MTBF(平均故障間隔)とtbf(故障間隔)
ポアソン分布、指数分布、待ち行列

確率密度関数　$f(x)=\mu\exp(-\mu x)$・・・指数分布

その累積確率分布　$F(x)=1-\exp(-\mu x)$

$\mu = 1/MTBF$

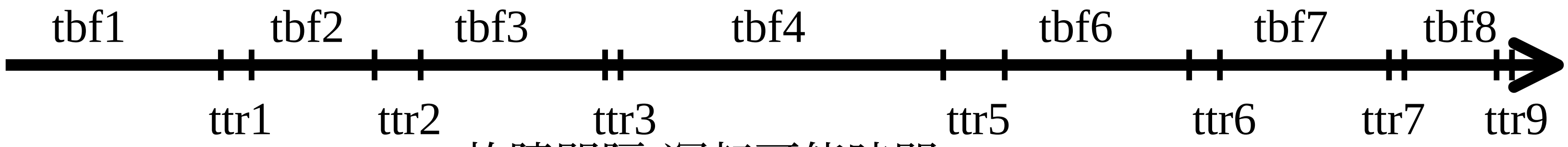
$x=tbf$

通常、故障間隔x=tbfは指数分布に従う

xの平均値がMTBF(Mean Time Between Failures)

参考　ポアソン分布と指数分布、待ち行列理論の初歩

ある機械の使用実績と指数分布

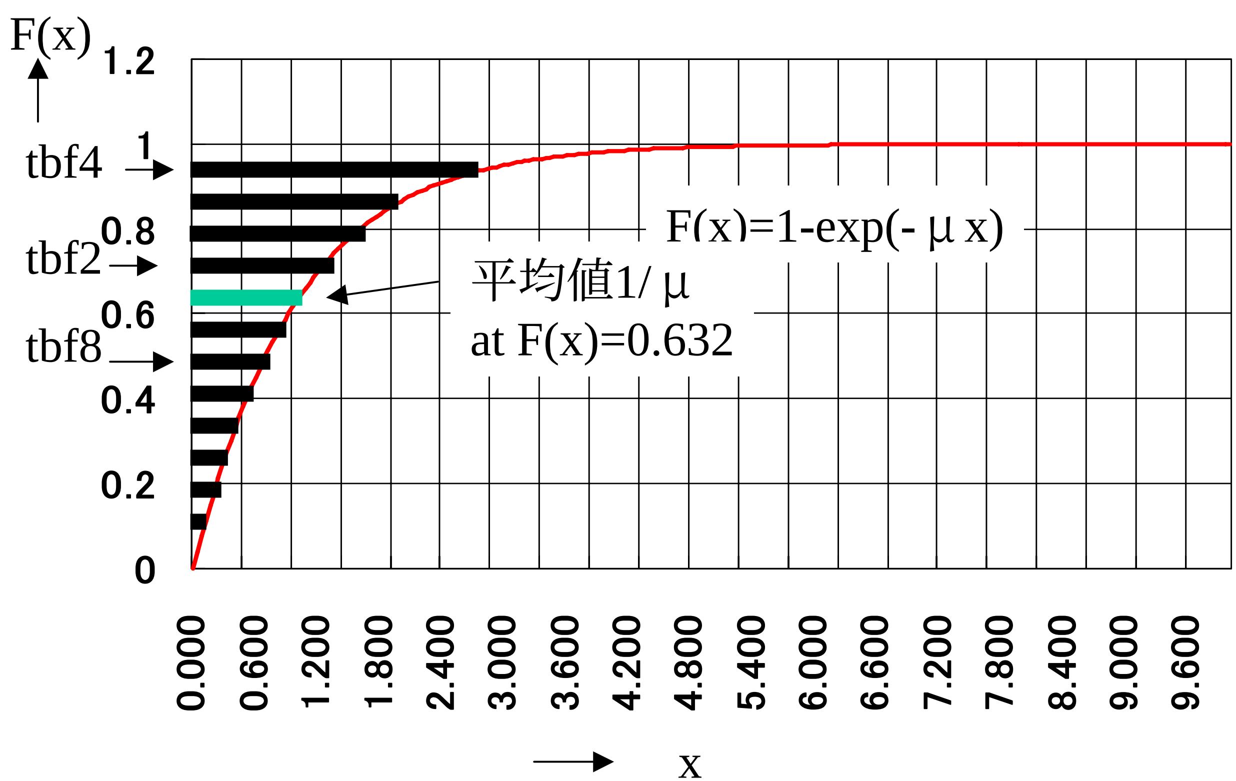


tbf: time between failures 故障間隔(運転可能時間)

ttr: time to repair 修理時間

m=mean(平均)を付けるとmtbf, mttrとなる。mtbf/(mtbf+mttr)は(時間)稼動(可能)率

tbfを小さい順に下から積み上げて行くと、図のようにある曲線(赤)に従う事が分かる。この曲線は $F(x)=1-\exp(-\mu x)$ にほぼ一致し、tbfの平均値、すなわちmtbfは $mtbf=1/\mu$ となる。実はttrについても同様な傾向にある。$mttr=1/\mu'$ の形になる。F(x)は累積指数分布関数と呼ばれる。$f(x)=dP/dx=\mu\exp(-\mu x)$ はその確率密度関数である。



$x=1/\mu$ となるF(x)は $x=1/\mu$ として、$1-\exp(-1)=0.632$

運転シミュレーションについて

tbfとttrの累積分布関数が分かると、サイコロ(0~1乱数)を用いて、コンピュータ上でモンテカルロ型運転シミュレーションを行うことができる。

例えば

1.乱数値=0.6, tbf=0.9
2.乱数値=0.8, ttr=0.18
3.乱数値=0.2, tbf=0.2
4.乱数値=0.3, ttr=0.05
5.乱数値=0.9, tbf=2.0
6.乱数値=0.1, ttr=0.02

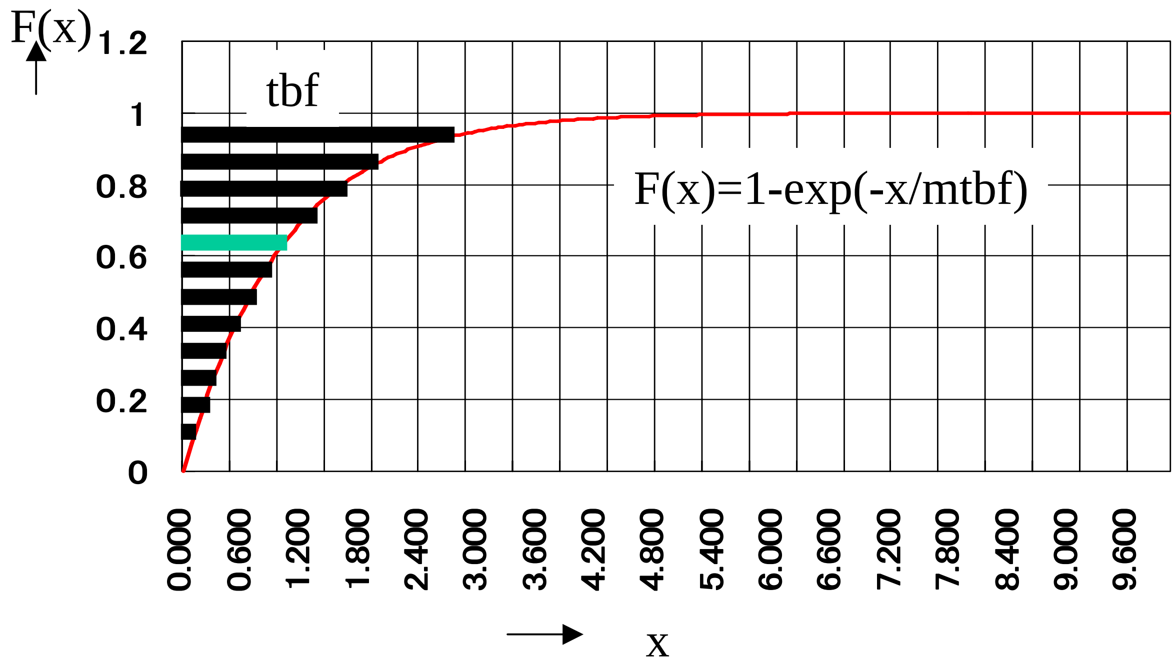
………………………

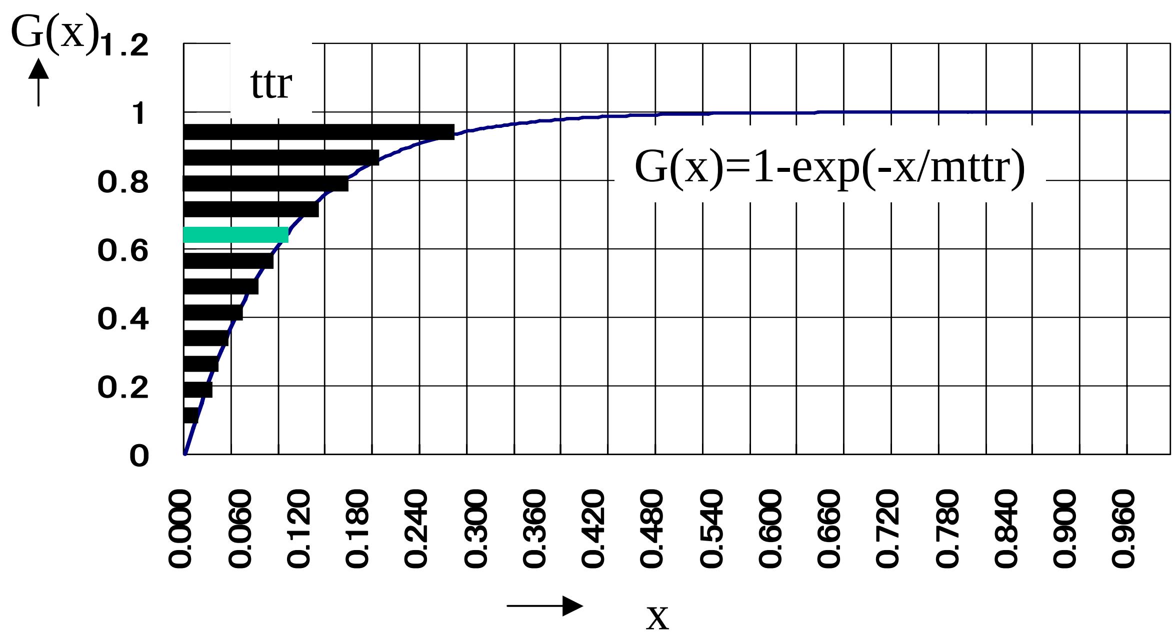
………………………

これによって、コンピュータ上で前ページの上部にあるような運転時間、修理時間の系列が得られる。

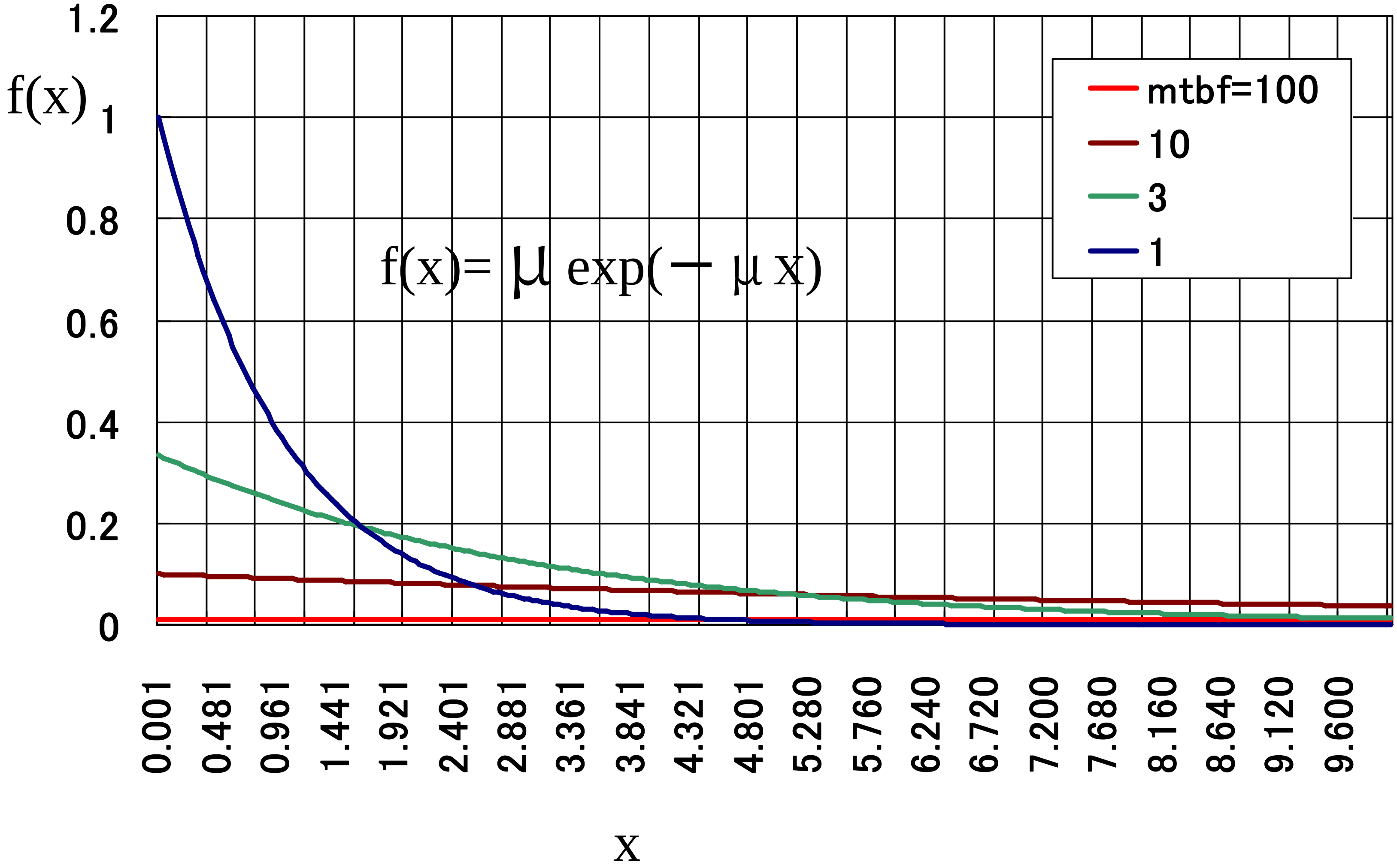
これを何年分も繰り返して、諸統計が収斂するまで行う。

発電機に流通設備を加え、系統事故等も模擬して1000~5000年分を行うこともある。

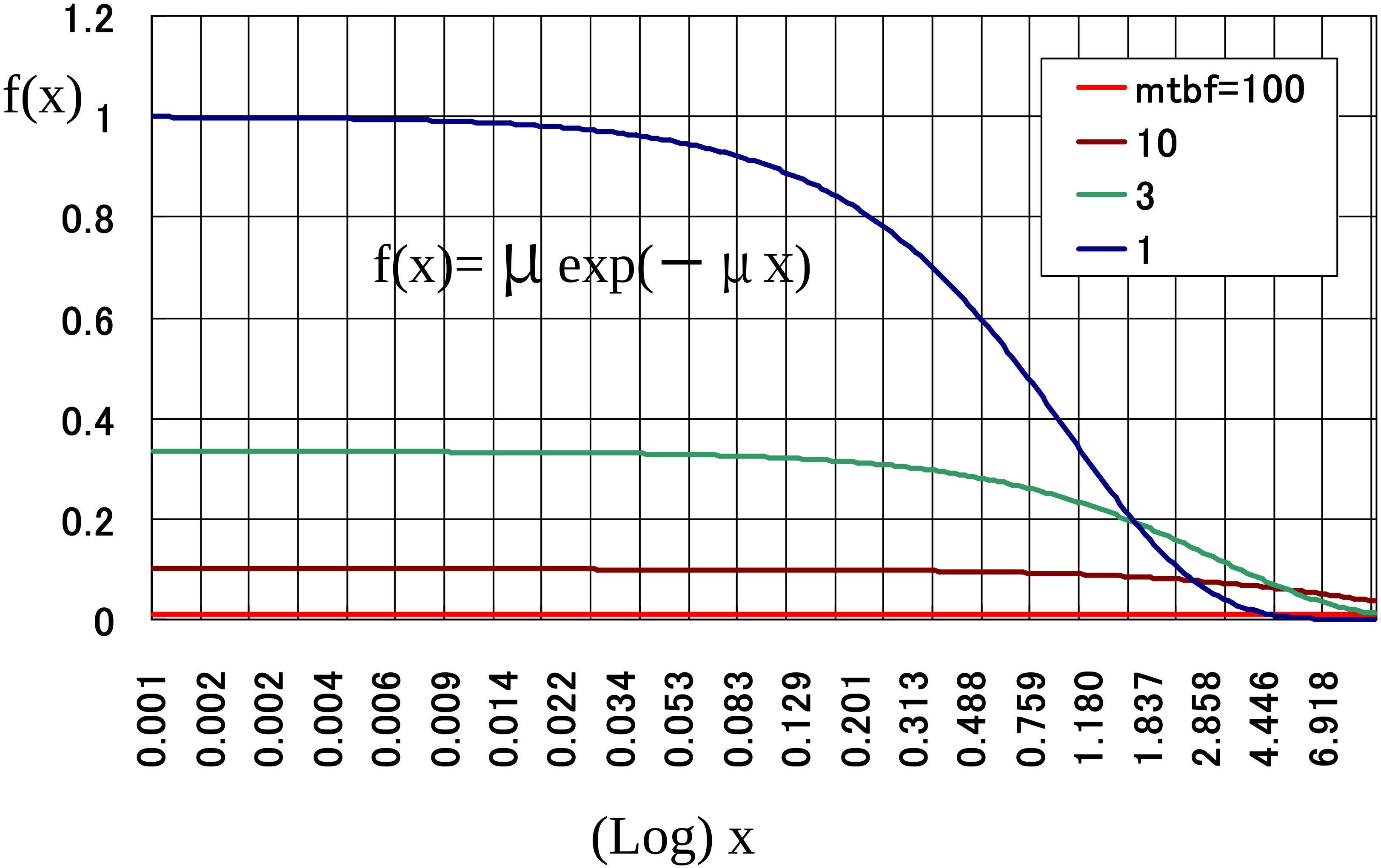




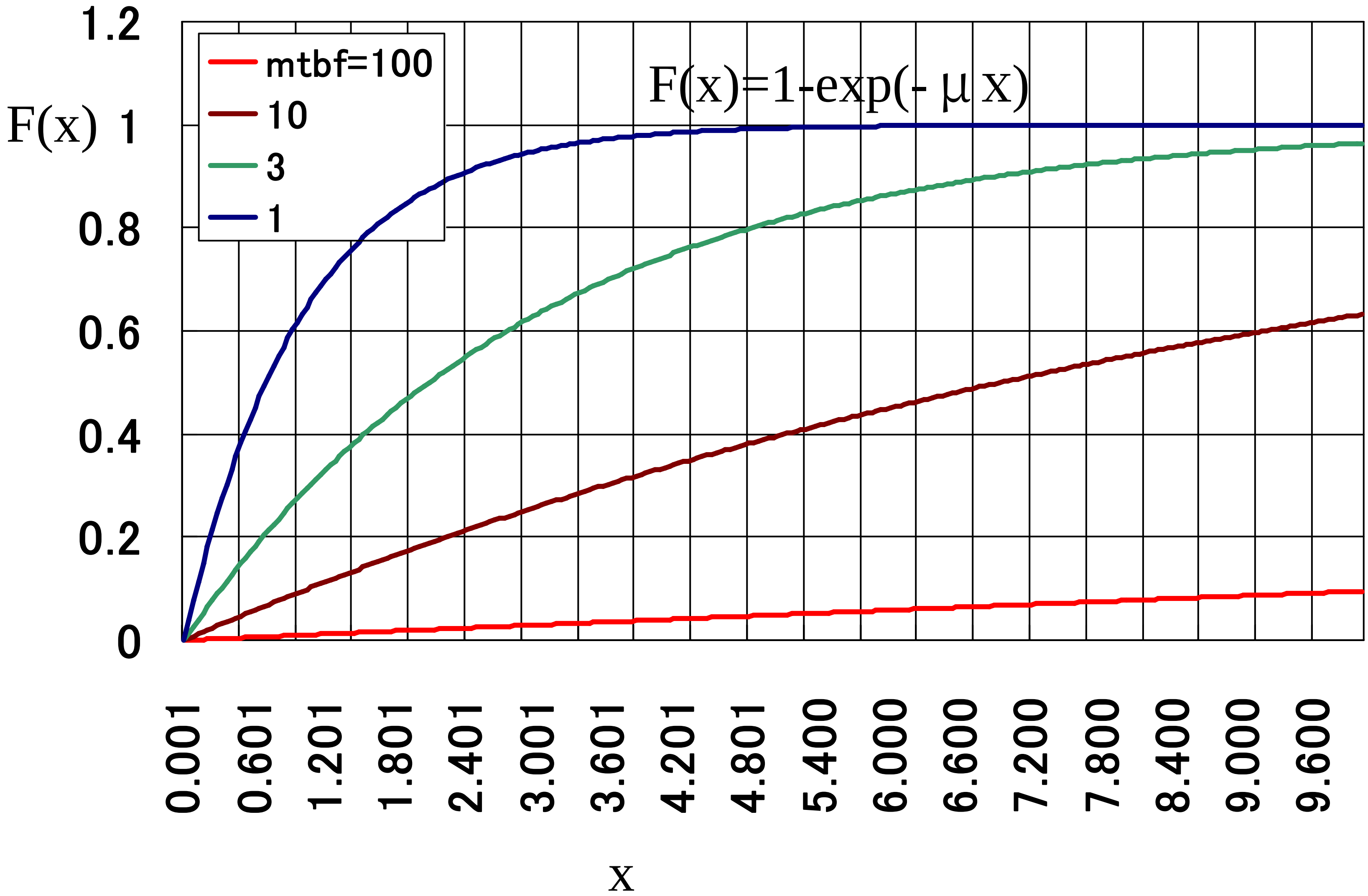
MTBF= 1/ μ による指数分布 f(x)



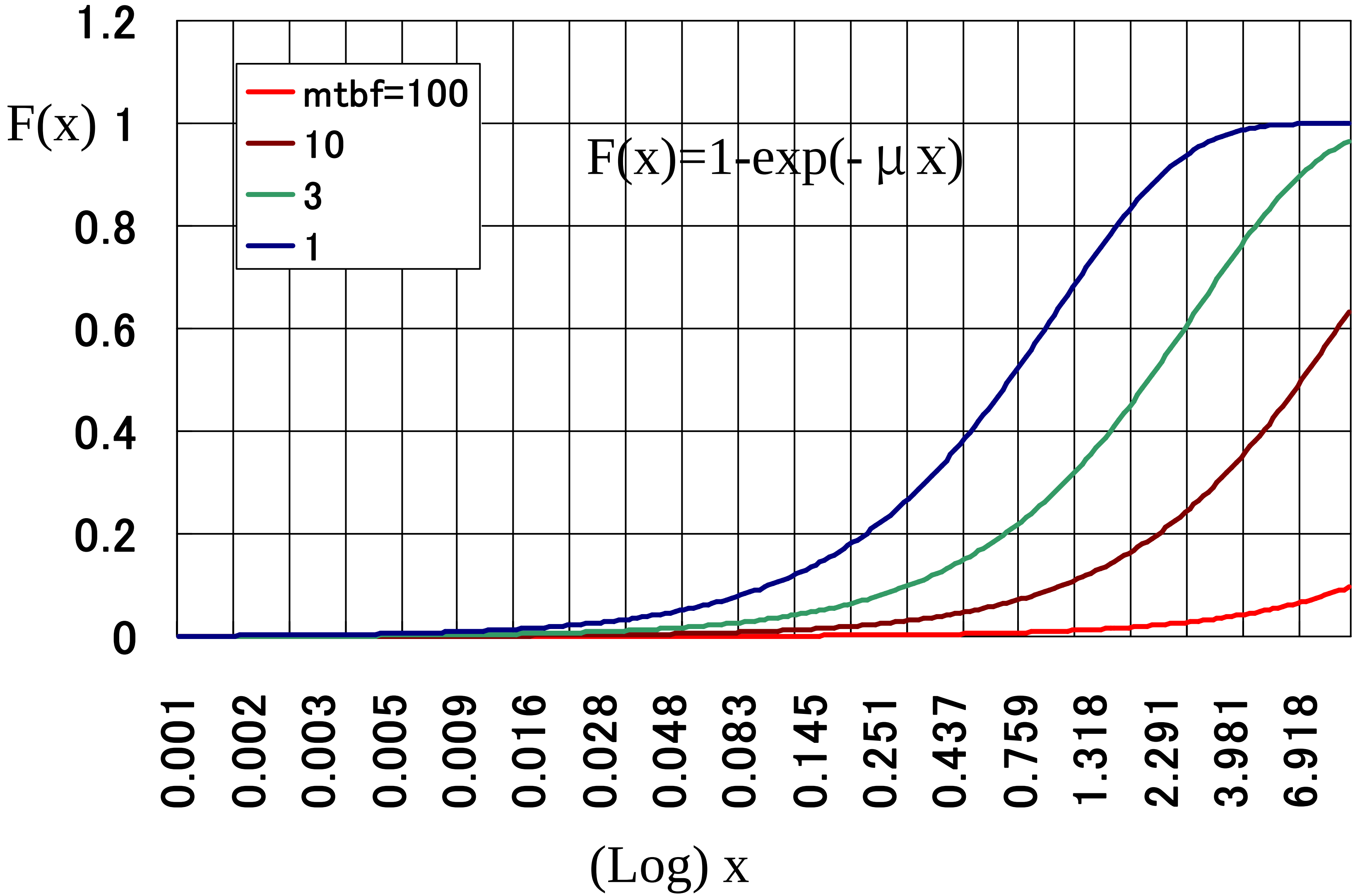
MTBF= 1/ μ による指数分布 f(x)
時間軸を対数表示とした場合



MTBF=1/μによる指数分布の累積分布F(x)



MTBF=1/μによる指数分布の累積分布F(x)
時間軸を対数表示とした場合



f(x)

x	mtbf=100	10	3	1
0.002512	0.010000	0.099975	0.333720	0.997491
0.002606	0.010000	0.099974	0.333709	0.997397
0.002704	0.010000	0.099973	0.333698	0.997300
0.002805	0.010000	0.099972	0.333687	0.997198
0.002911	0.010000	0.099971	0.333675	0.997094
0.003020	0.010000	0.099970	0.333663	0.996985
0.003133	0.010000	0.099969	0.333651	0.996872
0.003251	0.010000	0.099967	0.333638	0.996754
0.003373	0.010000	0.099966	0.333624	0.996633
0.003499	0.010000	0.099965	0.333610	0.996507
0.003631	0.010000	0.099964	0.333595	0.996376
0.003767	0.010000	0.099962	0.333580	0.996240
0.003908	0.010000	0.099961	0.333564	0.996099
0.004055	0.010000	0.099959	0.333548	0.995953
0.004207	0.010000	0.099958	0.333531	0.995802
0.004365	0.010000	0.099956	0.333513	0.995644
0.004529	0.010000	0.099955	0.333495	0.995481
0.004699	0.010000	0.099953	0.333476	0.995312
0.004875	0.010000	0.099951	0.333457	0.995137
0.005058	0.009999	0.099949	0.333436	0.994955
0.005248	0.009999	0.099948	0.333415	0.994766
0.005445	0.009999	0.099946	0.333393	0.994570
0.005649	0.009999	0.099944	0.333370	0.994367
0.005861	0.009999	0.099941	0.333347	0.994156
0.006081	0.009999	0.099939	0.333322	0.993937
0.006310	0.009999	0.099937	0.333297	0.993710
0.006546	0.009999	0.099935	0.333271	0.993475
0.006792	0.009999	0.099932	0.333243	0.993231
0.007047	0.009999	0.099930	0.333215	0.992978
0.007311	0.009999	0.099927	0.333185	0.992715
0.007586	0.009999	0.099924	0.333155	0.992443
0.007870	0.009999	0.099921	0.333123	0.992160
0.008166	0.009999	0.099918	0.33309	0.991867

x	mtbf=100	10	3	1
0.008166	0.009999	0.099918	0.333090	0.991867
0.008472	0.009999	0.099915	0.333056	0.991564
0.008790	0.009999	0.099912	0.333021	0.991248
0.009120	0.009999	0.099909	0.332984	0.990921
0.009462	0.009999	0.099905	0.332946	0.990582
0.009817	0.009999	0.099902	0.332907	0.990231
0.010186	0.009999	0.099898	0.332866	0.989866
0.010568	0.009999	0.099894	0.332823	0.989487
0.010965	0.009999	0.099890	0.332779	0.989095
0.011376	0.009999	0.099886	0.332733	0.988688
0.011803	0.009999	0.099882	0.332686	0.988266
0.012246	0.009999	0.099878	0.332637	0.987829
0.012706	0.009999	0.099873	0.332586	0.987375
0.013183	0.009999	0.099868	0.332533	0.986904
0.013677	0.009999	0.099863	0.332478	0.986416
0.014191	0.009999	0.099858	0.332421	0.985910
0.014723	0.009999	0.099853	0.332362	0.985385
0.015276	0.009998	0.099847	0.332300	0.984840
0.015849	0.009998	0.099842	0.332237	0.984276
0.016444	0.009998	0.099836	0.332171	0.983691
0.017061	0.009998	0.099830	0.332102	0.983084
0.017701	0.009998	0.099823	0.332031	0.982455
0.018365	0.009998	0.099817	0.331958	0.981802
0.019055	0.009998	0.099810	0.331881	0.981126
0.019770	0.009998	0.099802	0.331802	0.980424
0.020512	0.009998	0.099795	0.331720	0.979697
0.021281	0.009998	0.099787	0.331634	0.978943
0.022080	0.009998	0.099779	0.331546	0.978162
0.022909	0.009998	0.099771	0.331454	0.977352
0.023768	0.009998	0.099763	0.331359	0.976512
0.024660	0.009998	0.099754	0.331260	0.975641
0.025586	0.009997	0.099744	0.331158	0.974739
0.026546	0.009997	0.099735	0.331052	0.973803

$F(x)$

x	mtbf=100	10	3	1
0.002512	0.000025	0.000251	0.000839	0.002509
0.002606	0.000026	0.000261	0.000870	0.002603
0.002704	0.000027	0.000270	0.000903	0.002700
0.002805	0.000028	0.000281	0.000937	0.002802
0.002911	0.000029	0.000291	0.000972	0.002906
0.003020	0.000030	0.000302	0.001008	0.003015
0.003133	0.000031	0.000313	0.001046	0.003128
0.003251	0.000033	0.000325	0.001085	0.003246
0.003373	0.000034	0.000337	0.001126	0.003367
0.003499	0.000035	0.000350	0.001168	0.003493
0.003631	0.000036	0.000363	0.001212	0.003624
0.003767	0.000038	0.000377	0.001257	0.003760
0.003908	0.000039	0.000391	0.001305	0.003901
0.004055	0.000041	0.000405	0.001353	0.004047
0.004207	0.000042	0.000421	0.001404	0.004198
0.004365	0.000044	0.000436	0.001457	0.004356
0.004529	0.000045	0.000453	0.001512	0.004519
0.004699	0.000047	0.000470	0.001568	0.004688
0.004875	0.000049	0.000487	0.001627	0.004863
0.005058	0.000051	0.000506	0.001688	0.005045
0.005248	0.000052	0.000525	0.001751	0.005234
0.005445	0.000054	0.000544	0.001817	0.005430
0.005649	0.000056	0.000565	0.001885	0.005633
0.005861	0.000059	0.000586	0.001956	0.005844
0.006081	0.000061	0.000608	0.002029	0.006063
0.006310	0.000063	0.000631	0.002105	0.006290
0.006546	0.000065	0.000654	0.002184	0.006525
0.006792	0.000068	0.000679	0.002266	0.006769
0.007047	0.000070	0.000704	0.002351	0.007022
0.007311	0.000073	0.000731	0.002439	0.007285
0.007586	0.000076	0.000758	0.002530	0.007557
0.007870	0.000079	0.000787	0.002625	0.007840
0.008166	0.000082	0.000816	0.002724	0.008133

x	mtbf=100	10	3	1
0.008166	0.000082	0.000816	0.002724	0.008133
0.008472	0.000085	0.000847	0.002826	0.008436
0.008790	0.000088	0.000879	0.002932	0.008752
0.009120	0.000091	0.000912	0.003041	0.009079
0.009462	0.000095	0.000946	0.003155	0.009418
0.009817	0.000098	0.000981	0.003274	0.009769
0.010186	0.000102	0.001018	0.003396	0.010134
0.010568	0.000106	0.001056	0.003524	0.010513
0.010965	0.000110	0.001096	0.003656	0.010905
0.011376	0.000114	0.001137	0.003792	0.011312
0.011803	0.000118	0.001180	0.003935	0.011734
0.012246	0.000122	0.001224	0.004082	0.012171
0.012706	0.000127	0.001270	0.004235	0.012625
0.013183	0.000132	0.001317	0.004393	0.013096
0.013677	0.000137	0.001367	0.004558	0.013584
0.014191	0.000142	0.001418	0.004728	0.014090
0.014723	0.000147	0.001471	0.004905	0.014615
0.015276	0.000153	0.001526	0.005089	0.015160
0.015849	0.000158	0.001584	0.005280	0.015724
0.016444	0.000164	0.001643	0.005477	0.016309
0.017061	0.000171	0.001705	0.005682	0.016916
0.017701	0.000177	0.001769	0.005895	0.017545
0.018365	0.000184	0.001835	0.006115	0.018198
0.019055	0.000191	0.001904	0.006344	0.018874
0.019770	0.000198	0.001975	0.006581	0.019576
0.020512	0.000205	0.002049	0.006827	0.020303
0.021281	0.000213	0.002126	0.007083	0.021057
0.022080	0.000221	0.002206	0.007348	0.021838
0.022909	0.000229	0.002288	0.007622	0.022648
0.023768	0.000238	0.002374	0.007907	0.023488
0.024660	0.000247	0.002463	0.008203	0.024359
0.025586	0.000256	0.002555	0.008509	0.025261
0.026546	0.000265	0.002651	0.008827	0.026197

M社製タービン　毎週点検

F(x)は、故障間隔がx以下の確率を表すから、1週間=7日=0.02年の間に故障する確率は、前ページの表から、2/10,000, 2/1,000, 2/300, 1/50程度である。これが1/100すなわち100年に1回となるのはMTBF=1.5～2年程度とみられる。すなわち、毎週1回の点検で故障が発見できればMTBF=1.5～2年のとき、100年に1回の故障を発見しようとしていることになる。MTBF=3年のときは、150年に1回程度となる。

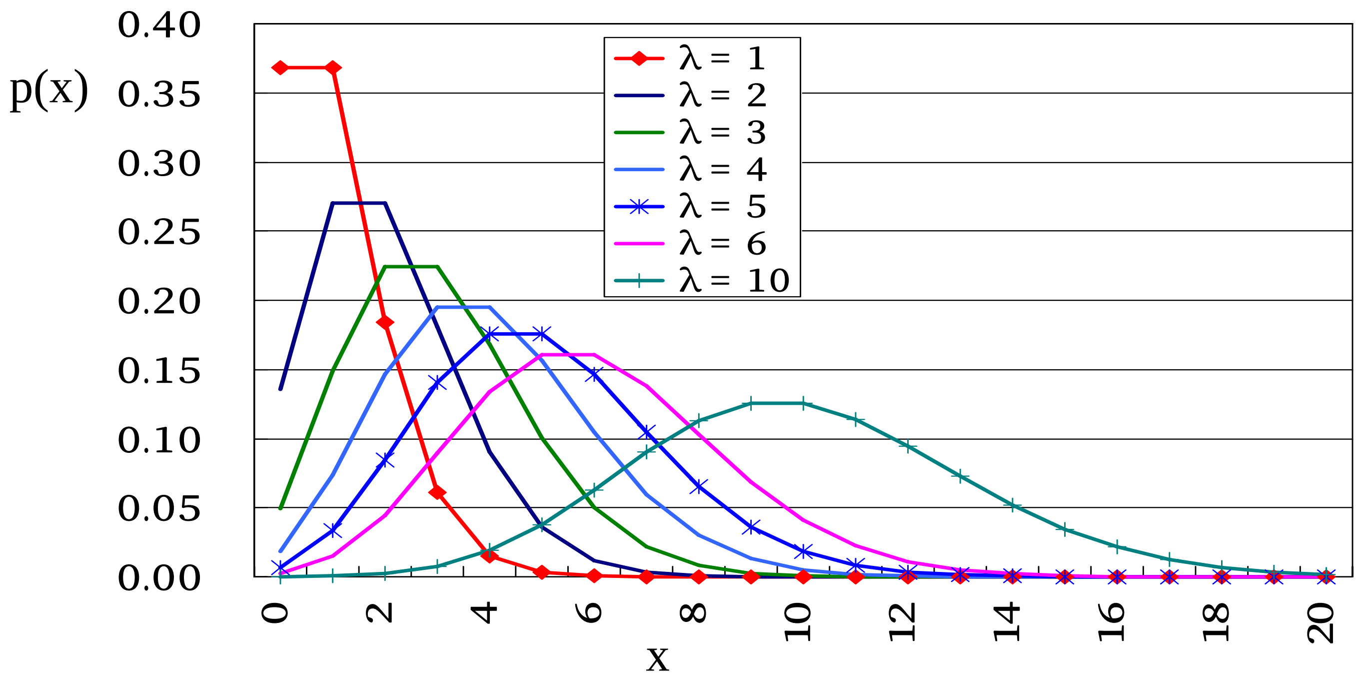
x	MTBF=100	10	3	1 year
0.019770	0.000198	0.001975	0.006581	0.019576
0.020512	0.000205	0.002049	0.006827	0.020303

G社製タービン　毎日点検

F(x)は、故障間隔がx以下の確率を表すから、1日=0.0027年の間に故障する確率は、前ページの表から、1/30,000, 1/3,000, 1/1,000, 1/300程度である。MTBF=1年とすれば、300年に1回の故障を捕らえようとしていることになる。

x	MTBF=100	10	3	1 year
0.002704	0.000027	0.000270	0.000903	0.002700
0.002805	0.000028	0.000281	0.000937	0.002802

参考、ポアソン分布と指数分布



ポアソン分布と指数分布とは相互に関連がありかつ、待ち行列の問題など実用面でもよく使われる。

ポアソン (Simeon Poisson,1781–1840)分布　　整数変数 x が次の確率密度関数に従う場合をいう。

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$$

xは、ある時間内に到着する客の数とか、通過する車の数などに対応している。

この平均値はλ, 分散もλである。

　待ち行列理論では、単位時間に到着する客の数をポアソン分布、一人あたりの処理時間の分布を指数分布で代表して、平均待ち時間や平均行列長さなどを求める。窓口の数と待ち行列の長さとの関係から適切な窓口数を決めることなどに使用する。

ポアソン分布の導出

ポアソン分布を導き出すのに二つの方法がある。
一つは、二項分布から、もう一つは、漸化式からである。

1. 2項分布の特別な場合として求める。

$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$において、 nが大きく、かつ、

pが小さいとき、 $\lambda = np$とおいて、$p = \frac{\lambda}{n}$

$${}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}\lambda^x\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$n \to \infty$とすれば、

$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda} \to e,\ \left(1-\frac{m}{n}\right) \to 1$ から、

$$p(x;\lambda) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} \approx \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x = 0,1,2...$$

2. 漸化式から求める方法

二つの隣接した時間の 区間$(0, t)$, $(t,\ t+h)$を考える。
ただし、hは十分小さい値とする 。

長さtの時間間隔中に、丁度 n台の自動車が通過する 確率を $P_n(t)(n = 0,1,2...)$と表す。 $1-P_0(t)$は、1台以上の車が通過する確率を表す。 時間間隔が小さい時

$\lim_{t\to 0}\frac{1-P_0(t)}{t} = \alpha,\ t$が十分小さければ、2台以上の通過は無視できるので、1台通過の確率が $\alpha t (\equiv \lambda$とおく$)$。

今$n \geq 1$とし、$(0,\ t+h)$の内に丁度 n 台の車が通過する場合を考えると、これ は、次の三つの排反事 象の和で表される。

(1)$(0,\ t)$の間に n 台通過し、$(t, t+h)$の間に 1台も通過しない

(2)$(0, t)$の間に$(n-1)$台通過し、$(t, t+h)$ の間に 1 台通過する

(3) $(0, t)$の間に$(n-x)$ $(x \geq 2)$台通過し、$(t,\ t+h)$ の間に x台通過する

これらの三つの場合の 確率の和は、

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\alpha h) + P_{n-1}(t)\alpha h + o(h)$$

$o(h)$は他の項に比して小さ く無視して書き直すと

$$\frac{d}{dt}\{P_n(t)\} = \lim_{h\to 0}\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\alpha P_n(t) + \alpha P_{n-1}(t),\ (n \geq 1)$$

$P_0(t) \approx 1-\alpha t \approx e^{-\alpha t}$ であるから逐次代入し て解けば

$$P_n(t) = \frac{(\alpha t)^n}{n!}e^{-\alpha t} = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ \lambda = \alpha t,\ n = 0,1,2.....(\text{次ページ})$$

[逐次代入による解法]

$$\frac{d}{dt}\{P_n(t)\} = -\alpha P_n(t) + \alpha P_{n-1}(t),\ (n \geq 1)$$

(1) P_1

$P_0(t) = e^{-\alpha t}$ であるから

$\dfrac{dP_1}{dt} + \alpha P_1 = \alpha e^{-\alpha t},\ P_1 = \theta t e^{-\alpha t}$ とおけば、

$$\theta e^{-\alpha t} - \alpha \theta t e^{-\alpha t} + \alpha \theta t e^{-\alpha t} = \alpha e^{-\alpha t}$$

$$\to \theta = \alpha \to P_1 = \alpha t e^{-\alpha t}$$

(2) P_2

$\dfrac{dP_2}{dt} + \alpha P_2 = \alpha^2 t e^{-\alpha t},\ P_2 = \theta t^2 e^{-\alpha t}$ とおく。

$$2\theta t e^{-\alpha t} - \alpha \theta t^2 e^{-\alpha t} + \alpha \theta t^2 e^{-\alpha t} = \alpha^2 t e^{-\alpha t}$$

$$\to \theta = \frac{\alpha^2}{2} \to P_2 = \frac{\alpha^2 t^2}{2} e^{-\alpha t} = \frac{(\alpha t)^2}{2!} e^{-\alpha t}$$

(3) P_n

$P_{n-1} = \dfrac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t}$ を仮定。$P_n = \theta t^n e^{-\alpha t}$ とおく。

$$n\theta t^{n-1} e^{-\alpha t} - \alpha \theta t^n e^{-\alpha t} + \alpha \theta t^n e^{-\alpha t}$$

$$= n\theta t^{n-1} e^{-\alpha t} = \alpha^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$$

$$\theta = \frac{\alpha^n}{n!} \to P_n = \frac{\alpha^n t^n}{n!} e^{-\alpha t} = \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t}$$

指数分布の導出

ポアソン分布と同様な自動車の通過モデル
を考える。

(1) $(t,\ t+h)$ 間に1台通過する確率は αh,

(2)この間に、2台以上が通過する確率は無視できる。

(3)この間の通過台数は、時刻が t 以前の出来事に無関係

1台通過後、次の1台が通過するまでの時間間隔が y 以下である確率 $F(y)$ は

$$F(y) = P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y)$$

$= 1 - P(y$時間内の通過が $0)$

$$= 1 - p(0;\ \alpha y) = 1 - \frac{e^{-\alpha y}(\alpha y)^0}{0!}$$

$$= 1 - e^{-\alpha y}$$

これから、確率密度関数 $f(y)$ は

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) = \alpha e^{-\alpha y}$$

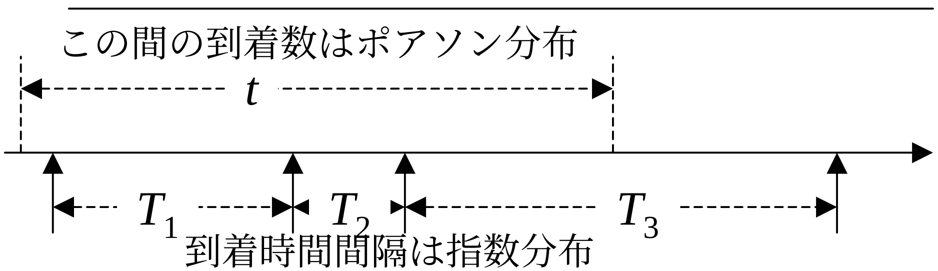
$y \to x,\ \alpha \to \mu$ と書き直すと

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

となる。xの平均値は $1/\mu$ である。

ポアソン分布と指数分布の関係



ポアソン分布で、$T_i > t$という事象は、連続する二個の事象の発生時間間隔がt以上ということで、tという時間間隔での発生数が0であることを意味する。したがって、

$P(T_i > t) = P_0 = e^{-\alpha t}$が成り立つ。これから

$P(T_i \le t) = 1 - e^{-\alpha t}$、これは、指数分布の累積確率分布であり、時間間隔が指数分布に従うことを示している。

このとき、確率密度関数は、上記を微分した、

$p(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ で表され、平均mは

$$m = \int_0^\infty t\,\alpha e^{-\alpha t}\,dt = \left[t\left(-e^{-\alpha t}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-\alpha t}\right)dt = 0 + \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

分散 σ^2は、$\sigma^2 = \int_0^\infty (t-m)^2\,\alpha e^{-\alpha t}\,dt$

$$= \left[(t-m)^2\left(-e^{-\alpha t}\right)\right]_0^\infty + \frac{2}{\alpha}\int_0^\infty (t-m)\left(\alpha e^{-\alpha t}\right)dt = m^2 - 0 = \frac{1}{\alpha^2}$$

ポアソン分布の方は、平均、分散とも$\lambda = \alpha t$ である。

待ち行列理論の初歩

$M/M/1$モデル（ポアソン到着、指数処理、窓口数1）

客の到着はポアソン分布に従い、単位時間当たり λ 人とする。

これに対するサービスは処理窓口が一つで、一人当たり平均$1/\mu$（時間単位）の指数分布とする。

時刻$t+h$における行列の長さがnである場合を考えると、次の四つの何れかが起こっている。

(1)時刻tでの行列の長さがnで$(t, t+h)$の間に長さの変化がない。

(2)時刻tでの行列のか長さが$n-1$で、$(t, t+h)$の間に1単位が到着する。

(3)時刻tでの行列の長さが$n+1$で、$(t, t+h)$の間に1単位のサービスが終了する。

(4)$(t, t+h)$のうちに二つ以上の変化が生じる。

$\rightarrow$無視

排反事象である(1)(2)(3)の確率を加えて、

$n \ge 1$に対し、

$P_n(t+h) = P_n(t)\{1 - \lambda h - \mu h\} + \lambda h P_{n-1}(t) +$

$+ \mu h P_{n+1}(t)$

変形して$h \rightarrow 0$として

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t),\ n >= 1$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),\ \ n = 0$$

定常状態で微分値が0, 確率の総計は1になること

から, $P_n = P_0(\lambda/\mu)^n = (\mu-\lambda)(\lambda^n/\mu^{n+1}),\ P_0 = 1-\rho$

処理中を含む行列の平均長 L は $L = \dfrac{\rho}{1-\rho}$, 待行列は

$L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$、$\rho = \lambda/\mu$ を処理率、サービス率等と呼ぶ。

待ち時間期待値 T は $T = \dfrac{1}{\mu-\lambda} = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$,

純粋待ち時間は$T_q = T - \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

<例1>$\lambda = 6$人/時間、$\mu = 7.5$人/時間、窓口は一つ。

$\rho = 6/7.5 = 0.8$、$T = \dfrac{1}{7.5(1-0.8)} = \dfrac{1}{1.5}$時間$= 40$分

$L = T*\lambda = \dfrac{6}{1.5} = 4$人, $L_q = L*\rho = 4*0.8 = 3.2$人

$T_q = T*\rho = 40*0.8 = 32$分

<例2>窓口は一つで処理能力が二倍になった場合

$\lambda = 6,\ \mu = 7.5*2 = 15.0,\ \rho = 6/15 = 0.4,$

$L = 0.40/(1-0.4) = 0.67$人, $L_q = L*0.4 = 0.27$人

$T = 1/(1-0.4)/15 = 1/9$時間$= 6.67$分

$T_q = T*0.4 = 2.67$分

このように、処理能力を2倍にした場合は、待ち行列が1/2よりはるかに小さくなる事が分かる(3.2 → 0.27)。

<例3>到着90人/時間、1人あたり処理0.5分、窓口1つ

$\lambda = 90/60 = 1.5$人/分, $\mu = 1/0.5 = 2.0$人/分

$\rho = 1.5/2.0 = 0.75$

$L = 0.75/(1-0.75) = 3.0$

$T = 1/2.0/0.25 = 2.0$分

$T' = L/\mu = 3.0/2.0 = 1.5$分

窓口が複数Sの場合($M/M/S$モデル)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1}\frac{1}{n!}\frac{\lambda^n}{\mu^n} + \frac{1}{S!}\frac{\lambda^S}{\mu^S}\frac{S\mu}{S\mu-\lambda}}$$

$$L_q = \frac{\lambda\mu\frac{\lambda^S}{\mu^S}}{(S-1)!(S\mu-\lambda)^2}P_0$$

$$L = L_q + \lambda/\mu$$

$$T_q = \frac{\mu\frac{\lambda^S}{\mu^S}}{(S-1)!(S\mu-\lambda)^2}P_0$$

S＝2 の場合(M/M/2)

$$\rho' = \frac{\lambda}{2\mu}, \qquad P_0 = \frac{1-\rho'}{1+\rho'},$$

$$L_q = \frac{2\rho'^3}{(1-\rho')^2} P_0 = \frac{2\rho'^3}{1-\rho'^2}$$

$$L = L_q + 2\rho' = \frac{2\rho'}{1-\rho'^2}$$

$$T_q = \frac{\rho'^2}{\mu(1-\rho'^2)}$$

$$T = T_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho'^2)}$$

＜例 4＞$M/M/2$, $\lambda = 6.0$人/分, $\mu = 7.5$人/分

$$\rho' = 6.0/(2*7.5) = 0.4$$

$$P_0 = \frac{1-\rho'}{1+\rho'} = \frac{0.6}{1.4} = \frac{3}{7} = 0.428\cdots \approx 0.43$$

$$L_q = \frac{2\rho'^3}{1-\rho'^2} = \frac{2*0.4^3}{1-0.4^2} = \frac{0.128}{0.84} = 0.15238\cdots \approx 0.152\text{人}$$

$$L = \frac{2\rho'}{1-\rho'^2} = \frac{2*0.4}{0.84} = 0.9523\cdots \approx 0.952\text{人}$$

$$T_q = \frac{\rho'^2}{\mu(1-\rho'^2)} = \frac{0.16}{7.5*0.84} = 0.02539\cdots \approx 0.025\text{分}$$

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho'^2)} = \frac{1}{7.5*0.84} = 0.1587\cdots \approx 0.16\text{分}$$

＜例 5＞$M/M/2$, $\lambda = 8.0$人/分, $\mu = 10$人/分

$$\rho' = 8.0/(2*10.0) = 0.4$$

$$P_0 = \frac{1-\rho'}{1+\rho'} = \frac{0.6}{1.4} = \frac{3}{7} = 0.428\cdots \approx 0.43$$

$$L_q = \frac{2\rho'^3}{1-\rho'^2} = \frac{2*0.4^3}{1-0.4^2} = \frac{0.128}{0.84} = 0.15238\cdots \approx 0.152\text{人}$$

$$L = \frac{2\rho'}{1-\rho'^2} = \frac{2*0.4}{0.84} = 0.9523\cdots \approx 0.952\text{人}$$

$$T_q = \frac{\rho'^2}{\mu(1-\rho'^2)} = \frac{0.16}{10.0*0.84} = 0.0190\cdots \approx 0.02\text{分}$$

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho'^2)} = \frac{1}{10.0*0.84} = 0.1190\cdots \approx 0.12\text{分}$$

窓口処理能力、窓口数の影響比較

	例1	例2	例4
λ	6.0	6.0	6.0
μ	7.5	15.0	7.5
ρ	0.8	0.4	0.8
S	1	1	2
ρ'	x	x	0.4
P_0	0.200	0.600	0.430
Lq	3.200	0.270	0.152
L	4.000	0.670	0.952
Tq	32.000	2.670	0.025
T	40.000	6.670	0.159