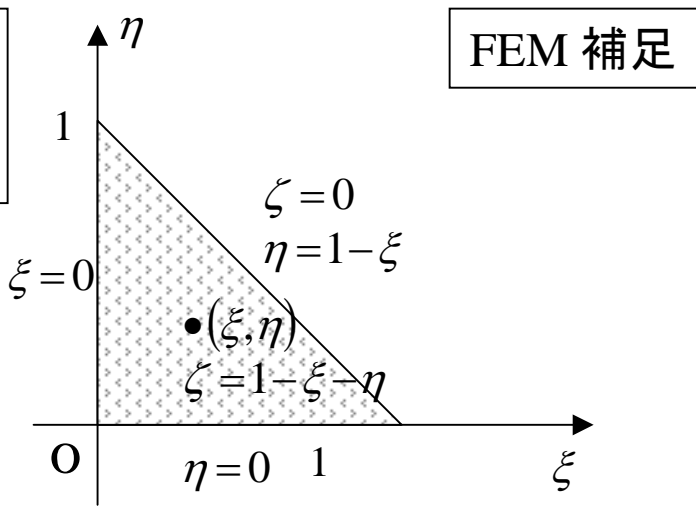
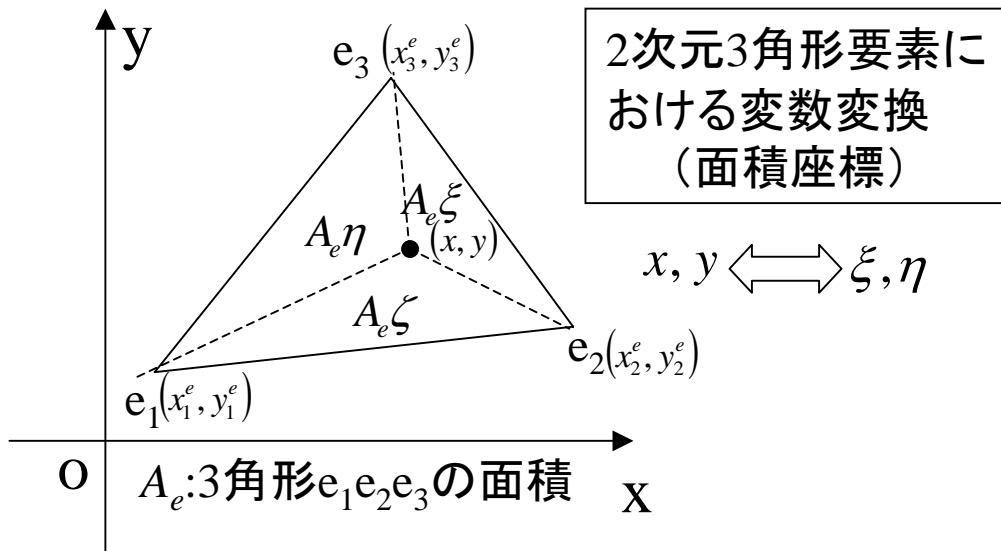


面積座標利用による三角形の座標変換

任意の位置にある任意の傾きを持つ 任意の大きさの3 角形を、
x-y座標軸を長さ1の各1辺とする面積 $1/2$ の直角3角形に変換する。
3角形内の1点は、その点と各頂点を結ぶ線により面積比で表
すことができ変換後も面積比で表される。
この変換によって有限要素法の計算過程で必要な積分計算等が
かなり簡略化される。



左図のように任意の位置、傾きを持つ三角形を、面積座標を利用して右図のような、固定の直角三角形に変数変換すると以後の積分等の扱いが容易になる。

$$\begin{cases} 1 = \xi + \eta + \zeta \\ x = x_1^e \xi + x_2^e \eta + x_3^e \zeta \\ y = y_1^e \xi + y_2^e \eta + y_3^e \zeta \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_3^e + (x_1^e - x_3^e)\xi + (x_2^e - x_3^e)\eta \\ y = y_3^e + (y_1^e - y_3^e)\xi + (y_2^e - y_3^e)\eta \end{cases}$$

$dxdy \iff Jd\xi d\eta$ 変数変換に伴うヤコビ アンJ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^e - x_3^e & x_2^e - x_3^e \\ y_1^e - y_3^e & y_2^e - y_3^e \end{vmatrix} = 2A_e$$

$$\int_{A_e} f(x, y) dx dy = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} f(x, y) 2A_e d\xi d\eta$$

ただし、 $x = x_3^e + (x_1^e - x_3^e)\xi + (x_2^e - x_3^e)\eta$
 $y = y_3^e + (y_1^e - y_3^e)\xi + (y_2^e - y_3^e)\eta$

$$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \xi^k \eta^l \zeta^m dx dy = 2A_e \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!}$$

これは、部分積分で証明できる(次ページ)。

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^e & b_1^e & c_1^e \\ a_2^e & b_2^e & c_2^e \\ a_3^e & b_3^e & c_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e & y_2^e - y_3^e & x_3^e - x_2^e \\ x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & y_3^e - y_1^e & x_1^e - x_3^e \\ x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e & y_1^e - y_2^e & x_2^e - x_1^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$N_1^e = \xi, N_2^e = \eta, N_3^e = \zeta$ が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^e & b_1^e & c_1^e \\ a_2^e & b_2^e & c_2^e \\ a_3^e & b_3^e & c_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix}$$

$$I_{klm} = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \xi^k \eta^l \zeta^m dx dy = 2A_e \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!} \text{の証明}$$

$$\begin{aligned} I_{klm} &= 2A_e \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \xi^k \eta^l \zeta^m d\xi d\eta \\ &= 2A_e \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \xi^k \eta^l (1-\xi-\eta)^m d\eta d\xi \\ &= \int_{\eta=0}^{1-\xi} \eta^l (1-\xi-\eta)^m d\eta \\ &= \left[\frac{\eta^{l+1}}{l+1} (1-\xi-\eta)^m \right]_{\eta=0}^{1-\xi} + \int_{\eta=0}^{1-\xi} \frac{\eta^{l+1}}{l+1} m(1-\xi-\eta)^{m-1} d\eta \\ &= \frac{m}{l+1} \int_{\eta=0}^{1-\xi} \eta^{l+1} (1-\xi-\eta)^{m-1} d\eta \\ &= \frac{m!}{(l+m)\cdots(l+1)} \int_{\eta=0}^{1-\xi} \eta^{l+m} d\eta \\ &= \frac{m!}{(l+m+1)(l+m)\cdots(l+1)} (1-\xi)^{l+m+1} \end{aligned}$$

FEM 補足

$$\begin{aligned} I_{klm} &= 2A_e \frac{m!}{(l+m+1)(l+m)\cdots(l+1)} \int_{\xi=0}^1 \xi^k (1-\xi)^{l+m+1} d\xi \\ &= \int_{\xi=0}^1 \xi^k (1-\xi)^{l+m+1} d\xi \\ &= \left[\frac{\xi^{k+1}}{k+1} (1-\xi)^{l+m+1} \right]_0^1 + (l+m+1) \int_0^1 \frac{\xi^{k+1}}{k+1} (1-\xi)^{l+m} d\xi \\ &= \frac{l+m+1}{k+1} \int_0^1 \xi^{k+1} (1-\xi)^{l+m} d\xi = \cdots = \\ &= \frac{(l+m+1)!}{(k+l+m+1)\cdots(k+1)} \int_0^1 \xi^{k+l+m+1} d\xi \\ &= \frac{(l+m+1)!}{(k+l+m+2)\cdots(k+1)} \\ \therefore I_{klm} &= 2A_e \frac{(l+m+1)!}{(l+m+1)\cdots(l+1)} \frac{1 \times m!}{(k+l+m+2)\cdots(k+1)} \\ &= 2A_e \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!} \end{aligned}$$

以上から、次式が成り立つ。

$$I_{klm} = \int_{A_e} N_1^{ek} N_2^{el} N_3^{em} dx dy = 2A_e \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!}$$