応力楕円、モールのひずみ円（平面応力状態）

（応力楕円）

平面応力状態で、主応力 σ_x, σ_y が既知のとき任意の向きの平面上の応力の x, y 成分を求める。

（モールのひずみ円）

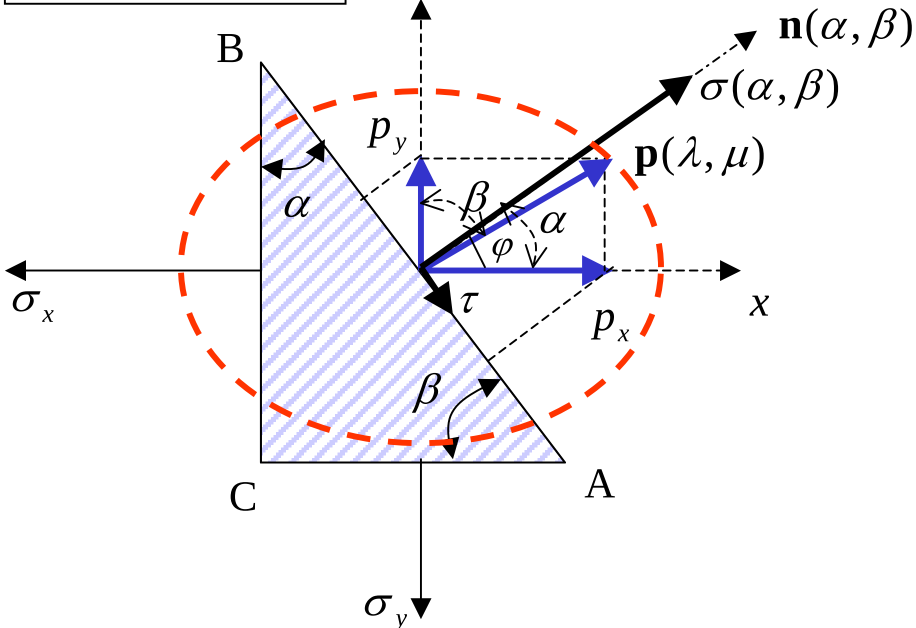
平面応力状態で、直交する2軸のひずみ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma$)が既知のとき、これと α の角度をなす方向のひずみを求める計算円図。

参考資料

湯浅亀一「材料力学」日本機械学会1952年

岡本舜三「応用力学演習」理工図書1955年

応力楕円の導出



$$p_x = p\cos\lambda = \sigma_x \cos\alpha$$

$$p_y = p\cos\mu = \sigma_y \cos\beta$$

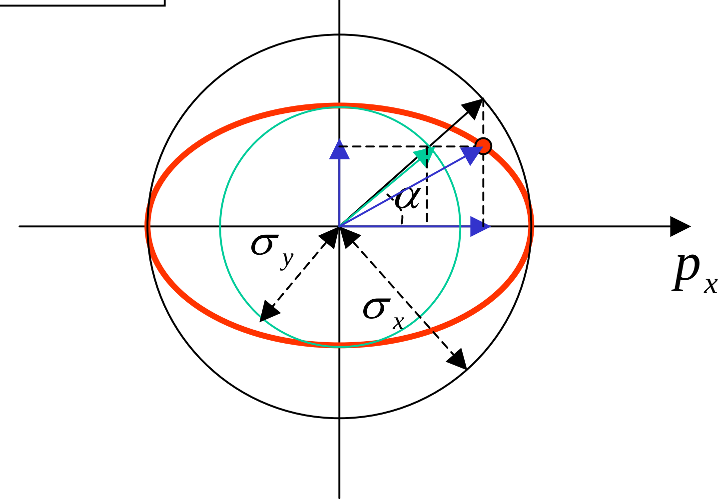
$$= p\sin\lambda = \sigma_y \sin\alpha$$

$$\left(\frac{p_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_y}\right)^2 = 1$$

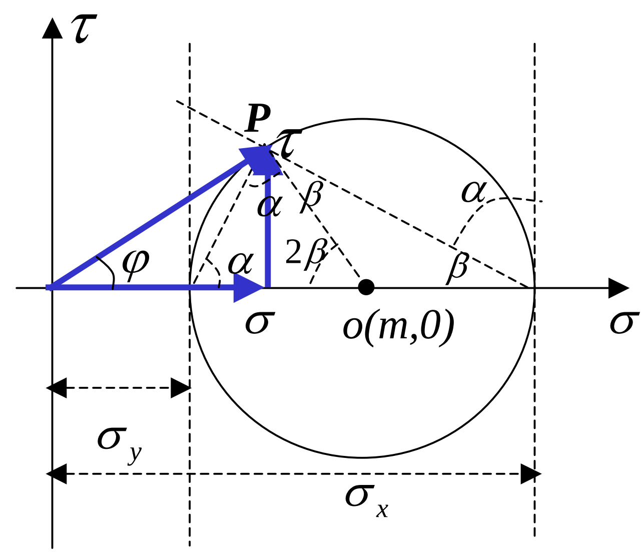
これはσ_x,σ_yを長、短経とする楕円。

右上図のように、σ_x,σ_yを半径とする2つの円と角αをなす直線との交点から求められる。

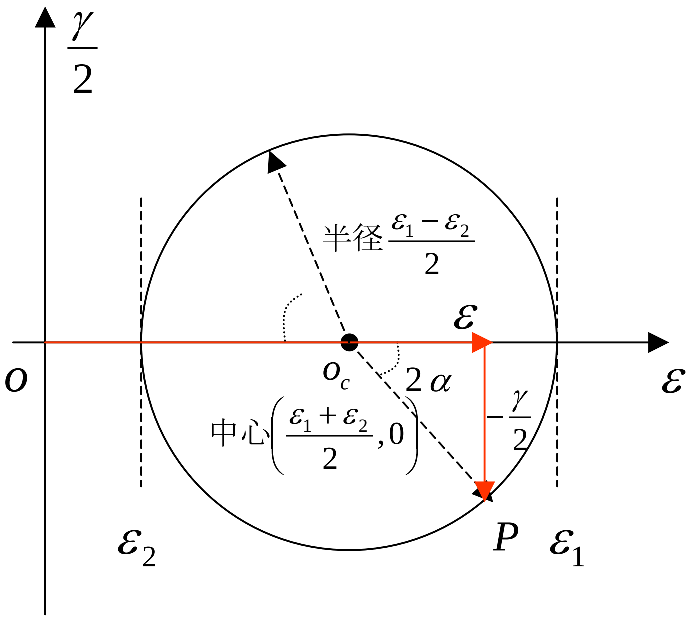
応力楕円



参考:モールの応力円



Mohr のひずみ円



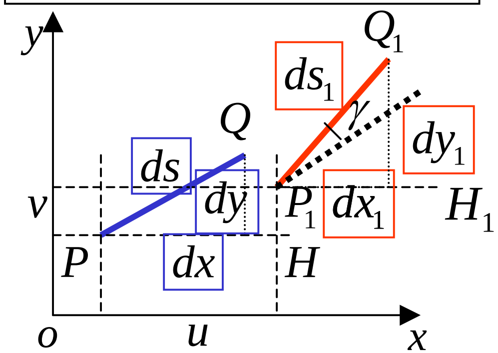
$\varepsilon_1>\varepsilon_2$ のとき、主ひずみ $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ が既知ならば、これと α をなす方向のひずみ P 点は次のひずみ円から求められる。

$$\left\{\varepsilon-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right\}^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2=\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right)^2$$

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\sin 2\alpha$$

Mohrのひずみ円の導出



$$\angle QPH=\alpha$$

$$\angle Q_1P_1H_1=\alpha_1=\alpha+\gamma$$

まず、平面応力状態で、平面上に直線PQをとり、これが、応力により、P_1Q_1 に移動したとする。移動前の各点の座標を、$P(x,y),Q(x+dx,y+dy)$とすれば、移動後は、

$$P_1(x+u,y+v),\ Q_1(x+u+dx_1,y+v+dy_1)$$

$$dx_1=dx+du,\ dy_1=dy+dv$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\quad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$(ds_1)^2=(dx_1)^2+(dy_1)^2$$

$$=\left(dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2+\left(dy+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)^2$$

$$\approx(dx)^2+(dy)^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx$$

$$+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dy$$

$$(ds_1)^2 \approx (dx)^2 + (dy)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx$$

$$+ 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dy$$

$$= (ds)^2[1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$+ 2\frac{\partial v}{\partial y}\sin^2\alpha]$$

$$ds_1 \approx ds[1 + \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\sin^2\alpha +$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha]$$

$$\varepsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds} \approx \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\sin^2\alpha +$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\sin^2\alpha + \gamma_z\sin\alpha\cos\alpha$$

ただし、$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \gamma_z = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{\gamma_z}{2}\sin 2\alpha$$

つぎに、せん断ひずみ γ を求める。

$$\sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma$$

$\gamma \approx 0 \to \cos\gamma \approx 1, \ \sin\gamma \approx \gamma$ として、

$$\sin(\alpha+\gamma) \approx \sin\alpha + \gamma\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\gamma) = \frac{dy_1}{ds_1} = \frac{dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy}{ds(1+\varepsilon)}$$

$$\approx \frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} - \varepsilon\frac{dy}{ds}$$

$$= \sin\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\alpha - \varepsilon\sin\alpha$$

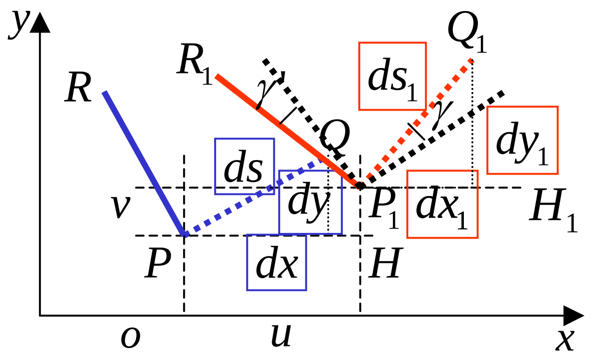
$$\gamma = \frac{\sin(\alpha+\gamma) - \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\approx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\tan\alpha - \varepsilon\tan\alpha$$

つぎに、次図のように、PQを$\pi/2$だけ進めたPRについて、ひずみ ε' を求めると、$\alpha \to \alpha + \pi/2$ として、

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha - \frac{\gamma_z}{2}\sin 2\alpha$$

$$\gamma' = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\cot\alpha + \varepsilon'\cot\alpha$$



$\gamma - \gamma'$ をあらためて γ'' と置くと、

$$\gamma'' = \frac{\partial v}{\partial y}(\tan\alpha + \cot\alpha) - \varepsilon\tan\alpha - \varepsilon'\cot\alpha$$

$$= \frac{\varepsilon_y(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \varepsilon\sin^2\alpha - \varepsilon'\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\varepsilon_y - \varepsilon(1 - \cos 2\alpha)/2 - \varepsilon'(1 + \cos 2\alpha)/2}{(\sin 2\alpha)/2}$$

$$= \frac{\varepsilon_y - (\varepsilon + \varepsilon')/2 + (\varepsilon - \varepsilon')\cos 2\alpha/2}{(\sin 2\alpha)/2}$$

$\varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ および次式を代入して、

$$\frac{(\varepsilon - \varepsilon')\cos 2\alpha}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos^2 2\alpha + \frac{\gamma_z}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$

$$\gamma'' = [\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}(-1 + \cos^2 2\alpha) + \frac{\gamma_z}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha]/(\sin 2\alpha)/2$$

$$= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha + \gamma_z\cos 2\alpha$$

以上の結果を再掲すると、次式となる。

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{\gamma_z}{2}\sin 2\alpha \cdots A$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha - \frac{\gamma_z}{2}\sin 2\alpha \cdots B$$

$$\gamma'' = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha + \gamma_z\cos 2\alpha \cdots\cdots C$$

(ひずみの主軸)

A または B を α で微分して0と置くと、ε の最大、最小値が求められる($\varepsilon_x > \varepsilon_y,\ \alpha = \alpha_n$)。

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha_n + \gamma_z\cos 2\alpha_n = 0$$

$$\tan 2\alpha_n = \frac{\gamma_z}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \to \cos 2\alpha_n = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{r},$$

$$\sin 2\alpha_n = \frac{\gamma_z}{r},\ r = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\gamma_z)^2}$$

これから、大きい方を ε_1,他を ε_2 として、

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_z}{2}\right)^2} \cdots D$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_z}{2}\right)^2} \cdots E$$

$$\gamma'' = 0 \cdots F$$

せん断ひずみが最大となるαを求めるため、Cをαで微分して0と置く$(\alpha=\alpha_t$とする$)$。

$$\frac{d\gamma''}{d\alpha}=-2(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cos 2\alpha_t-2\gamma_z\sin 2\alpha_t=0$$

$$\rightarrow \tan 2\alpha_t=-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{\gamma_z}$$

これから、$\tan 2\alpha_n\times\tan 2\alpha_t=-1$となり、$2\alpha_n$と$2\alpha_t$とは90°、$\alpha_n$と$\alpha_t$とは45°ずれていることがわかる。すなわち、せん断ひずみが最大、最小になる角度は主ひずみ方向と45°ずれている。

(主ひずみが既知の場合)

$\varepsilon_x=\varepsilon_1,\varepsilon_y=\varepsilon_2,\gamma_z=0$として、$A, B, C$に代入して、

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos 2\alpha\cdots G$$

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos 2\alpha\cdots H$$

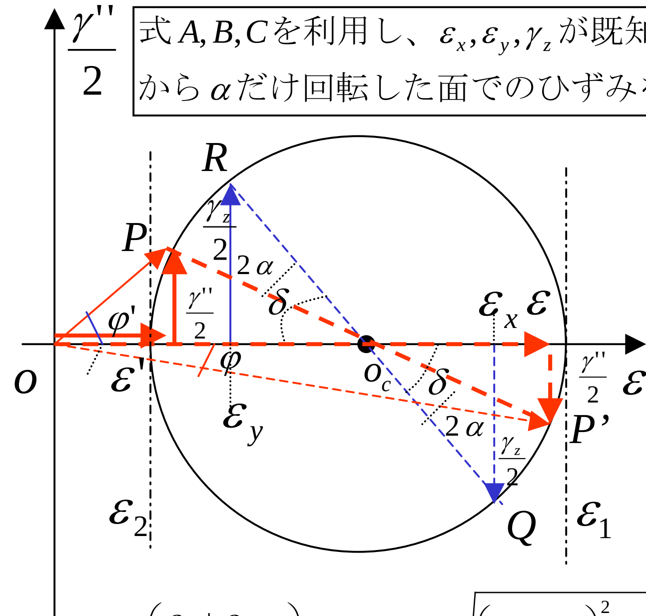
$$\gamma''=-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin 2\alpha\cdots\cdots I$$

G,Iまたは、H,Iから、

$$\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma''}{2}\right)^2=\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right)^2$$ を得る。

これが、$p.3$の$Mohr$のひずみ円である。

式A,B,Cを利用し、$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_z$が既知のとき、それから$\alpha$だけ回転した面でのひずみを求める図。



1.$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma''/2$から、点$Q,R$を定める。
2.QRを結ぶ。横軸との交点oを中心にQ,Rを通る円を描く。
3.oRから反時計式に2αをとるとP
4.Pの対極がP'になる。
(参考)$2\alpha=\delta$とすれば主ひずみ$\varepsilon_1,\varepsilon_2$になる。

中心$\left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2},0\right)$ 半径$r=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_z}{2}\right)^2}$

図の$P\varepsilon o\varepsilon_x Q$の間に成り立つ関係として、

$$\varepsilon=(\varepsilon_x+\varepsilon_y)/2+r\cos(\delta-2\alpha)$$
$$=(\varepsilon_x+\varepsilon_y)/2+r\cos\delta\cos 2\alpha+r\sin\delta\sin 2\alpha$$
$$=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha+\frac{\gamma_z}{2}\sin 2\alpha\cdots A$$

$\alpha\rightarrow\alpha+\pi/2$とすれば $P\rightarrow P'$に移動し

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha-\frac{\gamma_z}{2}\sin 2\alpha\cdots B$$
$$\gamma''/2=r\sin(\delta-2\alpha)=r\sin\delta\cos 2\alpha-r\cos\delta\sin 2\alpha$$
$$=-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha+\frac{\gamma_z}{2}\cos 2\alpha\cdots C$$