「対称座標法」と「重畳の理」および代表的な「故障計算法」について

故障計算に不可欠な「対称座標法」と、回路計算の分割重ね合わせが可能なことを示す「重畳の理」について解説する。ついで、「1線地絡、2線地絡、2線短絡、3線地絡・短絡」等の計算法を示す。

2003年1月

1.対称座標法

a,b,c 3相の量を、正 (1)、逆 (2)、零 (0)の対称座標に置き換えることにより、計算を容易にしようとする方法である。

2.原理

(1) 1の3乗根

$1=\varepsilon^{j0}=\varepsilon^{j2\pi}=\varepsilon^{j4\pi}$から、その 3乗根は、

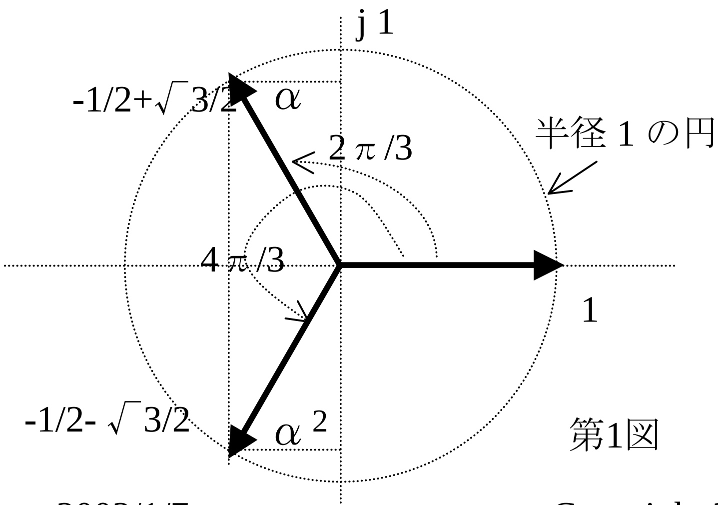
$\varepsilon^{j0/3}=1$

$$\varepsilon^{j2\pi/3}=\cos(2\pi/3)+j\sin(2\pi/3)=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\equiv\alpha$$ とおく。

$$\varepsilon^{j4\pi/3}=\cos(4\pi/3)+j\sin(4\pi/3)=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha^2$$

となる。(第1図)

注1. $\varepsilon^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$をオイラーの公式という。



第1図

注 2. 1の3乗根は次のようにしても求められる。

$x^3=1$から、 $x^3-1=0$、これを因数分解して、

$$(x-1)(1+x+x^2)=0,\ \ x=1,\ \ \text{or}\ \ 1+x+x^2=0$$

この二次式を解くと

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1-4*1}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) αの性質

$\alpha^3=1,\ \alpha^4=\alpha^3\cdot\alpha=\alpha,\ \alpha^5=\alpha^2,\ \alpha^{3k}=1,\ \alpha^{3k+1}=\alpha,\ \alpha^{3k+2}=\alpha^2$

ただし、 kは $0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots$, また、 $\alpha^*=\alpha^2,\ \alpha^{2*}=\alpha$

$1+\alpha+\alpha^2=0$, (第1図の三つのベクトルの 和が 0)

αを掛けると 120度進む。α^2を掛けると 240度進む。

(3) 対称座標法

a, b, c 相のベクトル v_a, v_b, v_c から次のようにして零、正、逆相のベクトルv_0, v_1, v_2を作る。

$$v_0=\frac{1}{3}(v_a+v_b+v_c)$$

$$v_1=\frac{1}{3}(v_a+\alpha v_b+\alpha^2 v_c)$$

$$v_2=\frac{1}{3}(v_a+\alpha^2 v_b+\alpha v_c)$$

前式から、逆に v_a, v_b, v_c は次のようにして求められる。

$$v_a = v_0 + v_1 + v_2$$
$$v_b = v_0 + \alpha^2 v_1 + \alpha v_2$$
$$v_c = v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2$$

ここで、

$$v_p = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}, v_s = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$ と書けば、

$v_p = Av_s$, $v_s = A^{-1}v_p = \frac{1}{3}A^* v_p$ となる。

この座標変換法により、v_p と v_s とが 1:1に対応する。

v_p, v_s として電圧ベクトル V, 電流ベクトル Iを用いると、それぞれ、A^*を A の共役行列として、

$$V_s = \frac{1}{3}A^* V_p,\ V_p = AV_s \cdots\cdots ①,②$$

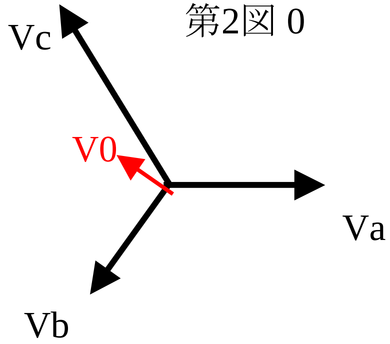
$$I_s = \frac{1}{3}A^* I_p,\ I_p = AI_s \cdots\cdots\cdots ③,④$$

となる。

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A^* = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}, \frac{1}{3}A^* * A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

第2図 0



0. 零相成分

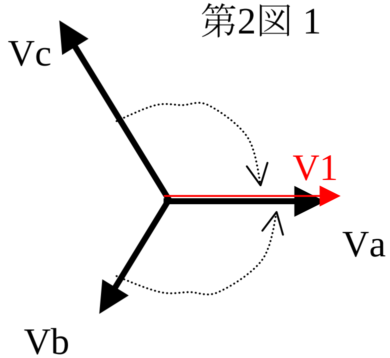
$$v_0 = \frac{1}{3}(v_a + v_b + v_c)$$

3つのベクトルのベクトル和の 3 分の 1

3 相平衡していれば 0

長さや位相に平衡位置からのずれがあれば 0 でなくなる。

第2図 1



1. 正相成分

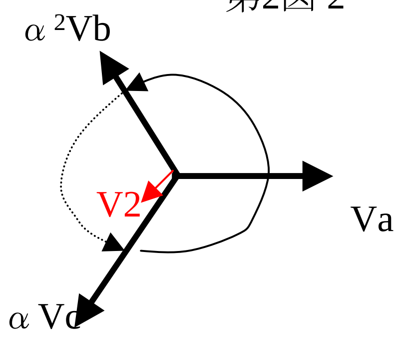
$$v_1 = \frac{1}{3}(v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c)$$

b, c 相のベクトルを a 相の位置に移動した値の平均値 (1/3)

3 相平衡していれば Va

長さや位相に平衡位置からのずれがあれば Va でなくなる。

第2図 2



2. 逆相成分

$$v_0 = \frac{1}{3}(v_a + \alpha^2 v_b + \alpha v_c)$$

b 相を120度、c 相を 240 度進めたベクトル和の 3 分の 1

3 相平衡していれば 0

長さや位相に平衡位置からのずれがあれば 0 でなくなる。

電圧 V,電流 I について対称座標法を 適用すると

$V_a = V_0 + V_1 + V_2$

$V_b = V_0 + \alpha^2 V_1 + \alpha V_2 \cdots (V_p = A V_s)$

$V_c = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2$

$I_a = I_0 + I_1 + I_2$

$I_b = I_0 + \alpha^2 I_1 + \alpha I_2 \cdots (I_p = A I_s)$

$I_c = I_0 + \alpha I_1 + \alpha^2 I_2$

故障ノード f における各対称相の電 圧電流間には、

鳳・テブナンの定理に より、次式が成り立つ 。

$V_{0f} = -I_{0f} Z_{0ff}$

$V_{1f} = V_f - I_{1f} Z_{1ff} \cdots (V_{sf} = V_{fs} - I_s Z_{sff}, V_{f0} = V_{f2} = 0, V_{f1} = V_f)$

$V_{2f} = -I_{2f} Z_{2ff}$

故障条件によって対称 相の電圧V_s電流I_sの条件を求め

$v_p = A v_s$を使って各相の電圧、 電流ベクトルを求める 。

各対称相のインピーダ ンス行列 $Z_s(s = 0, 1, 2)$ は次の

ようにして求める。

重畳の理により、故障 による変化分だけを見 ると、

$V_0 = -I_{0f} Z_{0ff}, V_1 = -I_{1f} Z_{1ff}, V_2 = -I_{2f} Z_{2ff}$

となり、零相、正相、 逆相はそれぞれ独立に

考えることができる。

零相インピーダンス Z_0

$V_1 = V_2 = 0$とすれば、$V_a = V_b = V_c = V_0$

すなわち、回路の a,b,c 三相を一括して

電圧V_0を加えると流れる電流 は、$I_a = I_b = I_c = I_0$から

$3I_0$となる。したがって

$Z_0 = -V_0 / (3I_0) * 3$

となる。すなわち、三 相一括して電圧を加え た時に

流れる電流から求めた 値の3倍となる。

正相インピーダンス Z_1

$V_0 = V_2 = 0$とすれば、 $V_a = V_1, V_b = \alpha^2 V_1, V_c = \alpha V_1,$

$I_a = I_1, I_b = \alpha^2 I_1, I_c = \alpha I_1,\ V_1 = -I_1 Z_1$

すなわち、三相平衡電 圧を与えた時に流れる 三相

平衡電流から求めた各 相インピーダンスとな る。

逆相インピーダンス Z_2

$V_0 = V_1 = 0$とすれば、 $V_a = V_2, V_b = \alpha V_2, V_c = \alpha^2 V_2,$

$I_a = I_2, I_b = \alpha I_2, I_c = \alpha^2 I_2,\ V_2 = -I_2 Z_2$

すなわち、三相平衡逆 回転の電圧を与えた時 に流れる

三相平衡電流から求め た各相インピーダンス となる。

Z行列

ここでは、正逆零相の ブランチデータから、 Y行列

を作り、その逆行列と して Z行列を作る。

なお、ブランチデータ から直接 Z行列を組み立てる

方法もある。

注. 座標変換と1対1対応

座標変換の例として、 y年、m月、d日の三つの量の変換を考えてみる 。

変換行列Tとして次を考える。

$$T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\ T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

Tによる変換後の量を p, q, rとすれば

$$\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ m\\ d\end{bmatrix}$$ となる。 また、

$$\begin{bmatrix}y\\ m\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}$$ である。

$$\mathrm{time}=\begin{bmatrix}y\\ m\\ d\end{bmatrix},\ \mathrm{emit}=\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}$$ と書けば

$\mathrm{emit}=\mathrm{T}*\mathrm{time}$,

$\mathrm{time}=\mathrm{T}^{-1}*\mathrm{emit}$ であり、一つの timeに一つのemitが対応し、どちらか一方で他方を代表することができる。(1対1対応)

[数値例]

1953年12月24日を変換すれば

$$emit=\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1953+12+24\\ 1953-12+0\\ 0+12-24\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1989\\ 1941\\ -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}663\\ 647\\ -4\end{bmatrix}$$

この $emit$ の値を暗号として送ると、受け取り側はT^{-1}を使って、次のように復号できる(T, T^{-1} はkeyに相当)。

$$time=T^{-1}*emit=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}663\\ 647\\ -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}663+2*647+(-4)\\ 663-647+(-4)\\ 663-647-2*(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1953\\ 12\\ 24\end{bmatrix}$$

Tの選定は自由だが T^{-1} が存在する必要がある($|T|\neq 0$)。

[例題]m月d日を $T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ として変換し、また、逆変換することを考えてみよ。

$$\mathrm{emit}=\begin{bmatrix}\dfrac{m+d}{2}\\ \dfrac{m-d}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}$$ から $$\begin{bmatrix}m\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p+q\\ p-q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}$$

$p=7,\ q=1$ のときは、$m=8,\ d=6$, (8月6日).

2. 重畳の理

一般の交流回路(線形回路)では、アドミタンス行列を Y、インピーダンス行列を Z 、各ノードの電圧ベクトルを V、各ノードに回路外から流入する電流ベクトルを I として次の関係が成り立つ $\left(Z = Y^{-1}, Y = Z^{-1}\right.$ である$\left.\right)$。

$I = YV$

$V = ZI$

回路にさらに ΔI が加わると、 $I \Rightarrow I + \Delta I$ となり、これによって V が ΔV だけ変化したとすると 、

$V + \Delta V = Z(I + \Delta I) = Z \cdot I + Z \cdot \Delta I$ となる。 $V = ZI$ であるから、

$\Delta V = Z \cdot \Delta I$ となる。

すなわち、入力電流 I の時の電圧 V に、入力電流 ΔI による電圧の変化分 ΔI を別途計算した上で加算(重畳)すると、変化後の電圧分布が求められる。

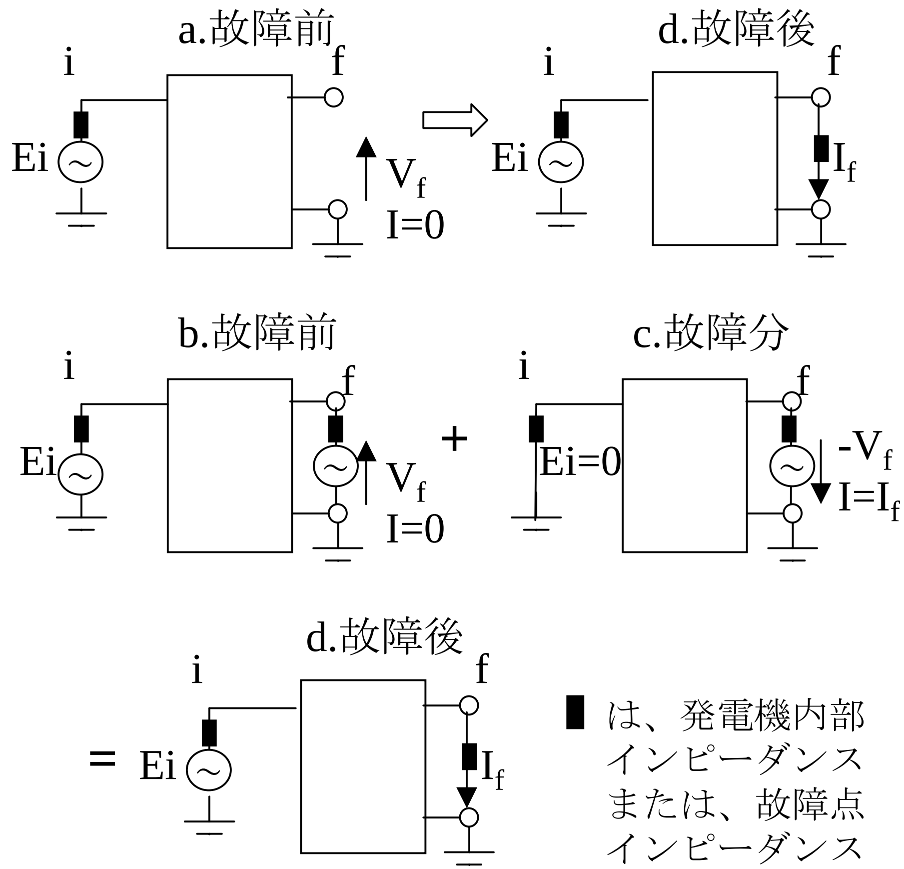
同様に、 $I + \Delta I = Y(V + \Delta V) = Y \cdot V + Y \cdot \Delta V$ から

$\Delta I = Y \cdot \Delta V$ となり電流分布も加算(重畳 = 重ね合わせ)可能となる。

この原理を「重畳の理」と呼び、鳳・テブナンの定理もその一種である。

この原理を応用して、故障前の電圧電流に、故障時の変化分を加えて、故障発生後の電圧電流分布を求めることが、通常行われている方法である。

鳳・テブナンの定理



d = b + c

すなわち、故障後の電圧・電流分布は、故障前の分布(a,b)に、回路網中の起電力をすべて取り去り、故障点に、故障前に現れていた電圧に相当する起電力を挿入した時に流れる電流(c)を重ね合わせた分布に等しくなる。

3.代表的な故障計算

まず、故障前の電圧電流分布を電圧潮流計算プログラムを用いて計算する。

次に、故障計算用の零相、正相、逆相のインピーダンスマップを作成する必要がある。

データの形は、潮流計算のブランチデータと同じルールで作る。

この場合、「重畳の理」を活用するので、故障点に故障電流に相当する電流源があるかのように計算して、故障電流による電圧変化を求め、これを故障前の電圧に加えて故障後の電圧分布を求める。

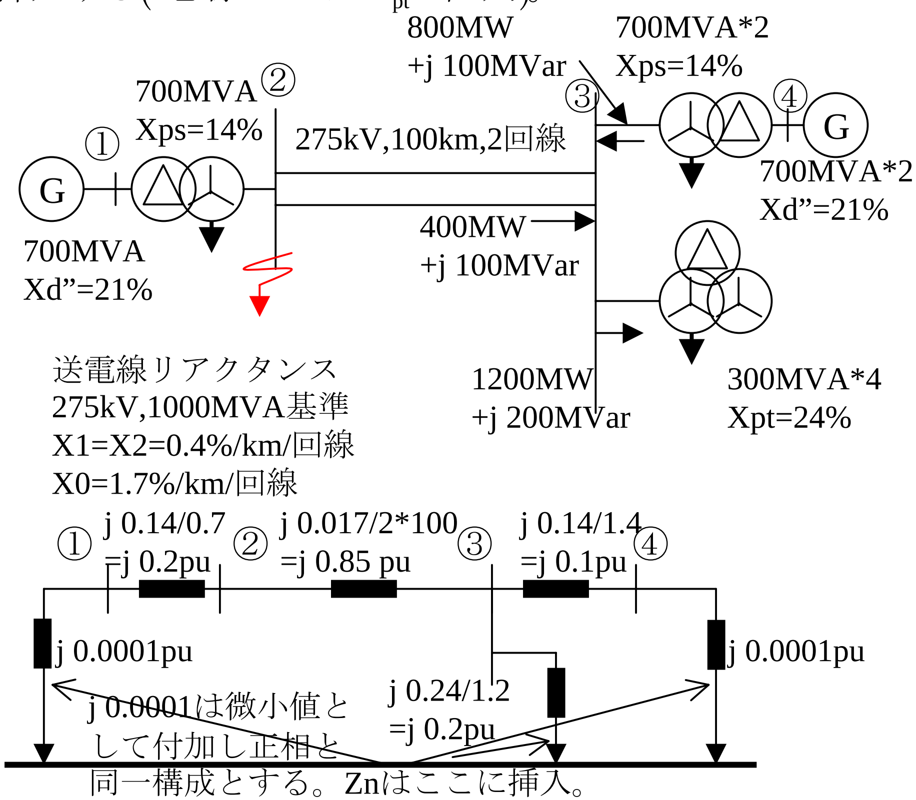
そのため、故障前にあった起電力をすべて取り去り発電機等同期機は内部インピーダンスのみで代表する。正相回路では、前記故障前の系統と同期機の所だけが異なることになる。

(1)零相回路のZマップ

3相一括して電圧を加えた時に流入する電流値の1相分あたりとして求める。

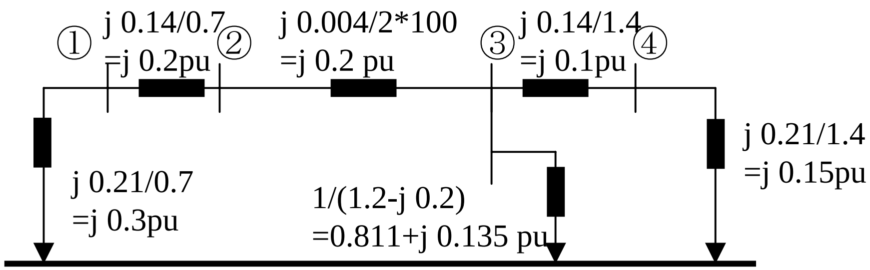
中性点接地抵抗や大地帰路は1相当たりにすると3倍になる。

零相Zマップでは、零相電流がデルタ巻線を環流するので中性点を接地してあるスター巻線とデルタ巻線間のインピーダンスで代表する。この場合、発電機端子のノードが不要になるが、正逆相と同じ系統構成とするため、変圧器に直列に変圧器Zより3～4桁程度小さなリアクタンスを挿入しておく。この分が誤差になるが無視する。なお、中性点接地インピーダンス(Zn)がある場合はこの位置に挿入する(3巻線TrfではX_{pt}に直列)。



(2)正逆相Zマップ

故障前の電圧電流計算に使用するZマップと基本的に同じであるが、同期機　の所は次過渡同期イン ピーダンスXd"で置換え一端を中性線 に接続する。



(3) Y行列、Z行列の作成

電圧潮流計算と同様な 原理で、まず　Y行列を作り、その逆行列として　Z行列を作る。これを零　、正、逆各相別に行う (逆相は正相と同じ)。

(4)故障計算の基本式

故障点 fにおいて故障前には、a, b, c相の電流は存在せず、従って、零、正、逆相　　電流は0、電圧の零相、逆相も　通常存在せず0である。正相電圧は、 V_{af} である。

すなわち、故障前には

$V'_{1f} = V_{af}$ (a 相基準)、 $V'_{0f} = V'_{2f} = 0,\ I'_{0f} = I'_{1f} = I'_{2f} = 0$ である。

故障による変化分は、　故障電流の向きを系統 から外部に流れ出す向きにとると

$$V_s = -I_s Z_s[f, f],\ s = 0, 1, 2$$

上記と合成して

$$0 + V_{0f} = -Z_0[f, f] \cdot I_{0f}$$

$$V'_{1f} + V_{1f} = V_{af} - Z_1[f, f] \cdot I_{1f}$$

$$0 + V_{2f} = -Z_2[f, f] \cdot I_{2f}$$

すなわち、故障後の故　障点電圧 V_{sf} ,電流 I_{sf} について次式が成り立　つ。

$$V_{0f} = -Z_0[f, f] \cdot I_{0f} \cdots\cdots ⑤$$

$$V_{1f} = V_{af} - Z_1[f, f] \cdot I_{1f} \cdots ⑥$$

$$V_{2f} = -Z_2[f, f] \cdot I_{2f} \cdots\cdots ⑦$$

(5−1)a 相1線地絡故障計算(1LG)

$$V_{af} = 0,\ I_{bf} = I_{cf} = 0 \cdots ⑧$$

$$V_{0f} + V_{1f} + V_{2f} = 0 \cdots ⑨$$

$$I_{0f} + \alpha^2 I_{1f} + \alpha I_{2f} = I_{0f} + \alpha I_{1f} + \alpha^2 I_{2f} = 0$$

これから $(\alpha^2 - \alpha) I_{1f} = (\alpha^2 - \alpha) I_{2f}$

$$\therefore I_{1f} = I_{2f}$$

$$I_{0f} + (\alpha^2 + \alpha) I_{1f} = I_{0f} - I_{1f} = 0$$

$$\therefore I_{0f} = I_{1f} = I_{2f} \equiv I_e \cdots ⑩$$

⑤,⑥,⑦,⑨ に代入して

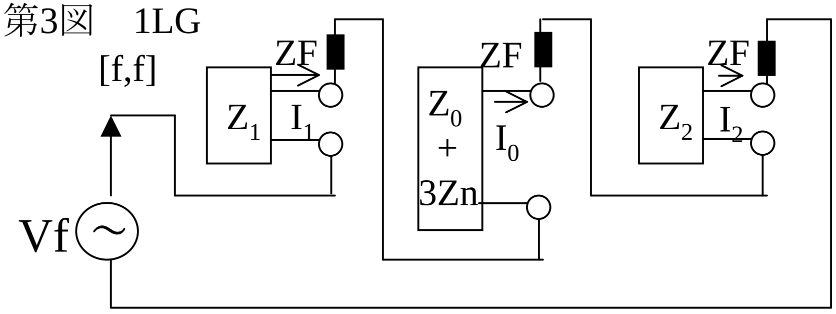
$$V_{af}=V_{0f}+V_{1f}+V_{2f}$$
$$=V_f-I_e\left(Z_0[f,f]+Z_1[f,f]+Z_2[f,f](+3ZF)\right)=0$$
$$\therefore I_e=\frac{V_f}{Z_0[f,f]+Z_1[f,f]+Z_2[f,f](+3ZF)}$$

故障点 $Z=ZF$ がある場合は　Z_0,Z_1,Z_2に加えておく。

$$(\because \Delta V_{af}=-I_{af}*ZF=-(I_0+I_1+I_2)*ZF=-3I_eZF)$$
$$I_a=I_0+I_1+I_2=3I_e$$
$$V_0=-I_eZ_0,\ V_1=V_f-I_eZ_1,\ V_2=-I_eZ_2\ (\text{以下 }[f,f]\text{を省略})$$
$$V_b=\alpha^2V_f-\left(Z_0+\alpha^2Z_1+\alpha Z_2\right)I_e=\frac{(\alpha^2-1)Z_0+(\alpha^2-\alpha)Z_2}{Z_0+Z_1+Z_2}V_f$$
$$V_c=\alpha V_f-\left(Z_0+\alpha Z_1+\alpha^2Z_2\right)I_e=\frac{(\alpha-1)Z_0+(\alpha-\alpha^2)Z_2}{Z_0+Z_1+Z_2}V_f$$

故障点以外のノード　g での電圧電流の変化分 は、f 点から流出する　$I_e=I_0=I_1=I_2$なる電流源がある場合　に等しく、 $\Delta V_{0g}=-Z_0[g,f]*I_e,\ \Delta V_{1g}=-Z_1[g,f]*I_e,\Delta V_{2g}=-Z_2[g,f]*I_e$ から求める。等価回路　は、第　3 図。

第3図　1LG



a. 直接接地系

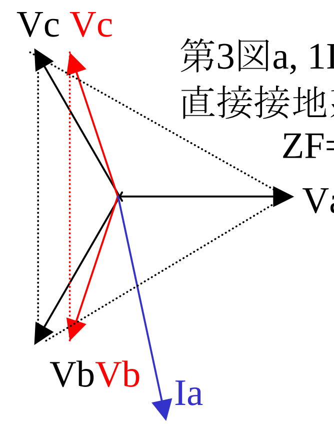
$Z_0\approx Z_1\approx Z_2$として、　$I_a\approx\frac{3V_f}{3Z_1}=\frac{V_f}{Z_1},\ I_b=I_c=0$

$$V_a=0,\quad V_b\approx\frac{(2\alpha^2-1-\alpha)Z_1V_f}{3Z_1}=\frac{3\alpha^2V_f}{3}=\alpha^2V_f$$
$$V_c\approx\frac{(2\alpha-1-\alpha^2)Z_1V_f}{3Z_1}=\frac{3\alpha V_f}{3}=\alpha V_f$$

b. 高インピーダンス接地系

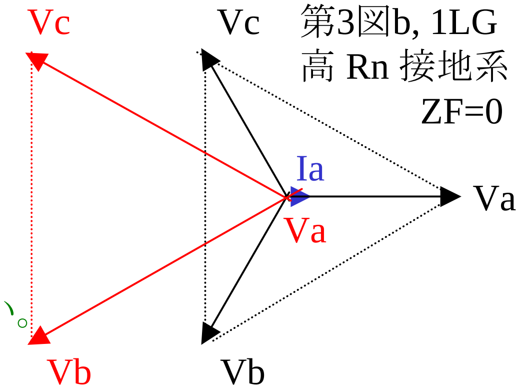
$Z_0\approx 3Z_n>>Z_1\approx Z_2$ として、

$$I_a=\frac{3V_f}{3Z_n}=\frac{V_f}{Z_n},\ I_b=I_c=0$$
$$V_a=0,$$
$$V_b=\frac{(\alpha^2-1)3Z_nV_f}{3Z_n}=(\alpha^2-1)V_f$$
$$V_c=\frac{(\alpha-1)3Z_nV_f}{3Z_n}=(\alpha-1)V_f$$



第3図a, 1LG
直接接地系
ZF=0

注.非接地系では、主として静電容量によって電圧が決まるので、アドミタンスタイプ(3)でC分を入力するとよい。



第3図b, 1LG
高 Rn 接地系
ZF=0

(5−2) b,c相2線地絡(2LG)

$V_b = V_c = 0,\ I_a = 0$

$I_a = I_0 + I_1 + I_2 = 0, \therefore I_0 = -I_1 - I_2$

$V_b = V_0 + \alpha^2 V_1 + \alpha V_2 = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 = V_c$

$(\alpha^2 - \alpha)V_1 = (\alpha^2 - \alpha)V_2, \therefore V_1 = V_2$

$V_0 + (\alpha^2 + \alpha)V_1 = V_0 - V_1 = 0, \therefore V_0 = V_1 = V_2$

$V_0 = -I_0 Z_0[f,f] = (I_1 + I_2)Z_0[f,f]$

$V_1 = V_f - I_1 Z_1[f,f]$

$V_2 = -I_2 Z_2[f,f]$

$V_0 = V_1 = V_2$ から

$(I_1 + I_2)Z_0 = V_f - I_1 Z_1 = -I_2 Z_2$

$$I_2 = \frac{-Z_0}{Z_0 + Z_2} I_1$$

$$V_f = I_1 Z_1 - \frac{-Z_0 * Z_2}{Z_0 + Z_2} I_1 = \frac{\Delta}{Z_0 + Z_2}$$

$\Delta = (Z_0 Z_1 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0)$

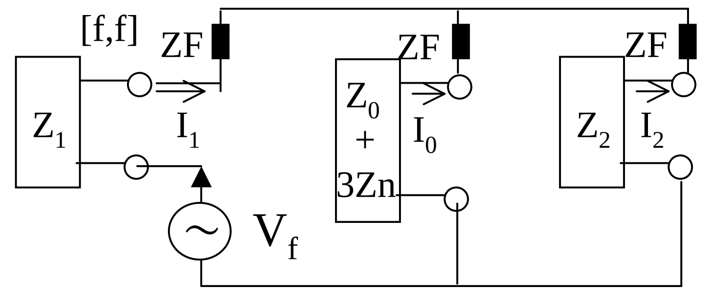
$$\therefore I_1 = \frac{Z_0 + Z_2}{\Delta} V_f,\ I_2 = \frac{-Z_0}{\Delta} V_f,\ I_0 = \frac{-Z_2}{\Delta} V_f$$

$$I_b = \frac{-Z_2 + \alpha^2 (Z_0 + Z_2) - \alpha Z_0}{\Delta} V_f = \frac{(\alpha^2 - \alpha)Z_0 + (\alpha^2 - 1)Z_2}{\Delta} V_f$$

$$I_c = \frac{-Z_2 + \alpha (Z_0 + Z_2) - \alpha^2 Z_0}{\Delta} V_f = \frac{(\alpha - \alpha^2)Z_0 + (\alpha - 1)Z_2}{\Delta} V_f$$

$V_a = 3V_0 = -3I_0 Z_0 = \dfrac{3Z_0 Z_2}{\Delta} V_f$, 等価回路は第4図

第4図　2LG



a.直接接地系

$Z_0 \approx Z_1 \approx Z_2$ として、

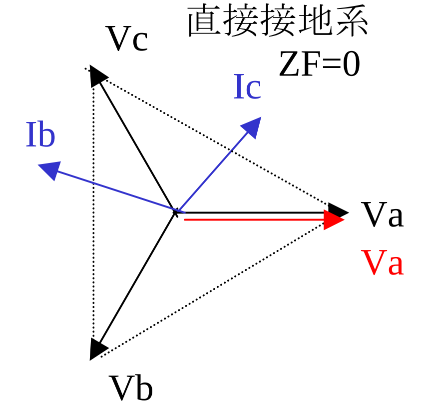
$I_a = 0,$

$$I_b \approx \frac{3\alpha^2 V_f}{3Z_1} = \frac{\alpha^2 V_f}{Z_1},$$

$$I_c \approx \frac{\alpha V_f}{Z_1}$$

$V_a \approx V_f,\ V_b = V_c = 0$

第4図a. 2LG
直接接地系
ZF=0



b.高インピーダンス接地系

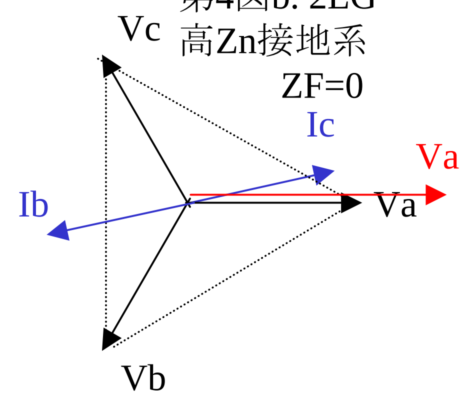
$Z_0 \approx 3Z_n >> Z_1 \approx Z_2$

$I_a = 0,$

$$I_b \approx \frac{(\alpha^2 - \alpha)V_f}{2Z_1} = -j\frac{\sqrt{3}V_f}{2Z_1} \approx -I_c$$

$V_a \approx \dfrac{3V_f}{2},\ V_b = V_c = 0$

第4図b. 2LG
高Zn接地系
ZF=0



(5−3) b, c相 2線短絡(2LS)

$V_b = V_c$

$I_a = 0,\ I_b = -I_c$

$I_0 + I_1 + I_2 = 0,\ I_0 + \alpha^2 I_1 + \alpha I_2 = -I_0 - \alpha I_1 - \alpha^2 I_2$

$2I_0 + (\alpha^2 + \alpha)(I_1 + I_2) = 2I_0 - (I_1 + I_2) = 0$

$$\therefore I_0 = \frac{I_1 + I_2}{2} = -\frac{I_0}{2},\quad \therefore I_0 = 0,\ I_2 = -I_1$$

$V_b = V_0 + \alpha^2 V_1 + \alpha V_2 = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 = V_c$

$(\alpha^2 - \alpha)V_1 = (\alpha^2 - \alpha)V_2,\ \therefore V_2 = V_1$

$V_0 = -I_0 Z_0 = 0,\ V_1 = V_f - I_1 Z_1 = -I_2 Z_2 = I_1 Z_1$

$$V_f = I_1(Z_1 + Z_2),\ \therefore I_1 = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2},\ I_2 = -\frac{V_f}{Z_1 + Z_2}$$

$$V_1 = V_f - I_1 Z_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_f = V_2$$

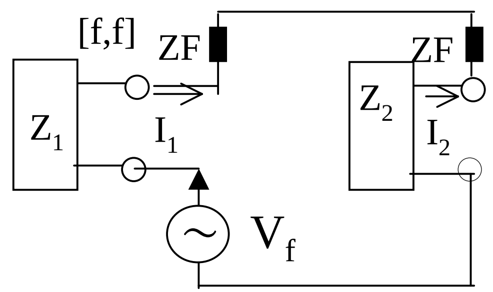
$$V_a = V_0 + V_1 + V_2 = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} V_f$$

$$V_b = V_0 + \alpha^2 V_1 + \alpha V_2 = -V_1 = \frac{-Z_2}{Z_1 + Z_2} V_f = V_c$$

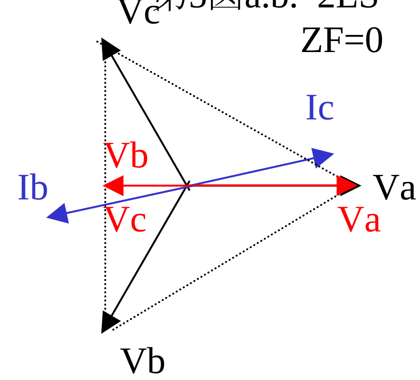
$$I_b = I_0 + \alpha^2 I_1 + \alpha I_2 = (\alpha^2 - \alpha) I_1 = \frac{(\alpha^2 - \alpha)}{Z_1 + Z_2} V_f$$

$$I_c = -I_b = \frac{(\alpha - \alpha^2)}{Z_1 + Z_2} V_f$$ ，等価回路は第5図

第5図　2LS



第5図a.b. 2LS
ZF=0



a. 直接接地系
b. 高Z接地系　　共通

$Z_1 \approx Z_2$ として、

$$V_a \approx V_f,\ V_b \approx -\frac{V_f}{2} \approx V_c,\ I_a = 0,\ I_b \approx -j\frac{\sqrt{3}V_f}{2Z_1} = -I_c$$

(5−4) 3相地絡または短絡 (3LG, 3LS)

$V_a = V_b = V_c = 0$

$V_0 + V_1 + V_2 = V_0 + \alpha^2 V_1 + \alpha V_2 = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 = 0$

$(\alpha^2 - \alpha)V_1 = (\alpha^2 - \alpha)V_2,\ \therefore V_1 = V_2,\ V_0 = -V_1$

$\therefore V_0 = V_1 = V_2 = 0$

$V_0 = -I_0 Z_0 = 0,\ \therefore I_0 = 0$

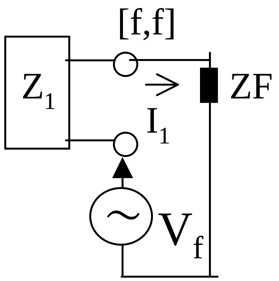
$$V_1 = V_f - I_1 Z_1 = 0,\ \therefore I_1 = \frac{V_f}{Z_1}$$

$V_2 = -I_2 Z_2 = 0,\ \therefore I_2 = 0$

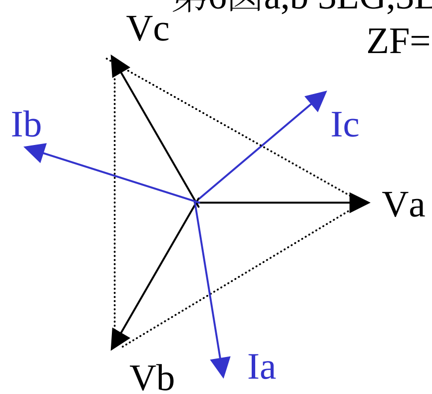
$$I_a = \frac{V_f}{Z_1},\ I_b = \frac{\alpha^2 V_f}{Z_1},\ I_c = \frac{\alpha V_f}{Z_1},$$

等価回路は第 6 図

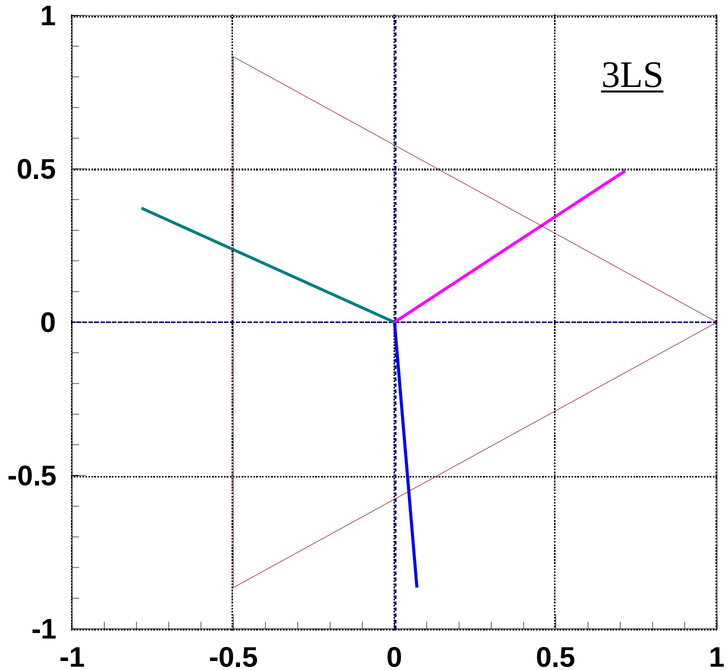
第6図　3LG,3LS

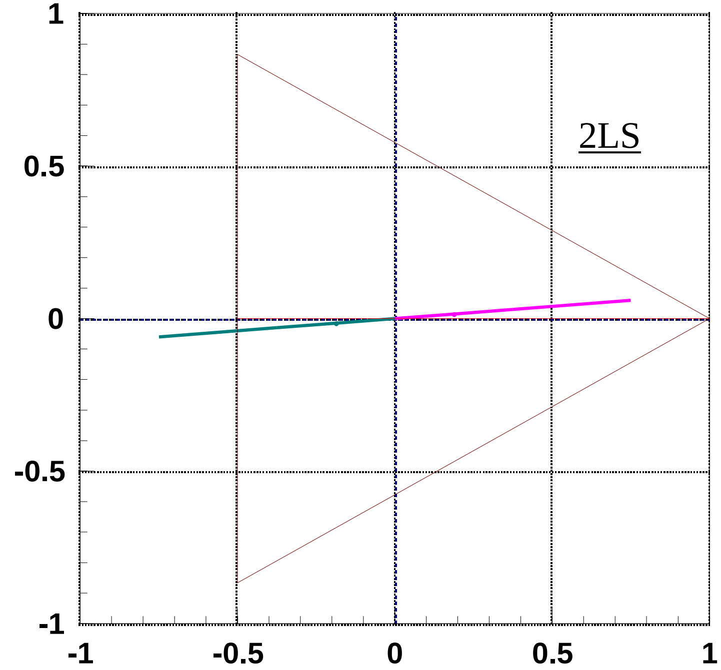


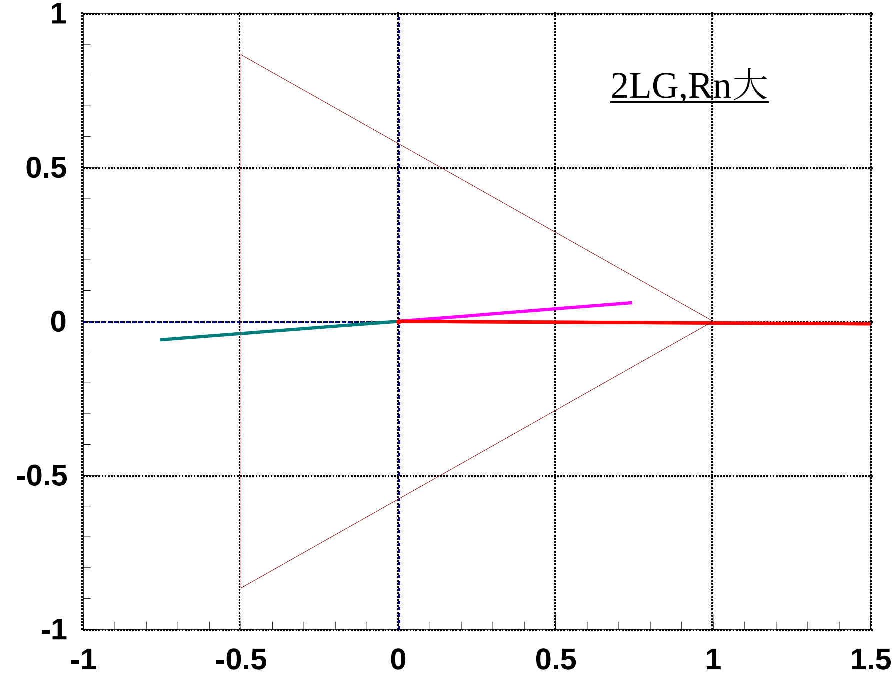
第6図a,b 3LG,3LS
ZF=0

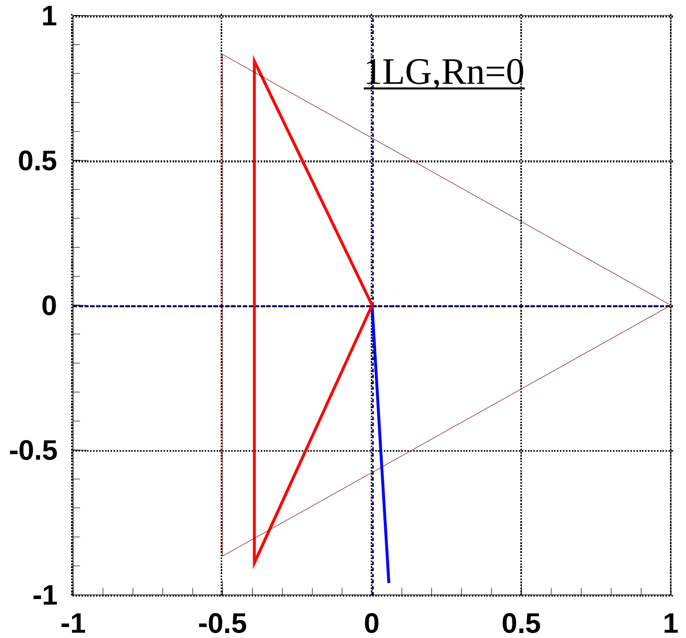


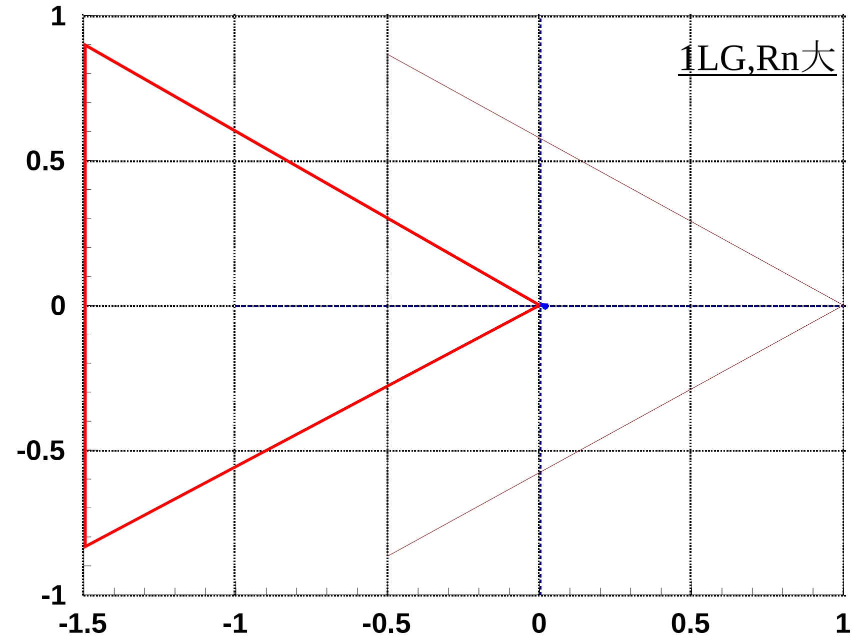
計算事例

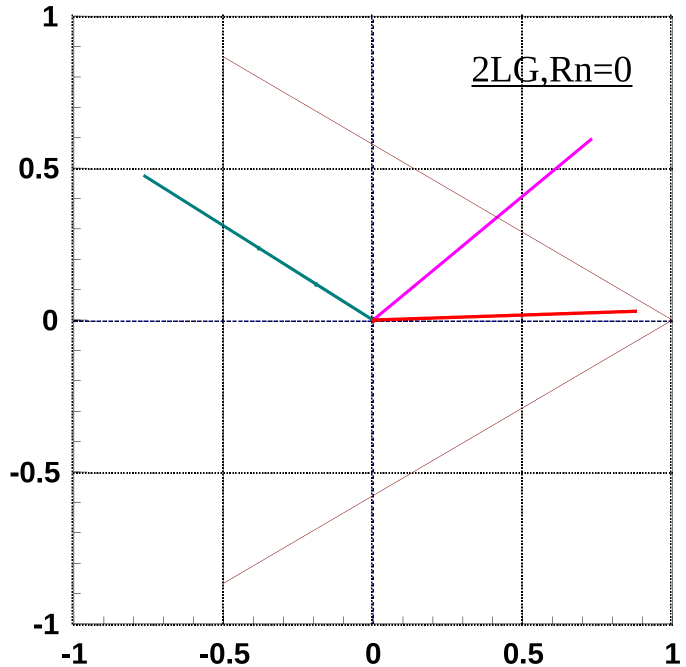


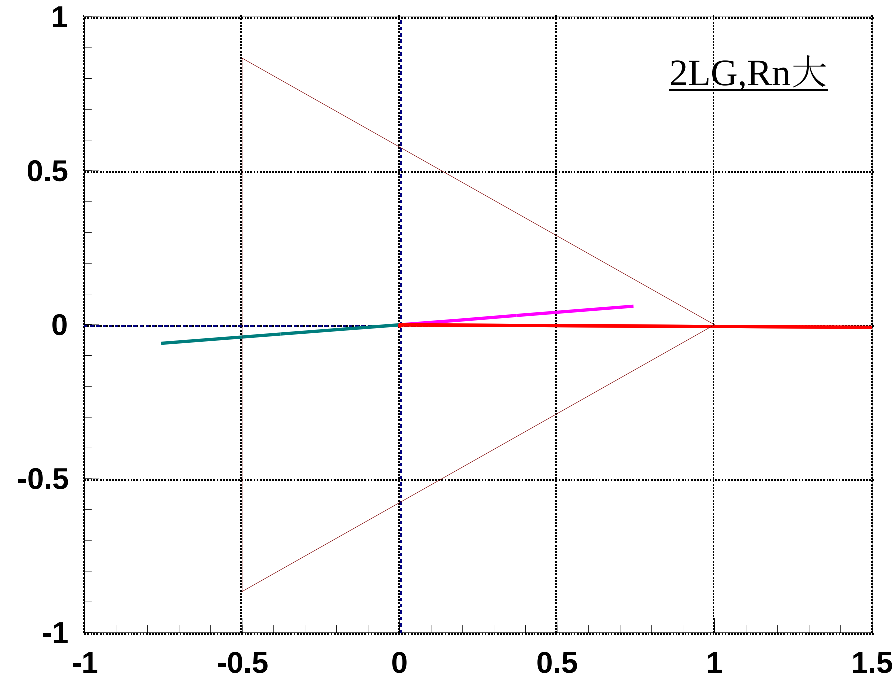





1LG,Rn=0
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


1LG,Rn大
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1


2LG,Rn=0
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


2LG,Rn大
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

付録　オイラーの公式

$$\varepsilon^{jx}=\cos x+j\sin x$$

$$\varepsilon^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\varepsilon^{jx}=1+jx+\frac{(jx)^2}{2!}+\frac{(jx)^3}{3!}+\frac{(jx)^4}{4!}+\frac{(jx)^5}{5!}+\cdots$$

$$\varepsilon^{jx}=1+jx-\frac{x^2}{2!}-j\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+j\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+j\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$=\cos x+j\sin x$$

$x=x'-x_0$ として、$|x'-x_0|<1$とすれば、$\cdots$ の先は 0 に収斂し、十分な項数を　とればその影響は無視　できることを利用した。　x_0 として　$\frac{\pi}{2}$の整数倍をとれば、あらゆる角度に対応でき　る.

応用1. a の n 乗根$(a>0)$

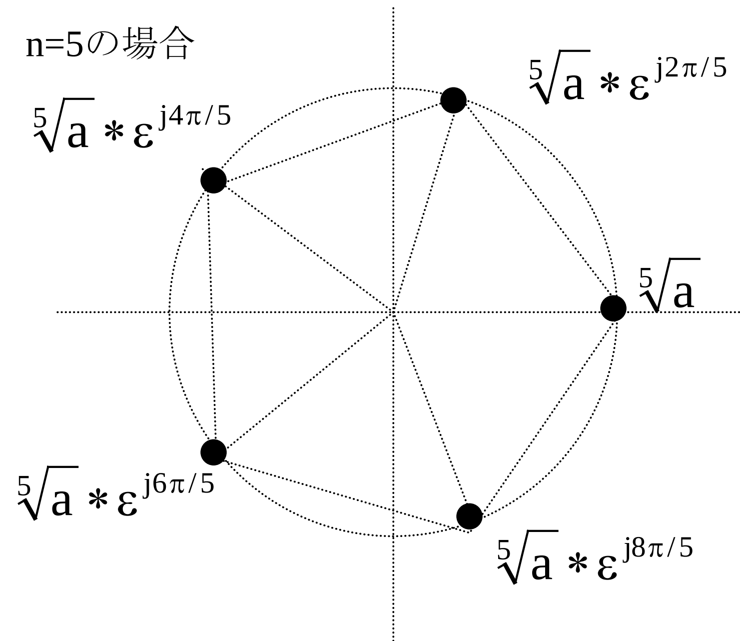
$x^n-a=0$ の実数解を、$\sqrt[n]{a}$とすると　, $x=\sqrt[n]{a}*y$ とおいて、　x に代入して $ay^n-a=0,$ すなわち、

$y^n-1=0\cdots$(附1)

$y=\varepsilon^{j(2k\pi/n)}, k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$とおけば、$y^n=1$で(附1)を満たす。重複する分　を除いた解は、$k=0,1,2,3,\cdots(n-1)$ の n 個であることは容易に　確かめれる。

解は、半径 $\sqrt[n]{a}$ の円上に、等間隔に分 布する。

正 n角形の頂点に当る点で ある.



応用問題

32の 5 乗根、81の4乗根、8の3乗根

2.三角関数の加法定理

和、差

$\varepsilon^{j(x\pm y)} = \cos(x\pm y) + j\sin(x\pm y)$

$= \varepsilon^{jx} * \varepsilon^{\pm jy} = (\cos x + j\sin x)(\cos y \pm j\sin y)$

$= (\cos x\cos y \mp \sin x\sin y) + j(\sin x\cos y \pm \cos x\sin y)$

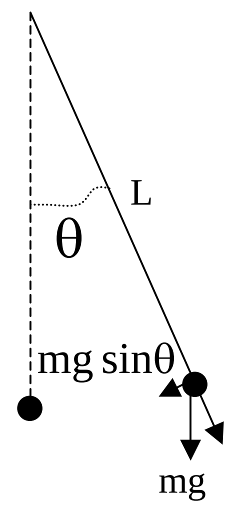
これから、

$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$

$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$

3.微分方程式(振子の振動)

図のように長さ　Lの糸の先に重さ mの錘がつき微小角の範囲 で振動するものとする。



θ方向の運動方程式は

$m\frac{d^2 L\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$

$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$

$\theta = \varepsilon^{j\omega t}$ とおけば、$-L\omega^2\varepsilon^{j\omega t} = -g\varepsilon^{j\omega t}$

$\therefore \omega = \sqrt{g/L}$

$\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$

$t=0$ で $\theta = \theta_0$, $t = t_0$ で $\frac{d\theta}{dt} = 0$ とすれば

$A = \theta_0$, $B\omega\cos\omega t_0 = 0$ から $B = 0$

$\theta = \theta_0\cos\sqrt{g/L}\,t$