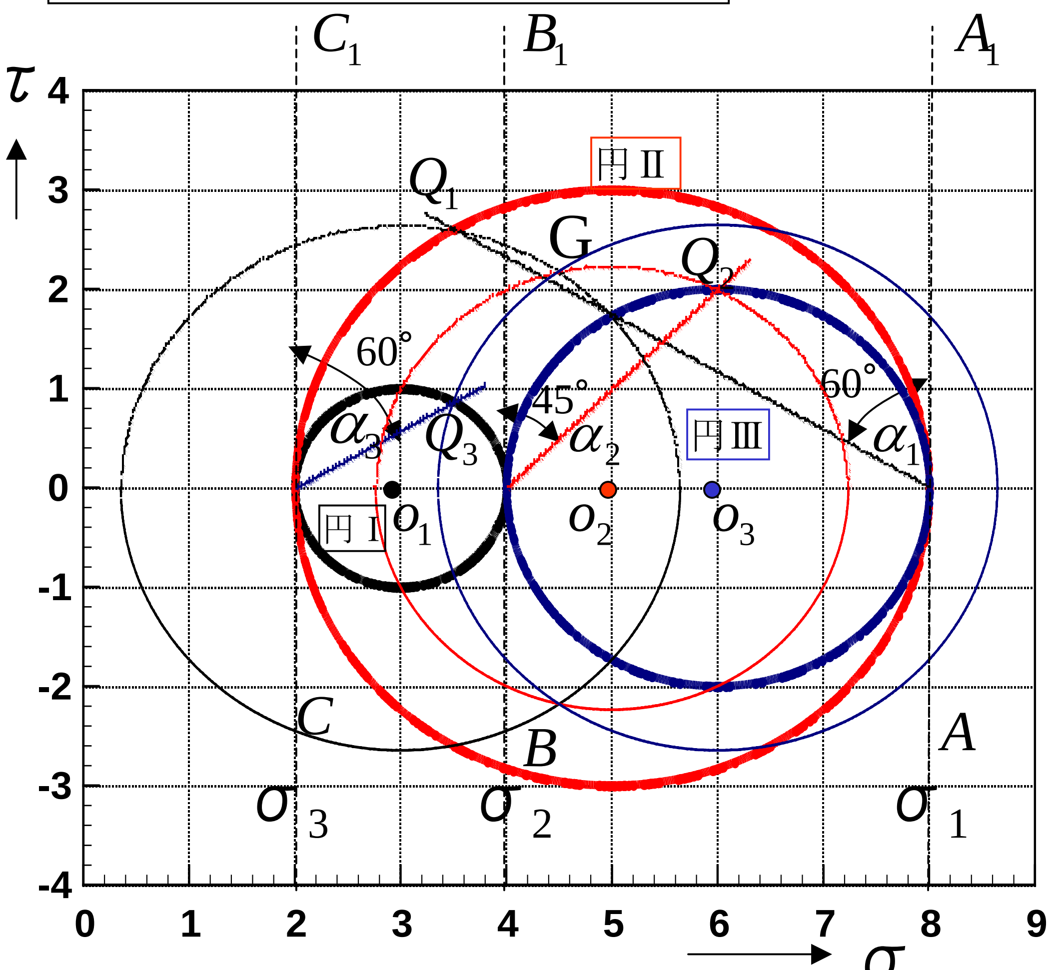
モールの応力円（直交三軸応力対応）

Otto Mohr の考案による応力円のおさらい。
直交三軸応力σ_1, σ_2,σ_3が既知のとき任意の向きの平面上の垂直応力σ、せん断応力τ　を求める。
直交する2面のσ、τから主応力を求める。
二次元問題での、最大せん断応力、最大、最小垂直応力
最大傾斜角を求める。

参考資料
　湯浅亀一「材料力学」日本機械学会1952年
　岡本舜三「応用力学演習」理工図書1955年

3次元(直交3軸応力時)のσ、τ
3次元用モールの応力円



$\sigma_1 = 8,\ \sigma_2 = 4, \sigma_3 = 2$

$\alpha_1 = 60° = \dfrac{\pi}{3},\ \alpha_2 = 45° = \dfrac{\pi}{4}, \alpha_3 = 60° = \dfrac{\pi}{3}$

モール(*Otto Mohr*)の応力円は主応力$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 (or \quad \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$が既知であり、ある面の法線が、$x_1, x_2, x_3 (or \quad x, y, z)$軸となす角が、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 (or \quad \alpha, \beta, \gamma)$であるとき、その面の垂直応力$\sigma$、せん断応力$\tau$を求める計算図である。

まず、円I、円II、円IIIをつぎの中心、半径で描く。$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$とする。

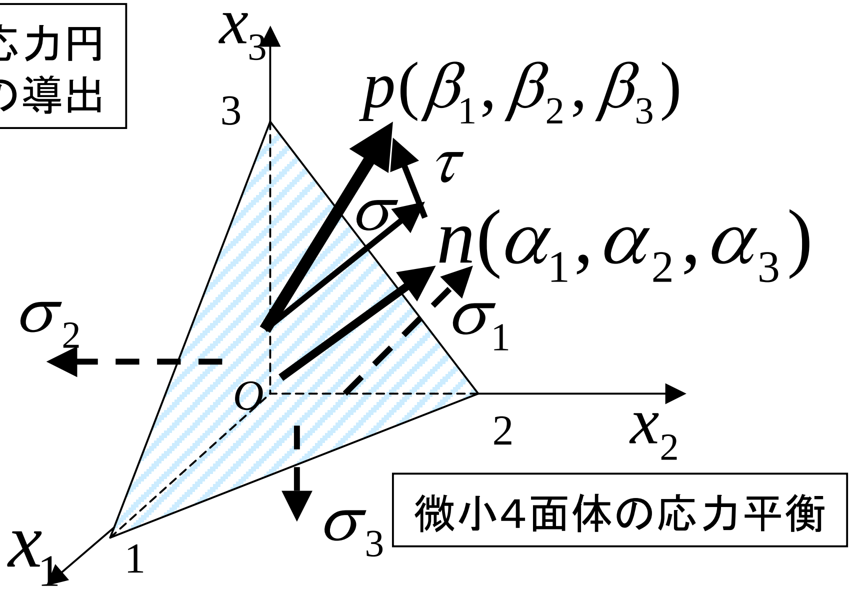
$$円I:\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right), r_1 = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$$

$$円II:\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, 0\right), r_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$$円III:\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right), r_3 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

AA'に対しα_1をなす直線と円IIとの 交点Q_1を通る円Iの同心円を 描く。同様に、α_2, α_3からQ_2, Q_3を求め、円II、円IIIの同心円を描くと、 この三つの円が1点Gで交わる。この点の座 標(σ、τ)が求める応力である。

応力円の導出



直交3軸にそれぞれ $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$の応力が作用しているとき、その $\Delta 123$面上の合応力を pとする。pの面に垂直な成分を σ,面に平行な成分、すなわち、 せん断応力を τとする。

$\Delta 123$ の面積を Aとすると、pの各直交成分は、$\Delta O23 = A\cos\alpha_1, \Delta O31 = A\cos\alpha_2, \Delta O12 = A\cos\alpha_3$であるから、力 pA の x_1 成分は、

$$pA\cos\beta_1 = \sigma_1 A\cos\alpha_1 \to p\cos\beta_1 = \sigma_1\cos\alpha_1$$

同様にして、力 pA の x_2, x_3 成分から、

$$p\cos\beta_2 = \sigma_2\cos\alpha_2,\ p\cos\beta_3 = \sigma_3\cos\alpha_3$$

ここに、方向余弦の性 質から、

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1$$

である。

$$p^2 = (p\cos\beta_1)^2 + (p\cos\beta_2)^2 + (p\cos\beta_3)^2$$

$$= \sigma_1^2\cos^2\alpha_1 + \sigma_2^2\cos^2\alpha_2 + \sigma_3^2\cos^2\alpha_3$$

$\sigma_i\ (i=1, 2, 3)$の $n\left(A \text{ の法線}\right)$方向成分の合計が σ になるので、

$$\sigma = \sigma_1\cos^2\alpha_1 + \sigma_2\cos^2\alpha_2 + \sigma_3\cos^2\alpha_3$$

せん断応力は、

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2$$

$$= \sigma_1^2\cos^2\alpha_1 + \sigma_2^2\cos^2\alpha_2 + \sigma_3^2\cos^2\alpha_3$$

$$-\left(\sigma_1\cos^2\alpha_1 + \sigma_2\cos^2\alpha_2 + \sigma_3\cos^2\alpha_3\right)^2$$

$$= \sigma_1^2\cos^2\alpha_1\left(1-\cos^2\alpha_1\right) + \sigma_2^2\cos^2\alpha_2\left(1-\cos^2\alpha_2\right)$$

$$+ \sigma_3^2\cos^2\alpha_3\left(1-\cos^2\alpha_3\right) - 2(\sigma_1\sigma_2\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2$$

$$+ \sigma_2\sigma_3\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3 + \sigma_3\sigma_1\cos^2\alpha_3\cos^2\alpha_1$$

$1-\cos^2\alpha_1 = \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3$ 等を代入して整理すると、

$$\tau^2=(\sigma_1-\sigma_2)^2\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3+(\sigma_1-\sigma_3)^2\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_3$$

が得られる。以上をま とめると、

$$\sigma=\sigma_1\cos^2\alpha_1+\sigma_2\cos^2\alpha_2+\sigma_3\cos^2\alpha_3$$

$$\tau^2=(\sigma_1-\sigma_2)^2\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3+(\sigma_1-\sigma_3)^2\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_3$$

$$p^2=\sigma^2+\tau^2$$

次に、次の 3 式から $\cos^2\alpha_1$、$\cos^2\alpha_2$、$\cos^2\alpha_3$を求めると、

$$1=\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3$$

$$\sigma=\sigma_1\cos^2\alpha_1+\sigma_2\cos^2\alpha_2+\sigma_3\cos^2\alpha_3$$

$$p^2=\sigma^2+\tau^2=\sigma_1^2\cos^2\alpha_1+\sigma_2^2\cos^2\alpha_2+\sigma_3^2\cos^2\alpha_3$$

$$\begin{bmatrix}\cos^2\alpha_1\\ \cos^2\alpha_2\\ \cos^2\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\ \sigma_1&\sigma_2&\sigma_3\\ \sigma_1^2&\sigma_2^2&\sigma_3^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ \sigma\\ p^2\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\sigma_2\sigma_3(\sigma_3-\sigma_2)&(\sigma_2^2-\sigma_3^2)&(\sigma_3-\sigma_2)\\ \sigma_3\sigma_1(\sigma_1-\sigma_3)&(\sigma_3^2-\sigma_1^2)&(\sigma_1-\sigma_3)\\ \sigma_1\sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)&(\sigma_1^2-\sigma_2^2)&(\sigma_2-\sigma_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sigma\\ p^2\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \sigma_1&\sigma_2&\sigma_3\\ \sigma_1^2&\sigma_2^2&\sigma_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\ \sigma_1&\sigma_2-\sigma_1&\sigma_3-\sigma_1\\ \sigma_1^2&\sigma_2^2-\sigma_1^2&\sigma_3^2-\sigma_1^2\end{vmatrix}=(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3^2-\sigma_1^2)-(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2^2-\sigma_1^2)$$

$$=-(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)$$

$$\cos^2\alpha_1=-\frac{\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}+\frac{\sigma(\sigma_2+\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}-\frac{\sigma^2+\tau^2}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}$$

$$\cos^2\alpha_1=\frac{\sigma^2-\sigma(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3+\tau^2}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2)}$$

この分子は、

$$\sigma^2-2\sigma\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}+\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\sigma_2\sigma_3+\tau^2$$

$$=\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\therefore\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2=(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2)\cos^2\alpha_1+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2=R_1^2\cdots\cdots \text{円 }1$$

同様にして、

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2+\tau^2=(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)\cos^2\alpha_2+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2=R_2^2\cdots\cdots \text{円 }2$$

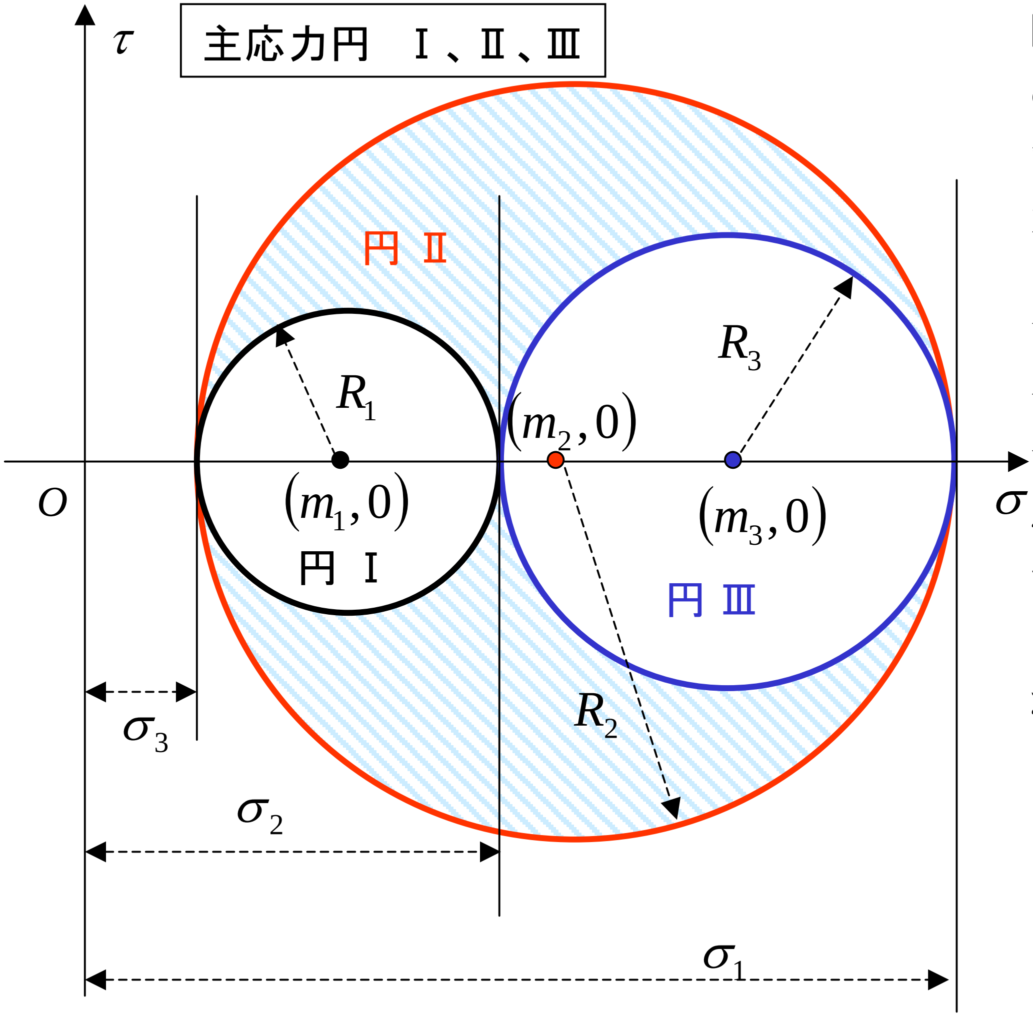
$$\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau^2=(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)\cos^2\alpha_3+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2=R_3^2\cdots\cdots \text{円 }3$$

いま、$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ である場合を考える。

$(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2)>0\rightarrow\cos^2\alpha_1=0$ のときR_1は最小値をとる　$R_1=(\sigma_2-\sigma_3)/2\cdots$円 I とする。

$(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)<0\rightarrow\cos^2\alpha_2=0$ のときR_2は最大値をとる　$R_2=(\sigma_1-\sigma_3)/2\cdots$円 II とする。

$(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)>0\rightarrow\cos^2\alpha_3=0$ のときR_3は最小値をとる　$R_3=(\sigma_1-\sigma_2)/2\cdots$円IIIとする。



$$m_1=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2},\ m_2=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2},\ m_3=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$$

$$R_1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\ R_2=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},\ R_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

円Iと円Ⅲは、可能な最小の円で あるから、$\cos^2\alpha_1\neq 0, \cos^2\alpha_3\neq 0$のときは、$(\sigma,\tau)$の存在範囲は両円の外側とな る。円 Ⅱは可能な最大の円であるから、$\cos^2\alpha_2\neq 0$のときは、(σ,τ)の存在範囲は円 Ⅱ の境界を含む内側とな る。したがって、(σ,τ)の存在範囲は、図の境 界を含む斜線部内となる。

また、$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$の制約があるから、

たとえば、 $\alpha_1=\pi/2, \alpha_2=\pi/4$とすれば、 $\alpha_3=\pi/4$というように、3 つのうち 2つだけが指定可能である。

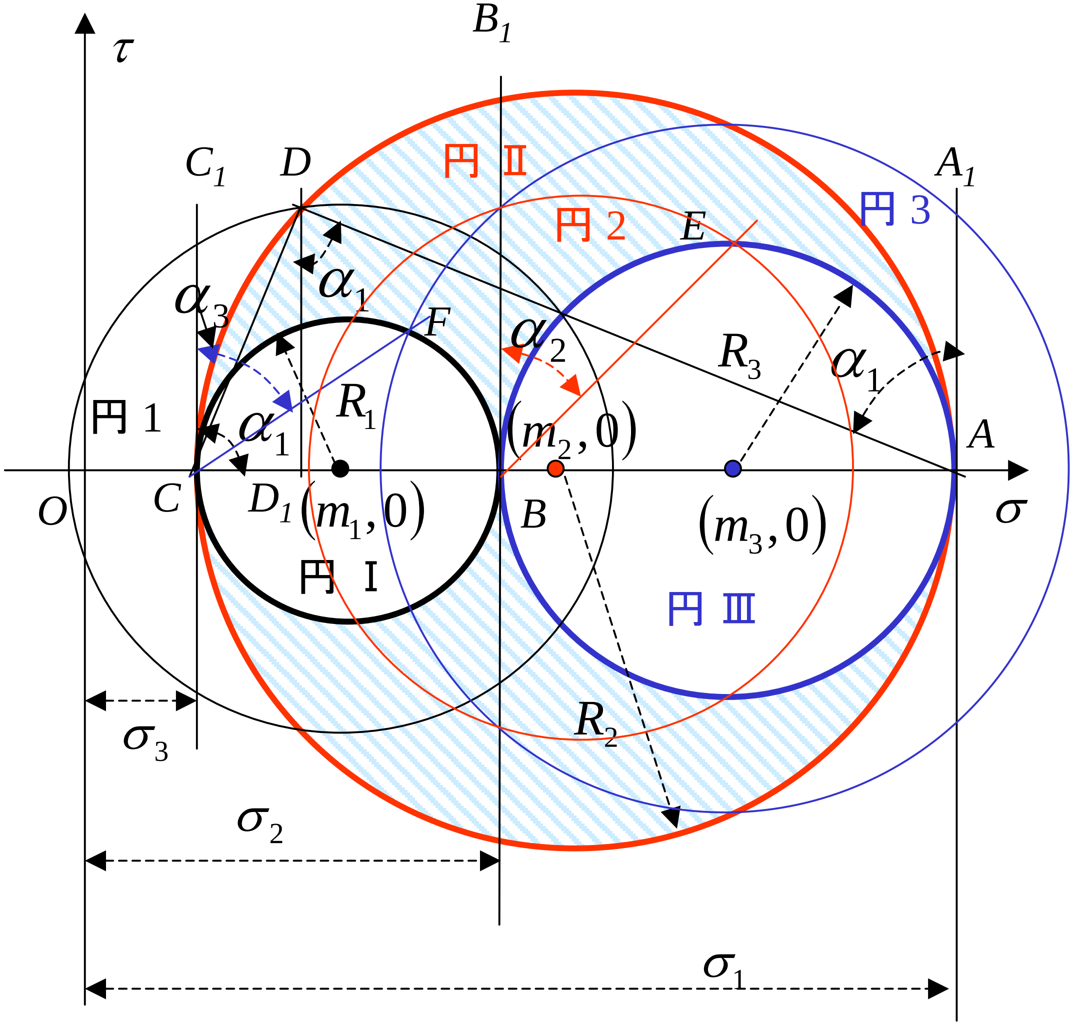
円Ⅱでは、$\cos^2\alpha_2=0$、このとき、

$\tau^2=(\sigma_3-\sigma)(\sigma-\sigma_1)$、これを円1に代入して円Ⅱと円1との交点を示す式は、

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+(\sigma_3-\sigma)(\sigma-\sigma_1)$$

$$=(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2)\cos^2\alpha_1+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

これから、$\cos^2\alpha_1=\dfrac{\sigma-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}$を得る。



$m_1 = \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$, $m_2 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$, $m_3 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

$R_1 = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$, $R_2 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, $R_3 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

円Ⅱと円1との交点Dでは$\cos^2\alpha_1 = \dfrac{\sigma - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$

であるが、図で、

$$\cos\angle DAA_1 = \cos\angle DCD_1 = \frac{CD_1}{CD} = \frac{CD}{CA}$$

$$= \frac{\sigma - \sigma_3}{CD} = \frac{CD}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

$$\therefore \cos^2\angle DAA_1 = \frac{\sigma - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \to \alpha_1 = \angle DAA_1$$

同様にして、円Ⅲと円2との交点から、

$\alpha_2 = \angle EBB_1$

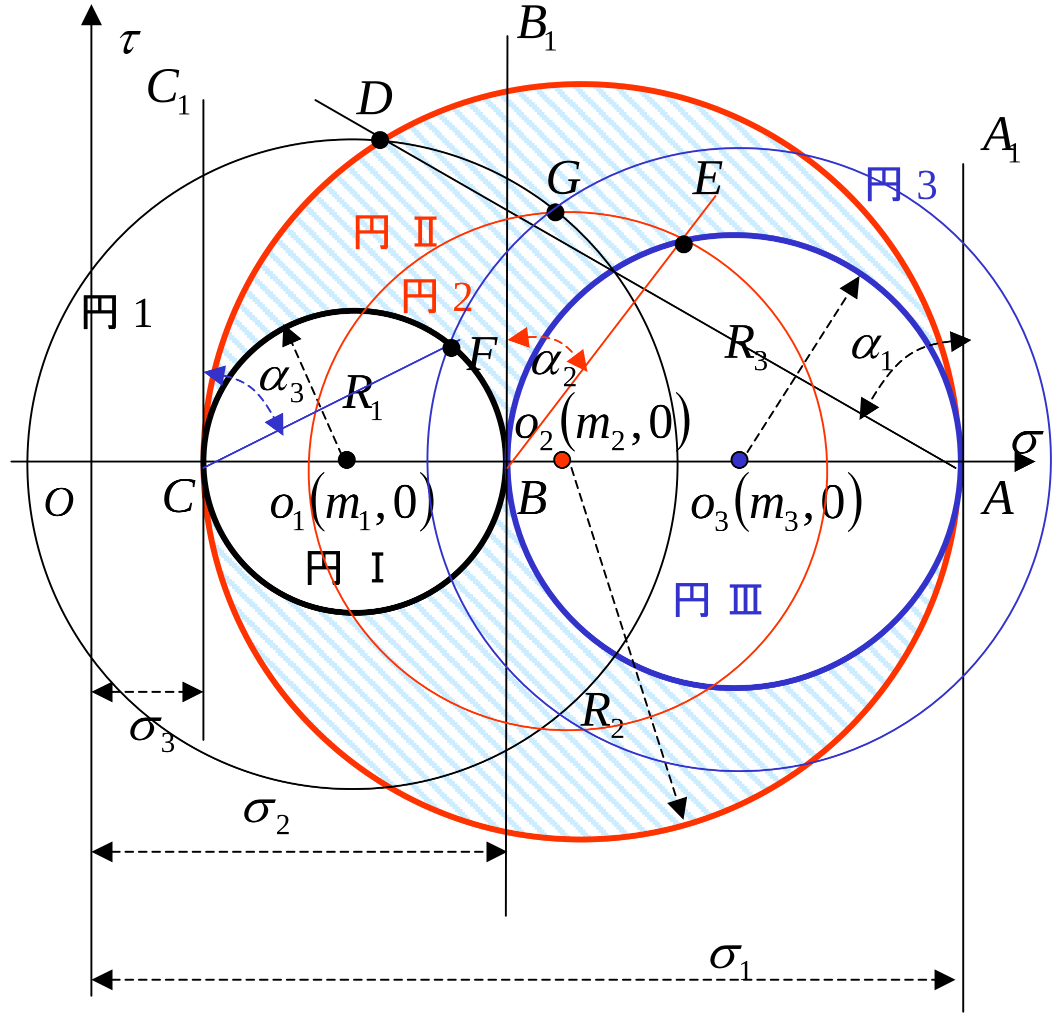
円Ⅰと円3との交点から、

$\alpha_2 = \angle FCC_1$

左図では、$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$

を満たしていないので、円1,円2,円3の3つの円が1点で交わっていないが、物体内の面を決めれば、その面の法線の方向余弦から

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$が定まる。$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$と、$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$が既知の場合のその面の応力$\sigma$、$\tau$は、次ページに示すように作図によって求められる。



$$m_1=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2},\ m_2=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2},\ m_3=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$$

$$R_1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\ R_2=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},\ R_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

1.$\sigma_1,>\sigma_2>\sigma_3$となるよう番号をつけ る。

2.主応力円Ⅰ、Ⅱ、Ⅲを描く。中 心位置と半径は、図の下に示す とおりである。

3.$\angle A_1AD=\alpha_1$となるようAから円ⅡへADを引く。

4.Do_1を半径とする円1を描く。

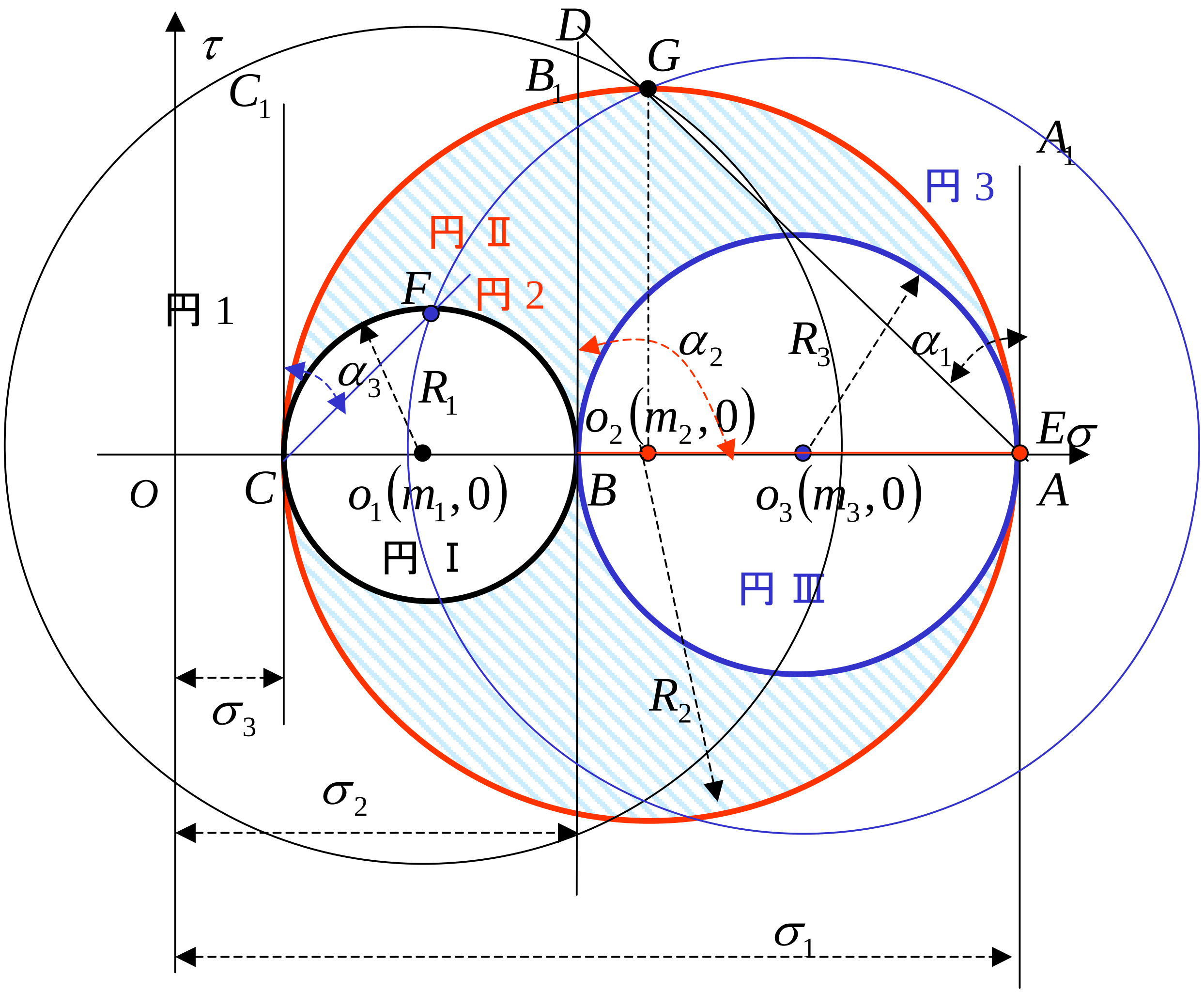
5.$\angle B_1BE=\alpha_2$となるようBから円ⅢへBEを引く。

6.Eo_2を半径とする円 2を描く。

二つの円の交点 Gが求めるσ、τの座標である。

7.念のため、CC_1から、α_3をとり、円Ⅰとの交点Fを通るo_3を中心とする円 3を描くとGを通る。

図から、最大せんだん 応力は、$R_2=\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$である(円Ⅱの上頂点)。



最大せん断応力を与えるとき

せん断応力が最大になるのはG点である。値は円Ⅱの半径と同じで$(\sigma_1-\sigma_3)/2$

この点で3つの円が交わるためには、図から

$\alpha_1=\frac{\pi}{4}, \alpha_2=\frac{\pi}{2}, \alpha_3=\frac{\pi}{4}$ のときであることが分かる。

このとき、

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3$$

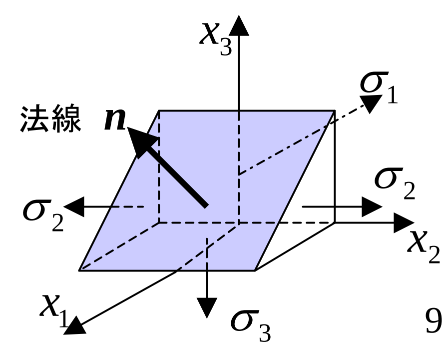
$$=\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=1$$

となっている。(下図および次ページ)

$$m_1=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2},\ m_2=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2},\ m_3=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$$

$$R_1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\ R_2=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},\ R_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$



応力の平衡図と
最大せん断応力 $\tau_{\max}$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$,引張りを正

$\alpha_1 = \pi/4,$

$\alpha_2 = \pi/2,$

$\alpha_3 = \pi/4$

$\cos\alpha_2 = 0$

$\rightarrow \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_3 = 1$

$\rightarrow \cos^2\alpha_3 = 1 - \cos^2\alpha_1$

$= \sin^2\alpha_1$

$\therefore \alpha_3 = \pi/2 - \alpha_1$

$\alpha_3 = \pi/4$

$p_3' = \sigma_3\cos\alpha_3 = \sigma_3/\sqrt{2}$

$\sigma_3' = \sigma_3\cos^2\alpha_3 = \sigma_3/2$

$\tau_3' = \sigma_3\cos\alpha_3\sin\alpha_3 = \sigma_3/2$

$\alpha_1 = \pi/4$

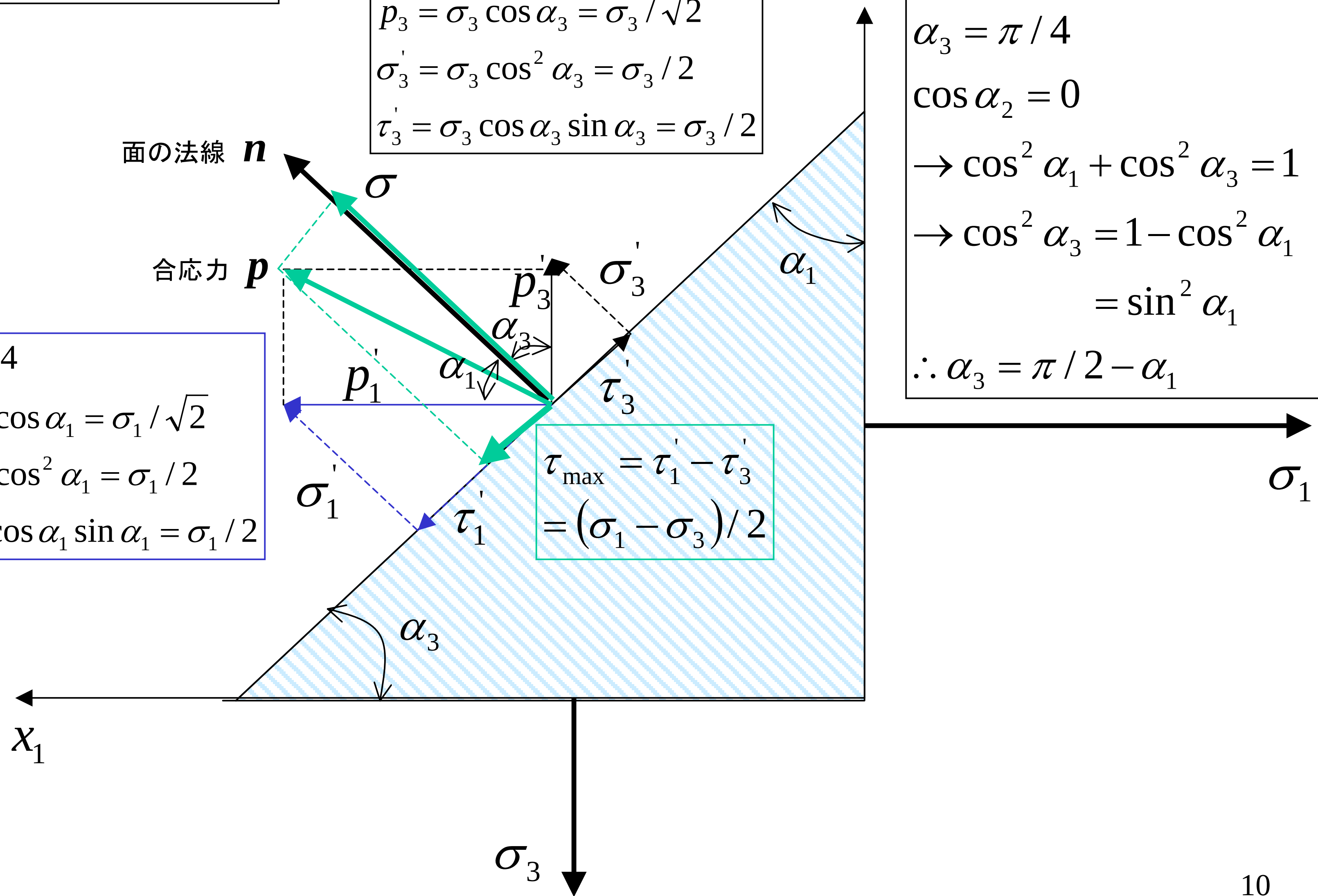
$p_1' = \sigma_1\cos\alpha_1 = \sigma_1/\sqrt{2}$

$\sigma_1' = \sigma_1\cos^2\alpha_1 = \sigma_1/2$

$\tau_1' = \sigma_1\cos\alpha_1\sin\alpha_1 = \sigma_1/2$

$\tau_{\max} = \tau_1' - \tau_3'$

$= (\sigma_1 - \sigma_3)/2$



小さい二つの応力が等価の場合

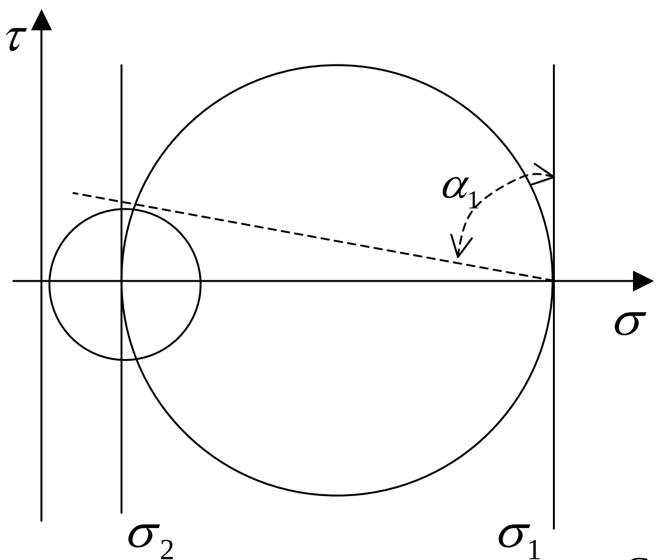
$\sigma_3=\sigma_2$とすると、

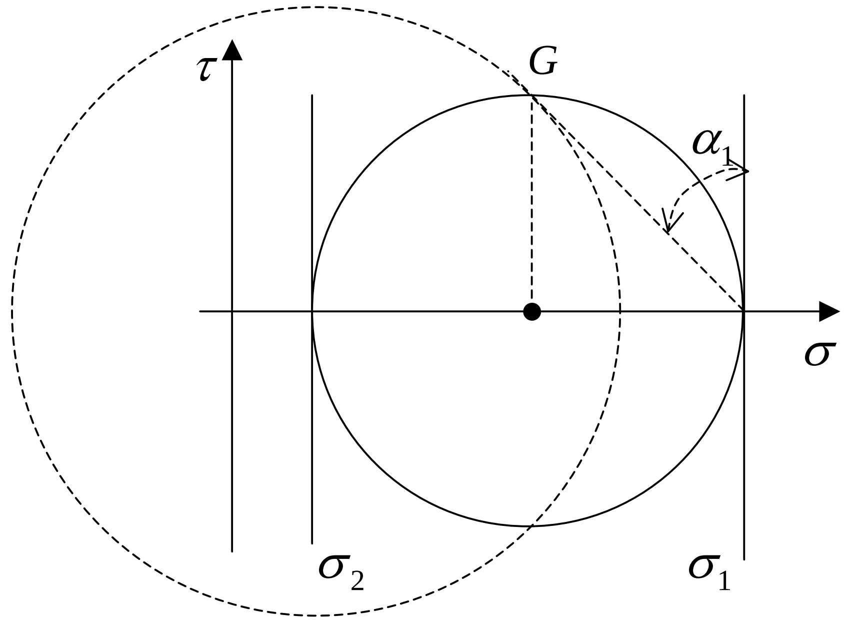
$$(\sigma-\sigma_2)^2+\tau^2=(\sigma_1-\sigma_2)^2\cos^2\alpha_1$$

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$$

以上から、円 Ⅰは点$(\sigma_2,0)$、円Ⅱと円Ⅲ、円2、円3が重なる。





最大せん断応力は、 $\alpha_1=\pi/4$ のときで、値は、

$\tau_{\max}=(\sigma_1-\sigma_2)/2$ である。

大きい二つの応力が等価の場合

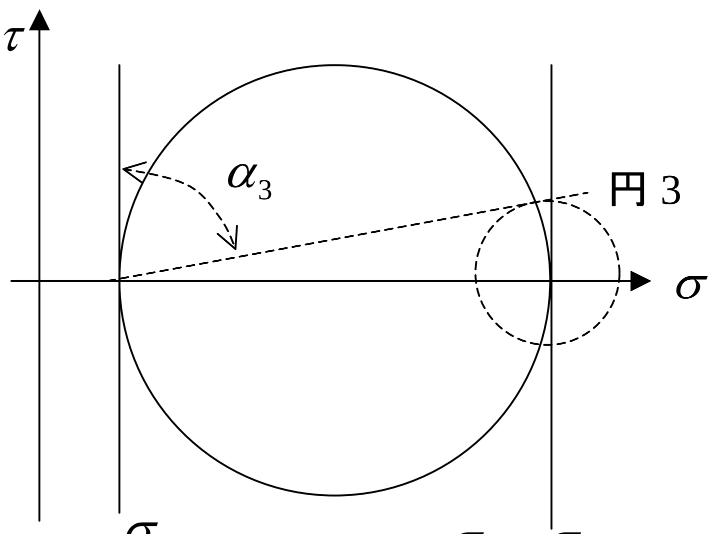
$\sigma_2 = \sigma_1$ とすると、

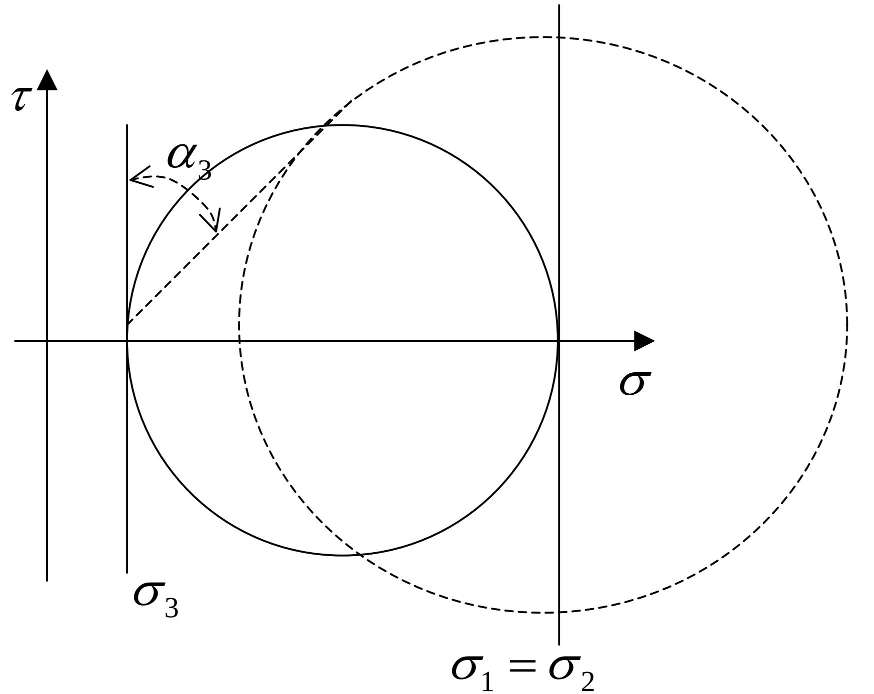
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$(\sigma - \sigma_1)^2 + \tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \cos^2 \alpha_3$$

以上から、円 Iと円II、円1、円2が重なる。円 III は点$(\sigma_1, 0)$、σ, τの存在範囲は円 I＝円II 上。





最大せん断応力は$\alpha_3 = \pi/4$のときで、値は、

$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ である。

直交三軸の応力が等しい場合

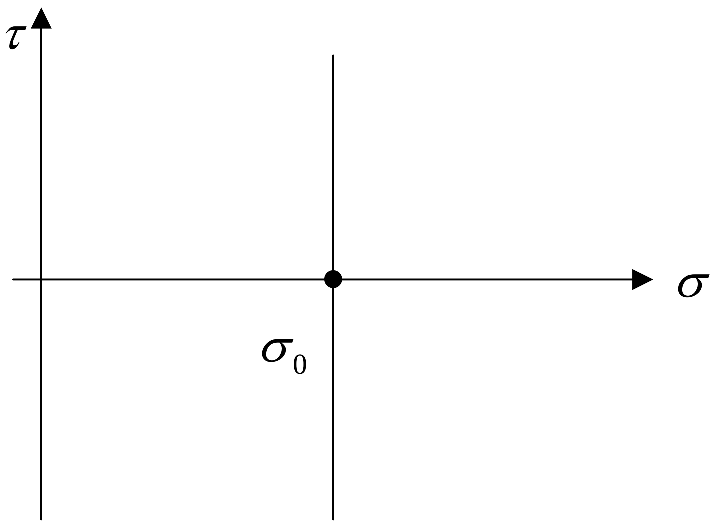
$\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1 = \sigma_0$ とすると、

$(\sigma - \sigma_0)^2 + \tau^2 = 0$

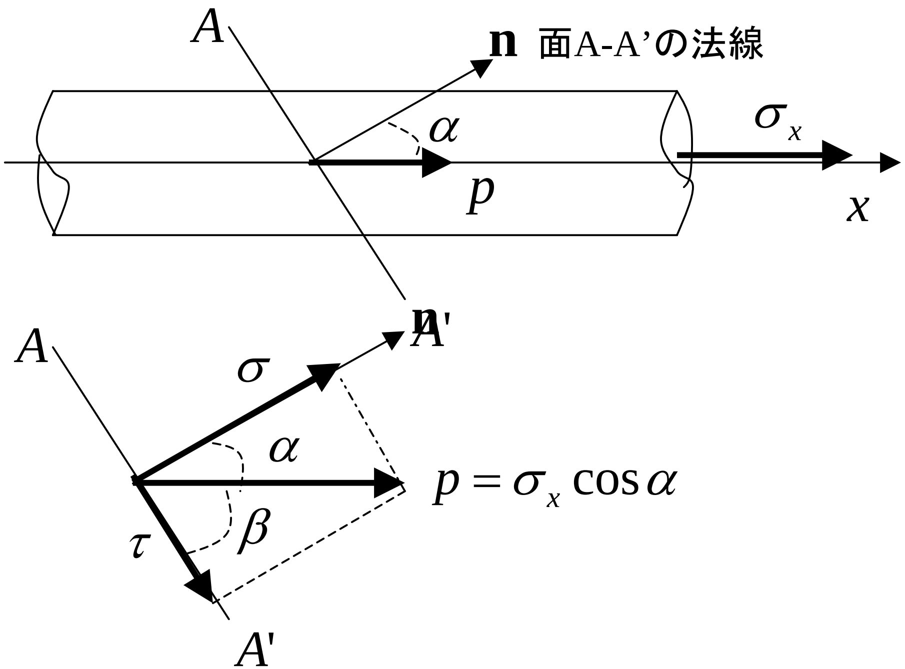
円Iと円II、円 III、円1、円2

円3が点$(\sigma_0, 0)$で重なる。

せん断応力は 0 である。



単純応力の場合（1軸）

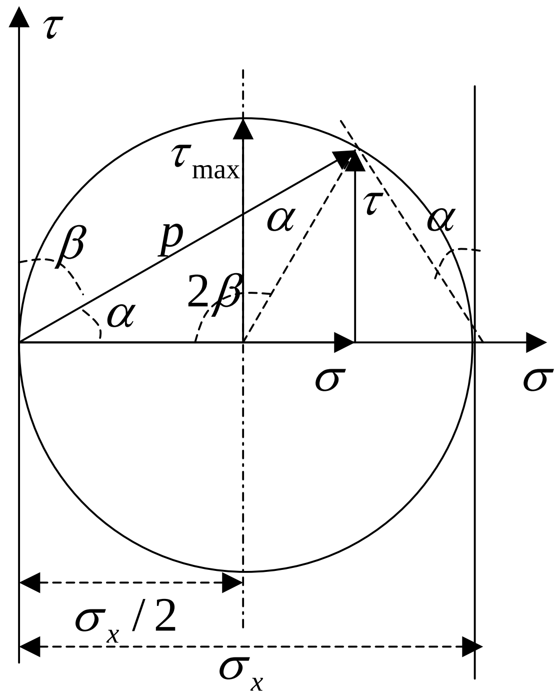


$$\sigma = p\cos\alpha = \sigma_x\cos^2\alpha = \sigma_x(1+\cos 2\alpha)/2$$

$$\tau = p\sin\alpha = \sigma_x\sin\alpha\cos\alpha = \sigma_x\sin 2\alpha/2$$

$$\therefore\left(\sigma-\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2$$

これは、中心座標(σ_x/2, 0), 半径σ_x/2　の円である。

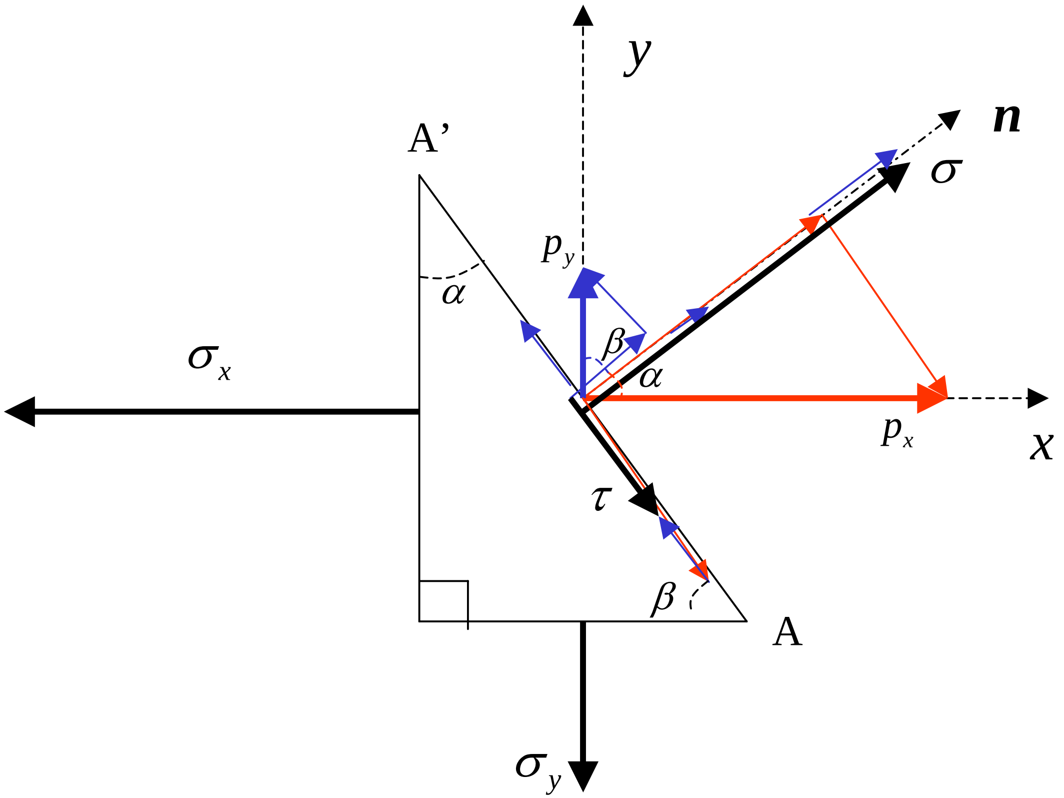


αを所定の値にとり応力円との交点をとればそこがσ、τを与える。

αの代わりに2βを0から時計式に増加して行く方法もある。

最大せんだん応力は、$\alpha=\beta=\pi/4$で生じる。その値は、$\sigma_x/2$である。

平面応力の場合(2軸の主応力が既知の場合)



面の法線 $\mathbf{n}$ と x 軸とのなす角を α, y 軸となす角を β とする。

$\alpha+\beta=\pi/2$ である。

$p_x=\sigma_x\cos\alpha,\ p_y=\sigma_y\cos\beta$

p_x, p_y の $\mathbf{n}$ 方向成分のベクトル和が垂直応力 σ である。

p_x, p_y の x, y 軸を含む $A-A'$ 面方向成分のベクトル和 がせん断応力 τ である。

式で表すと、次になる。

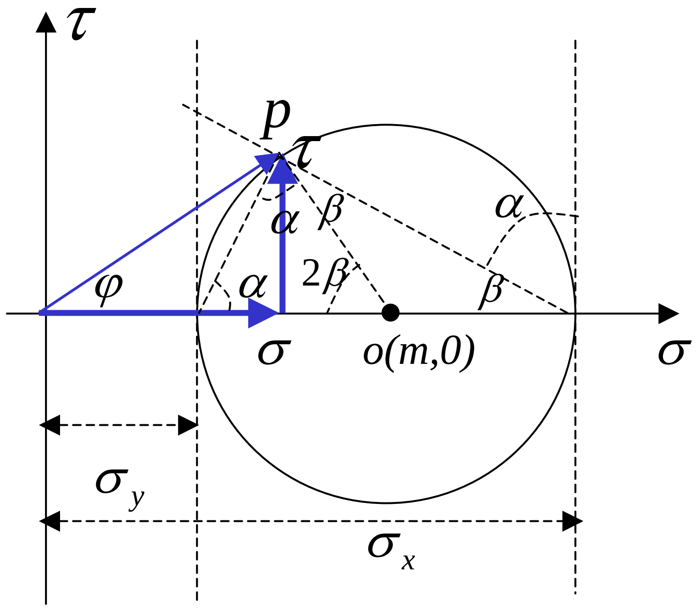
$$\sigma=p_x\cos\alpha+p_y\cos\beta$$
$$=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\cos^2\beta$$
$$=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha$$
$$=\sigma_x\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\sigma_y\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
$$\sigma=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\beta\cdots(A)$$
$$\tau=p_x\sin\alpha-p_y\sin\beta$$
$$=\sigma_x\sin\alpha\cos\alpha-\sigma_y\sin\beta\cos\beta$$
$$=\sigma_x\sin\alpha\cos\alpha-\sigma_y\sin\beta\cos\alpha$$
$$\tau=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha\cdots(B)$$

$(A)(B)$ 式から $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を応用して α を消去すると、

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2$$

これは、中心座標 $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$, 半径 $\left|\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right|$ の円である。

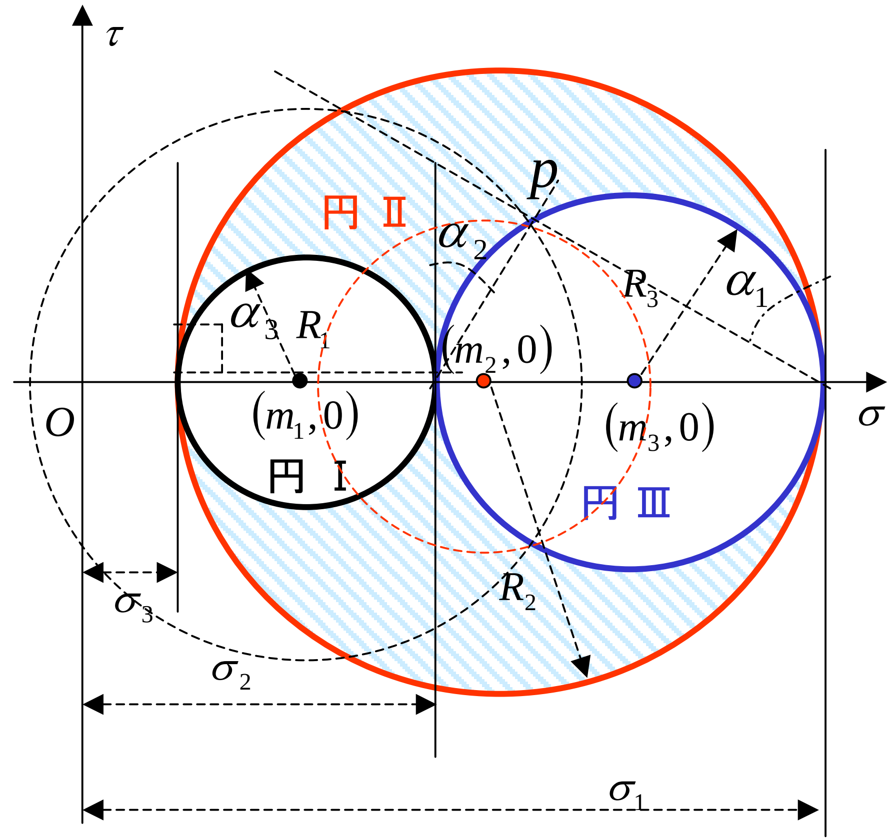
二次元のモールの応力円



$$m = (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

$$r = (\sigma_x - \sigma_y)/2$$

三次元のモールの応力円との関係



$$m_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2},\ m_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},\ m_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

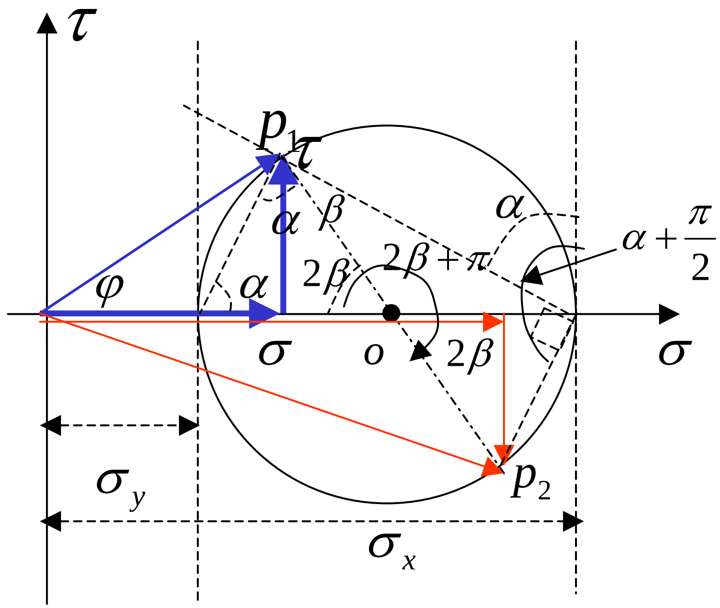
$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},\ R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},\ R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

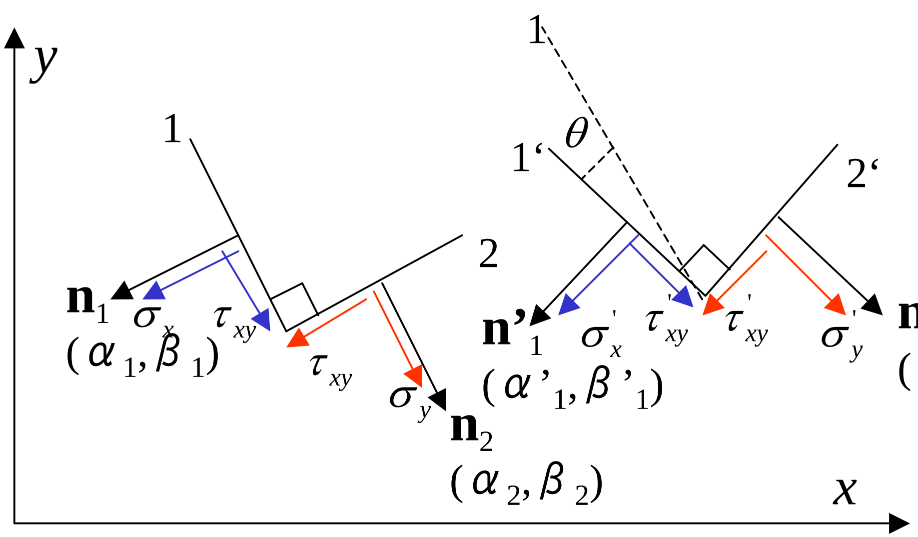
上図で、以下の置き換 えにより円Ⅲ (青)上の点 p が左図と同じ点になる 。

$$\sigma_1 = \sigma_x,\ \sigma_2 = \sigma_y,\ \sigma_3 = \sigma_z = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = \pi/2$$

平面応力状態の直交二面の応力から、θだけ回転した直交二面の応力を求める





左下の図に示すような 直交する２面、１、2 または、1'、2'については、面の法線 $\mathbf{n}_1$ を $\pi/2$ だけ反時計式に回転し て $\mathbf{n}_2$ が得られるので左上の応力円上を $2\beta_2 = 2\beta_1 + \pi$ だけ時計式に進んだ位置すなわち180°進んだ位置にあり、

$$\sigma_x+\sigma_y=\sigma_1+\sigma_2=\sigma_x'+\sigma_y'$$

$$\tau_{xy}+\tau_{yx}=0=\tau_{xy}'+\tau_{yx}'$$

の関係がある。

左上の図を複素平面と みなし、円の中心の座標を σ_0、半径を r とすれば、

$$p_1=\sigma_0+r\varepsilon^{j2\beta},\ p_2=\sigma_0+r\varepsilon^{j(2\beta+\pi)}=\sigma_0-r\varepsilon^{j2\beta}$$

これらを θ だけ回転した p_1'、p_2' は、

$$p_1'=\sigma_0+r\varepsilon^{j2(\beta+\theta)},\ p_2'=\sigma_0-r\varepsilon^{j2(\beta+\theta)}$$

上の p_1 の式から、 $r\varepsilon^{j2\beta}=p_1-\sigma_0$、

これを p_1' の式に代入し、

$p_1'=\sigma_0+(p_1-\sigma_0)\varepsilon^{j2\theta}$、すなわち、

$$\sigma_x'+j\tau_{xy}'=\sigma_0+\{(\sigma_x-\sigma_0)+j\tau_{xy}\}\varepsilon^{j2\theta}$$

$$\sigma_x^{'}+j\tau_{xy}^{'}=\sigma_0+\left\{(\sigma_x-\sigma_0)+j\tau_{yx}\right\}\varepsilon^{j2\theta}$$

$$\sigma_x^{'}=\sigma_0+(\sigma_x-\sigma_0)\cos 2\theta-\tau_{yx}\sin 2\theta$$

$$\tau_{xy}^{'}=(\sigma_x-\sigma_0)\sin 2\theta+\tau_{yx}\cos 2\theta$$

$\sigma_0=(\sigma_x+\sigma_y)/2$ を代入して、

$$\sigma_x^{'}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}+\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\theta-\tau_{yx}\sin 2\theta$$

$$\tau_{yx}^{'}=\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\sin 2\theta+\tau_{yx}\cos 2\theta$$

同様に、p_2、$p_2^{'}$ の式からは、

$$-r\varepsilon^{j2\beta}=p_2-\sigma_0$$

$$p_2^{'}=\sigma_0+(p_2-\sigma_0)\varepsilon^{j2\theta}$$

$$\sigma_y^{'}+j\tau_{xy}^{'}=\sigma_0+\left\{(\sigma_y-\sigma_0)+j\tau_{xy}\right\}\varepsilon^{j2\theta}$$

$$\sigma_y^{'}=\sigma_0+(\sigma_y-\sigma_0)\cos 2\theta-\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}-\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\theta-\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{xy}^{'}=-\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

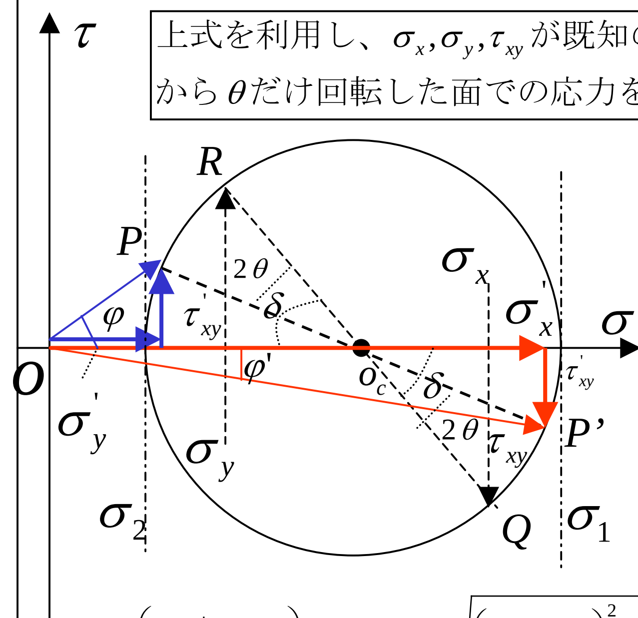
$\tau_{xy}=-\tau_{yx}$, $\tau_{xy}^{'}=-\tau_{yx}^{'}$ なので、以上をまとめると、

$$\sigma_x^{'}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}+\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_y^{'}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}-\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\theta-\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{xy}^{'}=-\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

上式を利用し、$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ が既知のとき、それから θ だけ回転した面での応力を求める図。

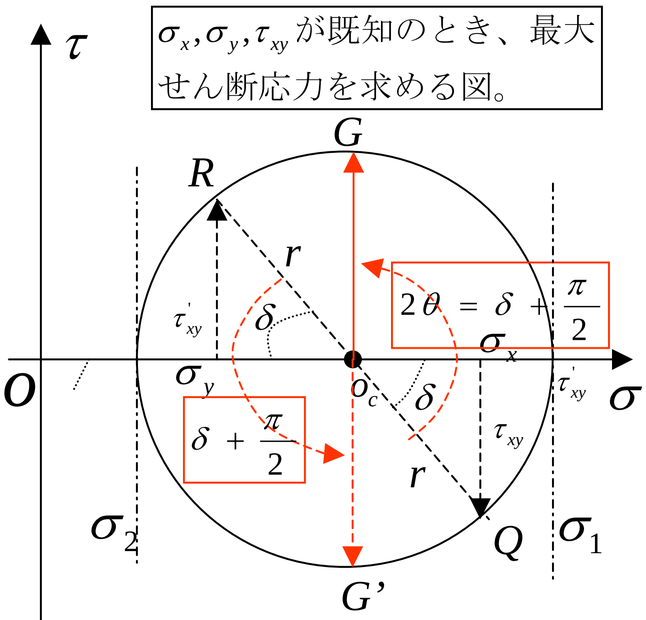


1.$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ から、点Q,Rを定める。
2.QRを結ぶ。横軸との交点oを中心にQ,Rを通る円を描く。
3.oQから反時計式に2θをとるとP'。
4.P'の対極がPになる。
(参考)$2\theta=\delta$とすれば主応力 σ_1,σ_2になる。

中心$\left(\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$　半径$r=\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+(\tau_{xy})^2}$

二次元応力円の応用

最大せん断応力



1. $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ から、点Q, Rを定める。
2. QRを結ぶ。横軸との交点oを中心にQ, Rを通る円を描く。
3. 円の上、下の頂点G, G'が絶対値が最大のせん断応力である。

$$2\theta = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\delta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

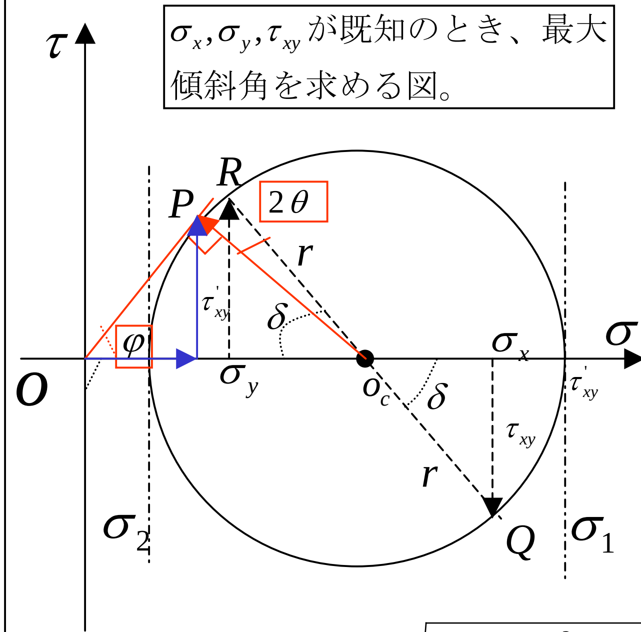
中心$\left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$　半径$r = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$

最大、最小垂直応力

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が既知のとき、最大、最小垂直応力は、図のσ_1, σ_2で、その値は、

$$\sigma_1, \sigma_2 = Oo \pm r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

最大傾斜角



中心$\left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$　半径$r = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

最大傾斜角 (合応力の、面の垂線に 対する角度の最大値)をφとすれば、上図のよう に、原点 Oから円に接線 OPを引けば、

$$\sin\varphi = \frac{oP}{Oo} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (2\tau_{xy})^2}\,/\,2}{(\sigma_x + \sigma_y)/2}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2}}{(\sigma_x + \sigma_y)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$