_{i+1}(x)=\begin{bmatrix}N_i(x) & N_{i+1}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\u_{i+1}\end{bmatrix}$$

ひずみ ε は、

$$\varepsilon=\frac{du}{dx}=\begin{bmatrix}\frac{d}{dx}N_i(x) & \frac{d}{dx}N_{i+1}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\u_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{h} & \frac{1}{h}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\u_{i+1}\end{bmatrix}$$

応力 σ は、Eを縦弾性係数(ヤング率)として、

$$\sigma=E\varepsilon=E\begin{bmatrix}-\frac{1}{h} & \frac{1}{h}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\u_{i+1}\end{bmatrix}$$

節点 $i, i+1$ に x 方向の仮想変位（任意の値だが力のバランスには影響を与えない微小変位）

$\bar{u}_e = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_{i+1} \end{bmatrix}$ を与えます。また、$x = x$ における

仮想変位は、$\bar{u} = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_{i+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_{i+1} \end{bmatrix}$ で近似。

これにより、要素内部に仮想ひずみ $\bar{\varepsilon}$ が生じるとします。

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\,\bar{u}}{d\,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_{i+1} \end{bmatrix}$$

「仮想仕事の原理」とは、仮想変位によって外力のなした仮想仕事と内部の仮想ひずみエネルギーの積分値が等しい、すなわち、

$\bar{u}_e^T F = \int_0^h \bar{\varepsilon}^T \sigma \, dV$ が成り立つことです。$dV = Adx$

$$\therefore \begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{u}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{bmatrix} = EA \int_0^h \begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{u}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/h \\ 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} dx$$

$$= EA \int_0^h \begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{u}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/h^2 & -1/h^2 \\ -1/h^2 & 1/h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} dx$$

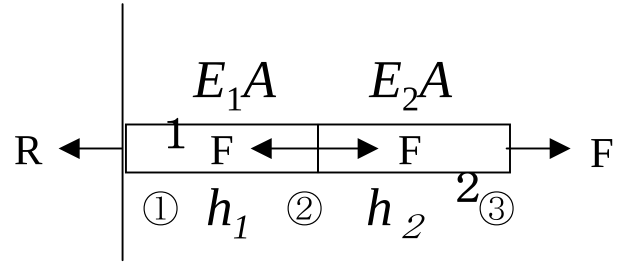
$$= EA \begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{u}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/h & -1/h \\ -1/h & 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{u}_{I+1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{bmatrix} - EA \begin{bmatrix} 1/h & -1/h \\ -1/h & 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \right\} = 0$$

仮想変位 $\bar{u}_e(\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$ は任意ですから、{ }内が0

$$\therefore \begin{bmatrix} EA/h & -EA/h \\ -EA/h & EA/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{bmatrix}$$

例題



$EA/h = k$ と書くと

トラス１について、

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ F \end{bmatrix}$$

トラス２について、

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ F \end{bmatrix},$$

これらを合成して、

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ -F+F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

ここで、$u_1 = 0$ (ディリクレ条件)は既知なので、
u_1の項を左辺から右辺に移項すると、

$$\begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

反力Rに関する第1行を除いて、

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{k_1 k_2} \begin{bmatrix} k_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F / k_1 \\ F(k_1 + k_2)/ k_1 k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F / k_1 \\ F(1/ k_1 + 1/ k_2) \end{bmatrix}$$

すなわち、$u_2 = \dfrac{F}{k_1}, u_3 = F\left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)$ が得られます。

反力R は、省略した第1行から、
$-k_1 u_2 = -R,\ \ R = k_1 u_2 = F$ となります。

$$u_3 = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

は2本のバネを直列にして1端を固定し、他端に外力 F を加えたときの伸びを求める式と一致します。

以上のように、トラスの問題は、熱伝導の問題で温度を未知数とした場合と同様に、変位を未知数とした有限要素法でテント型の基底関数を使って処理することが出来ます。

注.

$x_i \le x \le x_{i+1}$ におけるテント型の基底関数 $N_i(x)$ は、

$N_i(x) = a_i + b_i x = \begin{bmatrix} a_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ および、

$N_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1} x = \begin{bmatrix} a_{i+1} & b_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ と置けば、

$N_i(x_i) = 1, N_i(x_{i+1}) = 0,$
$N_{i+1}(x_i) = 0, N_{i+1}(x_{i+1}) = 1$ ですから、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_{i+1} & b_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_i & x_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_{i+1} & b_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_i & x_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{bmatrix} x_{i+1} & -1 \\ -x_i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{i+1} / h & -1/ h \\ -x_i / h & 1/ h \end{bmatrix}$$

$$\therefore N_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h},\ N_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{h}$$