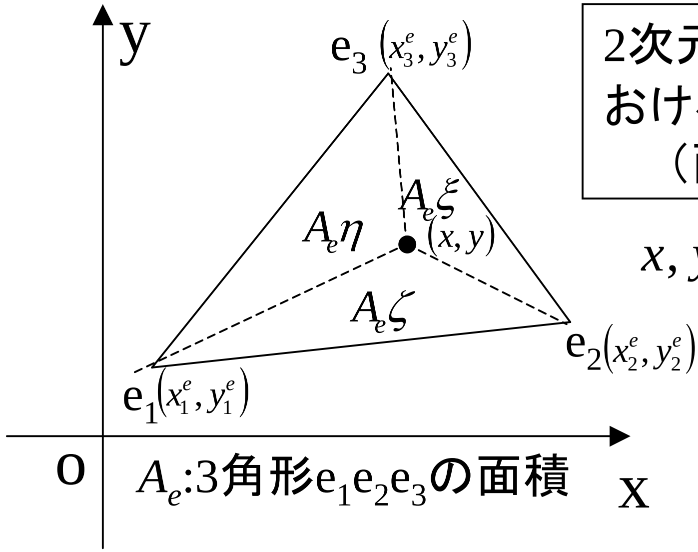
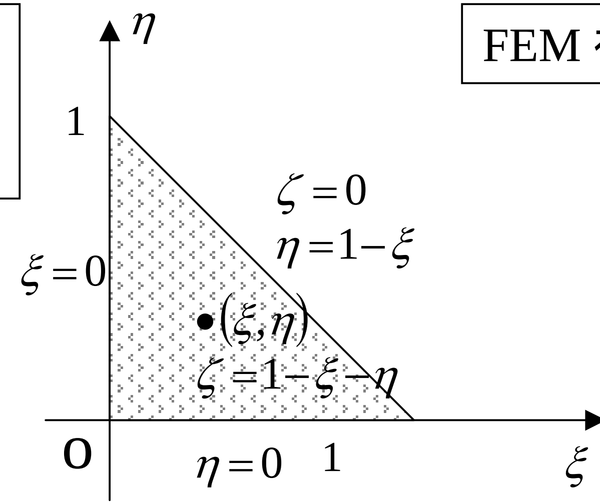
面積座標利用による三角形の座標変換

任意の位置にある任意の傾きを持つ 任意の大きさの３ 角形を、
x-y座標軸を長さ1の各１辺とする面積１/2の直角３角形に変換する。
３角形内の１点は、その点と各頂点を結ぶ線により面積比で表
すことができ変換後も面積比で表される。
この変換によって有限要素法の計算過程で必要な積分計算等が
かなり簡略化される。

2次元3角形要素における変数変換（面積座標）



$$x, y \Longleftrightarrow \xi, \eta$$



左図のように任意の位置、傾きを持つ三角形を、面積座標を利用して右図のような、固定の直角三角形に変数変換すると以後の積分等の扱いが容易になる。

$$\begin{cases} 1 = \xi + \eta + \zeta \\ x = x_1^e\xi + x_2^e\eta + x_3^e\zeta \\ y = y_1^e\xi + y_2^e\eta + y_3^e\zeta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_3^e + \left(x_1^e - x_3^e\right)\xi + \left(x_2^e - x_3^e\right)\eta \\ y = y_3^e + \left(y_1^e - y_3^e\right)\xi + \left(y_2^e - y_3^e\right)\eta \end{cases}$$

$dxdy \Leftrightarrow J d\xi d\eta$ 変数変換に伴うヤコビ アンJ

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^e - x_3^e & x_2^e - x_3^e \\ y_1^e - y_3^e & y_2^e - y_3^e \end{vmatrix} = 2A_e$$

$$\int_{A_e} f(x, y)\,dxdy = \int_{\xi=0}^{1}\int_{\eta=0}^{1-\xi} f(x, y)\, 2A_e\, d\xi d\eta$$

ただし、$x = x_3^e + \left(x_1^e - x_3^e\right)\xi + \left(x_2^e - x_3^e\right)\eta$

$y = y_3^e + \left(y_1^e - y_3^e\right)\xi + \left(y_2^e - y_3^e\right)\eta$

$$\int_{\xi=0}^{1}\int_{\eta=0}^{1-\xi} \xi^k \eta^l \zeta^m\, dxdy = 2A_e \frac{k!\,l!\,m!}{(k + l + m + 2)!}$$

これは、部分積分で証 明できる(次ページ)。

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^e & b_1^e & c_1^e \\ a_2^e & b_2^e & c_2^e \\ a_3^e & b_3^e & c_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e & y_2^e - y_3^e & x_3^e - x_2^e \\ x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & y_3^e - y_1^e & x_1^e - x_3^e \\ x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e & y_1^e - y_2^e & x_2^e - x_1^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$N_1^e=\xi, N_2^e=\eta, N_3^e=\zeta$ が成り立つ。

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1^e & x_2^e & x_3^e\\ y_1^e & y_2^e & y_3^e\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1^e & b_1^e & c_1^e\\ a_2^e & b_2^e & c_2^e\\ a_3^e & b_3^e & c_3^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1^e\\ N_2^e\\ N_3^e\end{bmatrix}$$

$I_{klm}=\int_{\xi=0}^{1}\int_{\eta=0}^{1-\xi}\xi^k\eta^l\zeta^m dxdy=2A_e\dfrac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!}$ の証明

$$I_{klm}=2A_e\int_{\xi=0}^{1}\int_{\eta=0}^{1-\xi}\xi^k\eta^l\zeta^m d\xi d\eta$$

$$=2A_e\int_{\xi=0}^{1}\int_{\eta=0}^{1-\xi}\xi^k\eta^l(1-\xi-\eta)^m d\eta d\xi$$

$$\int_{\eta=0}^{1-\xi}\eta^l(1-\xi-\eta)^m d\eta$$

$$=\left[\frac{\eta^{l+1}}{l+1}(1-\xi-\eta)^m\right]_{\eta=0}^{1-\xi}+\int_{\eta=0}^{1-\xi}\frac{\eta^{l+1}}{l+1}m(1-\xi-\eta)^{m-1}d\eta$$

$$=\frac{m}{l+1}\int_{\eta=0}^{1-\xi}\eta^{l+1}(1-\xi-\eta)^{m-1}d\eta$$

$$=\frac{m!}{(l+m)\cdots(l+1)}\int_{\eta=0}^{1-\xi}\eta^{l+m}d\eta$$

$$=\frac{m!}{(l+m+1)(l+m)\cdots(l+1)}(1-\xi)^{l+m+1}$$

$$I_{klm}=2A_e\frac{m!}{(l+m+1)(l+m)\cdots(l+1)}\int_{\xi=0}^{1}\xi^k(1-\varsigma)^{l+m+1}d\xi$$

$$\int_{\xi=0}^{1}\xi^k(1-\xi)^{l+m+1}d\xi$$

$$=\left[\frac{\xi^{k+1}}{k+1}(1-\xi)^{l+m+1}\right]_0^1+(l+m+1)\int_0^1\frac{\xi^{k+1}}{k+1}(1-\xi)^{l+m}d\xi$$

$$=\frac{l+m+1}{k+1}\int_0^1\xi^{k+1}(1-\xi)^{l+m}d\xi=\cdots=$$

$$=\frac{(l+m+1)!}{(k+l+m+1)\cdots(k+1)}\int_0^1\xi^{k+l+m+1}d\xi$$

$$=\frac{(l+m+1)!}{(k+l+m+2)\cdots(k+1)}$$

$$\therefore I_{klm}=2A_e\frac{(l+m+1)!}{(l+m+1)\cdots(l+1)}\frac{1\times m!}{(k+l+m+2)\cdots(k+1)}$$

$$=2A_e\frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!}$$

以上から、次式が成り立つ。

$$I_{klm}=\int_{A_e}N_1^{ek}N_2^{el}N_3^{em}dxdy=2A_e\frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!}$$