リサージュ図形(Lissajous' curves)について

オッシロスコープの横軸に鋸歯状波、縦軸に正弦波を入力し、タイミングを調整すれば、正弦波の図が現れる(図A)。
横軸の鋸歯状波を正弦波に変えたら図 B,Cのような図が現れる。計算するには t を補助変数と考え、順次変化させて (x,y) の座標を図示すれば得られる。

図A

$x = t$

$y_1 = a \sin 2\pi m t$

$y_2 = b \sin 2\pi n t$

$a = b = 1,$

$m = 1, n = 2$

図 B

$x = a \sin 2\pi m t = y_1$

$y = b \sin 2\pi n t = y_2$

$a = b = 1$

$m = 1, n = 2$

図C (位相差があるとき)

$x = a \sin 2\pi m t$

$y = b \sin(2\pi n t + \pi / 6)$

$a = b = 1$

$m = 1, n = 2$

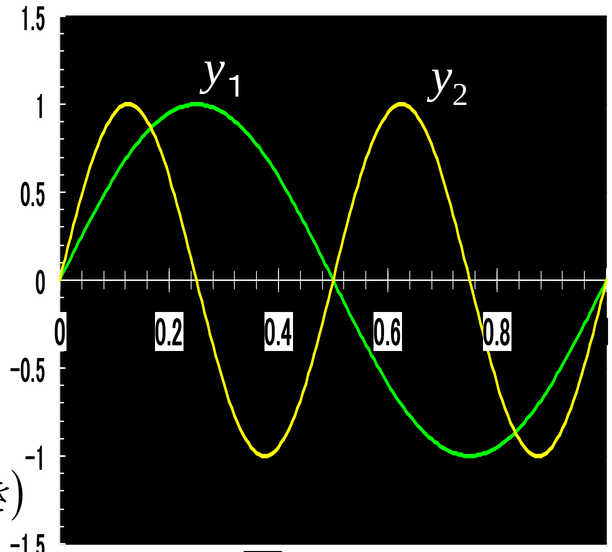


図 A

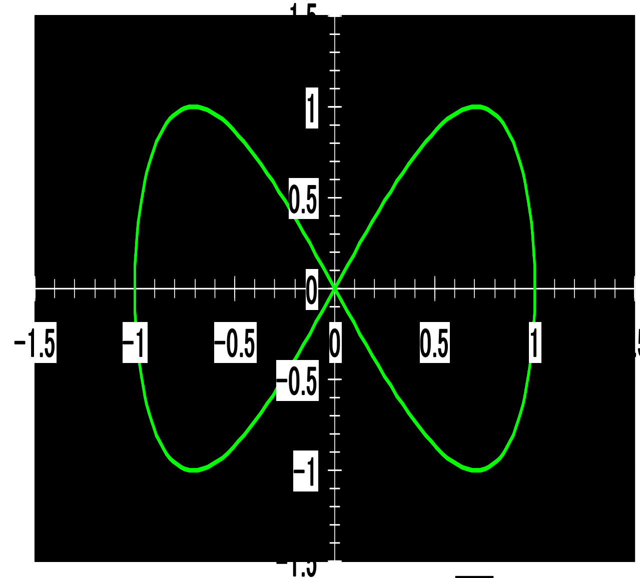


図 B

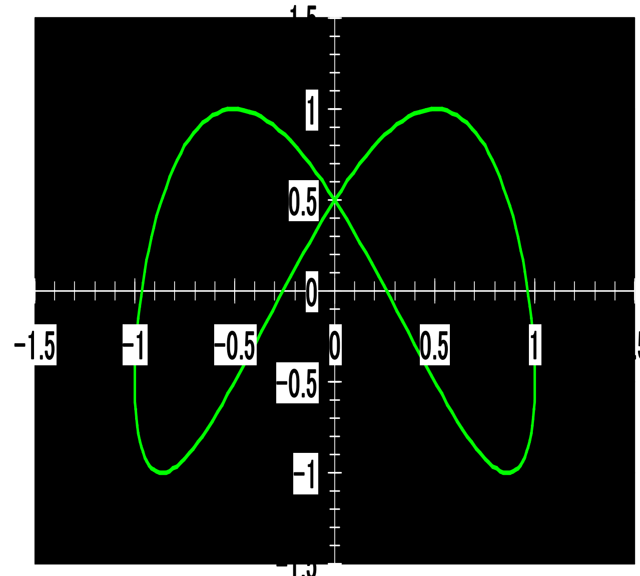


図 C

リサージュ図形から縦横の周波数比と位相差を求める方法(周波数比)

縦横の周波数比は、縦(y の正方向または負方向のうち大きい方)に現れる山の数と横(xについて同じ)に現れる山の数との比になる。右図では2対1である。図Dでは縦の山の数が上側では一つに見えるがこれは二つが重なっているのである。図A→B→Cと位相変化に従い変化したものと見れば納得が行くであろう。下側は分かれているのでこれから二とする。原則として山の数は、上下、左右でそれぞれ同じである。
（位相差については次頁）

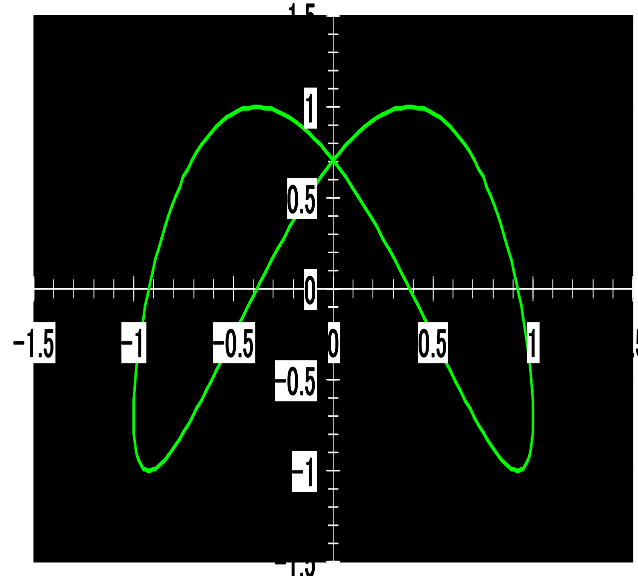


図 D

図 B

$$x = \sin\omega t$$
$$y = \sin 2\omega t$$

図D

$$x = \sin\omega t$$
$$y = \sin(2\omega t + \pi/4)$$

図E

$$x = \sin\omega t$$
$$y = \sin(2\omega t + \pi/2)$$

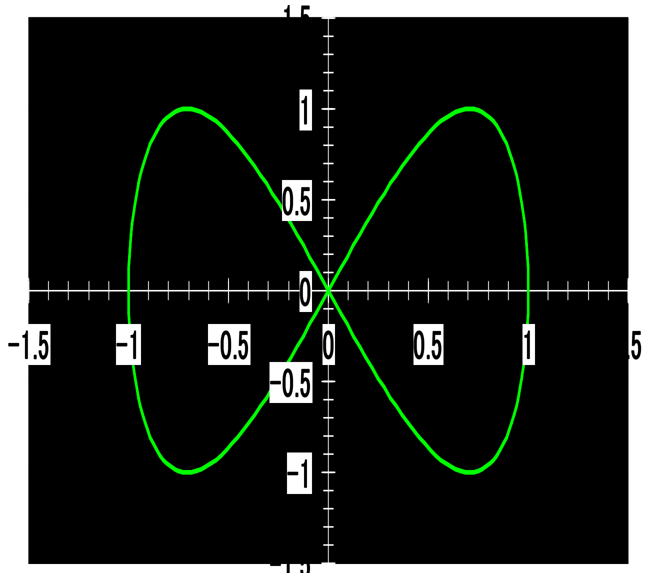
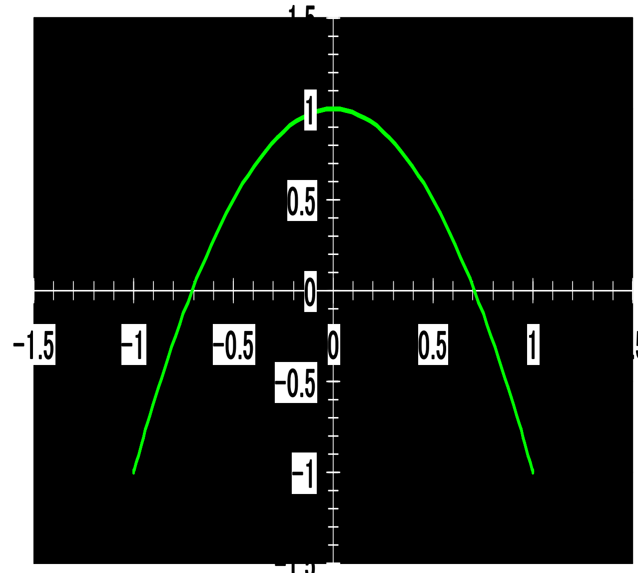


図 B



上で二つの山が重なっている。図 E

リサージュ図形から縦横の周波数比と位相差を求める方法(位相差)

一般式としては、$x = a\sin(m\omega t + \alpha)$

$y = b\sin(n\omega t + \beta)$

であるが、実は、図が与えられたとすると、どこが$t = 0$か不明である。そこで、$\alpha = 0$, または、$\beta = 0$ のいずれかである場合を考える。

$(1)\alpha = 0$ の場合

$x = a\sin m\omega t, x = 0$ のとき、$t = k\pi / m\omega, k = \pm 0,1,2,3\cdots$

$y = b\sin(n\omega t + \beta)$、$x = 0 \to t = 0$で、$y = y_0$と置く。

$$y_0 = b\sin\beta \to \beta(=\text{位相差}) = \sin^{-1}\left(\frac{y_0}{b}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{x = 0\text{での}y\text{の値}}{y\text{の最大値}}\right)$$

$(2)\beta = 0$のとき、同様にして、

$$x_0 = a\sin\alpha \to \alpha(=\text{位相差}) = \left|\sin^{-1}\left(\frac{x_0}{a}\right)\right| = \left|\sin^{-1}\left(\frac{y = 0\text{での}x\text{の値}}{x\text{の最大値}}\right)\right|$$

図 B

$(1)\alpha = 0 \to \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)\right| = 0$

$(2)\beta = 0 \to \alpha = \left|\sin^{-1}\left(\pm\frac{0}{1}\right)\right| = 0$

絶対値が最小となるのをとる。

位相差$= 0$

(原点を通る場合は位相差$= 0$)

図 D

$(1)\alpha = 0 \to \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{0.707}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{4}$

$(2)\beta = 0 \to \alpha = \left|\sin^{-1}\left(\pm\frac{0.383}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{8}$

この場合、$x_0 = \pm 0.9\cdots$もあるが

絶対値小さい方をとって$\to \frac{\pi}{8}$

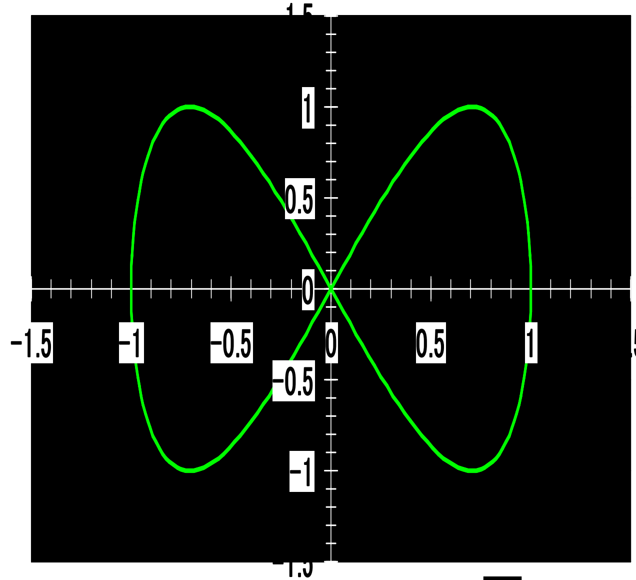


図 B

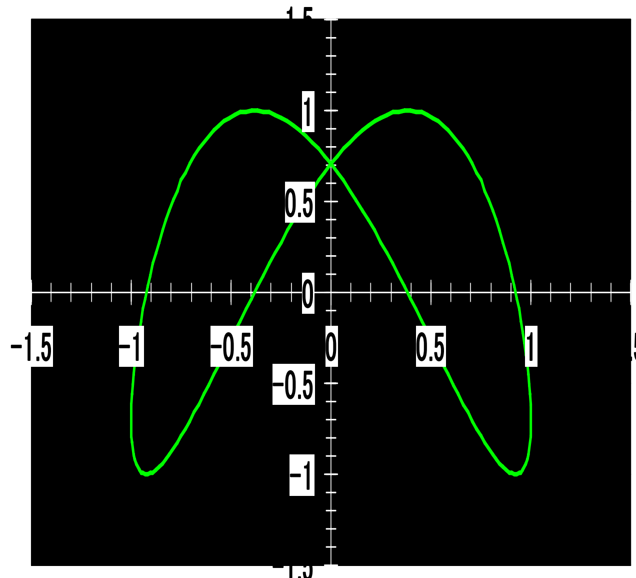


図 D

入力

x=sin nωt

y=sin nωt

n=正整数

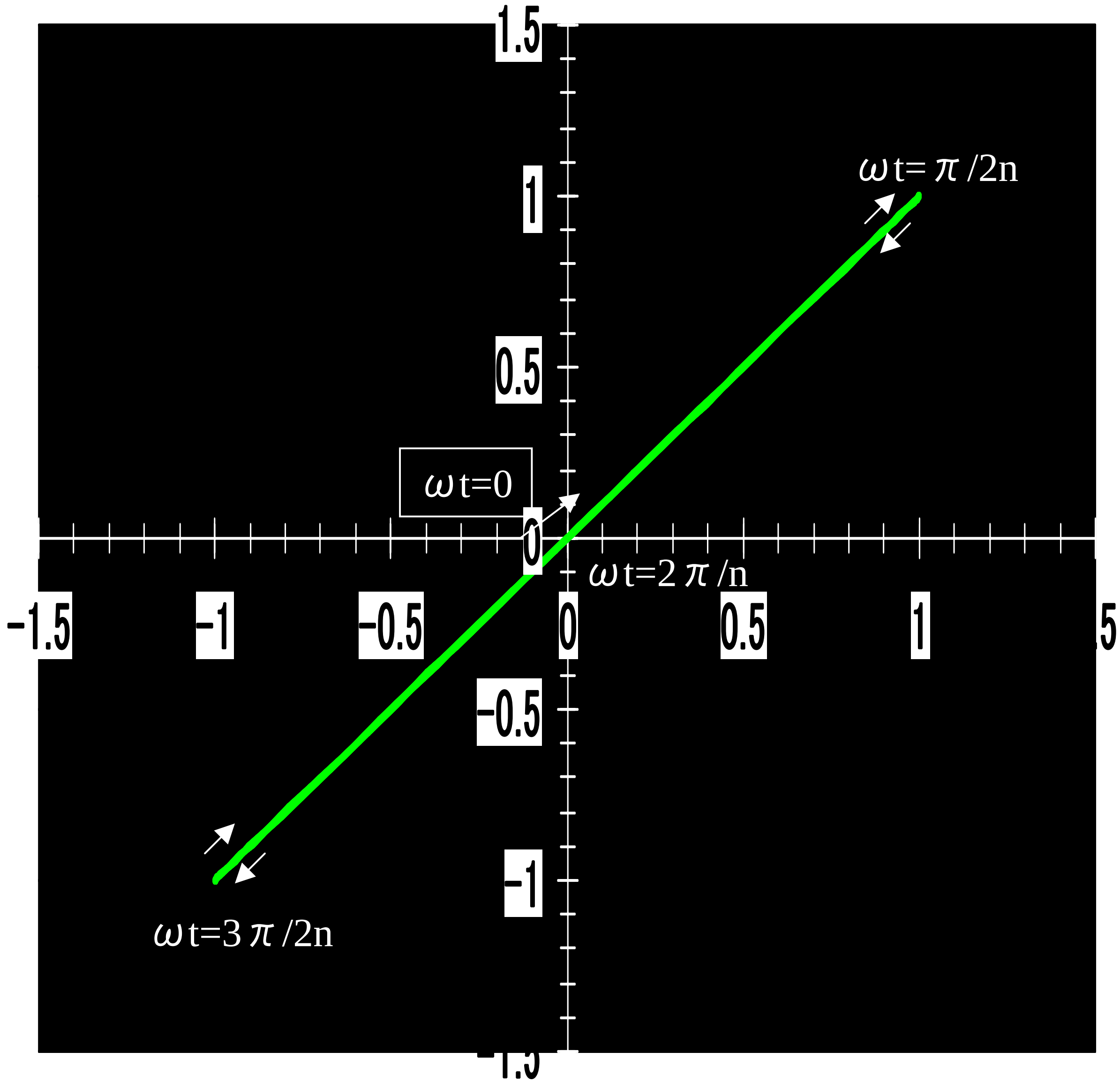
Fy : Fx= 1対1、

$(1)\alpha = 0 \rightarrow \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)\right| = 0$

$(2)\beta = 0 \rightarrow \alpha = \left|\sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)\right| = 0$

位相差 = 0

(原点を通る場合は位相差 = 0)



入力

x=sin nωt

y=sin(nωt+π/2)

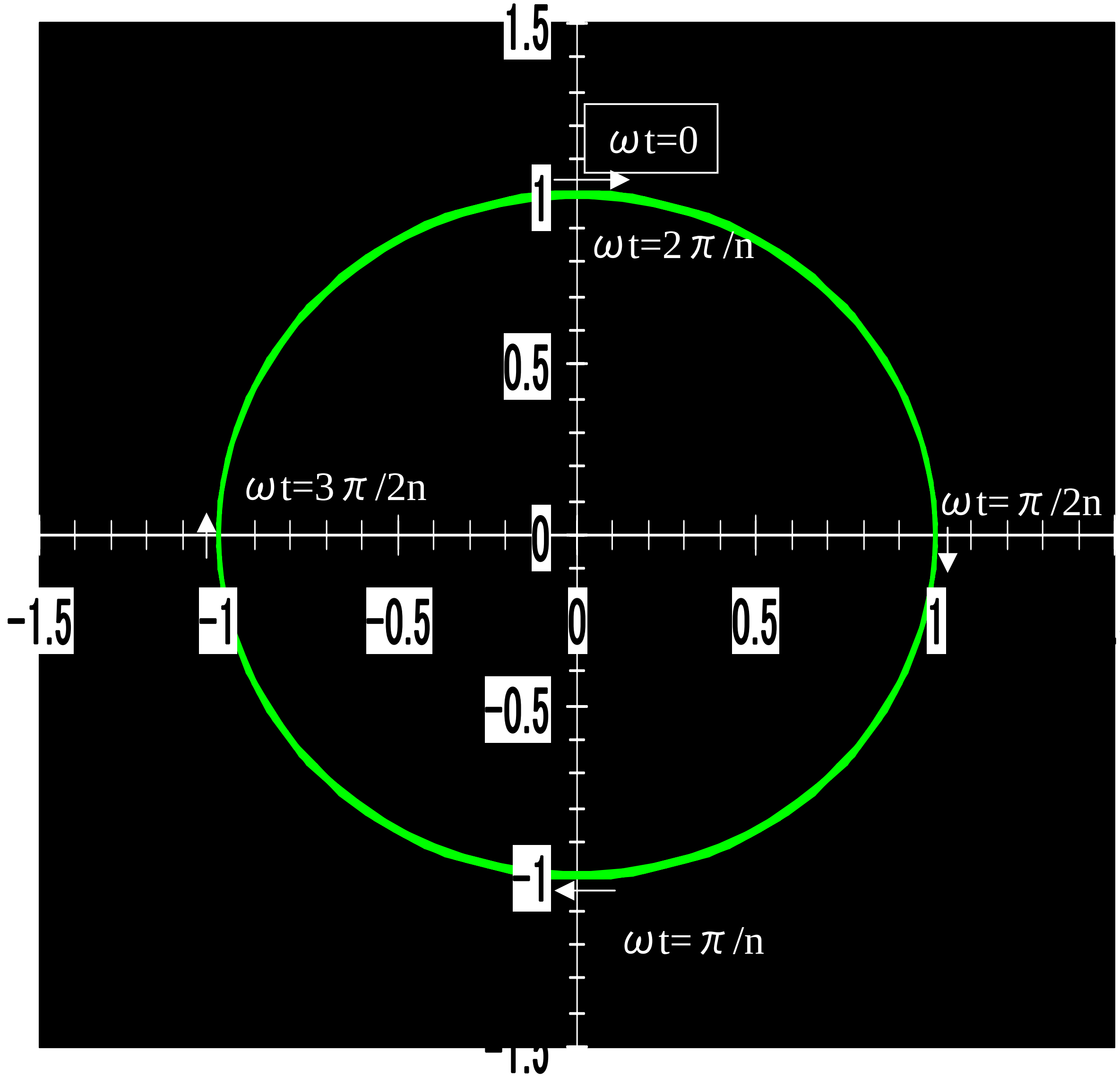
n=正整数

Fy : Fx= = 1対1、

$$(1)\alpha = 0 \rightarrow \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{\pm 1}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$(2)\beta = 0 \rightarrow \alpha = \left|\sin^{-1}\left(\frac{\pm 1}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{位相差} = \frac{\pi}{2}$$



入力

x=sin nωt

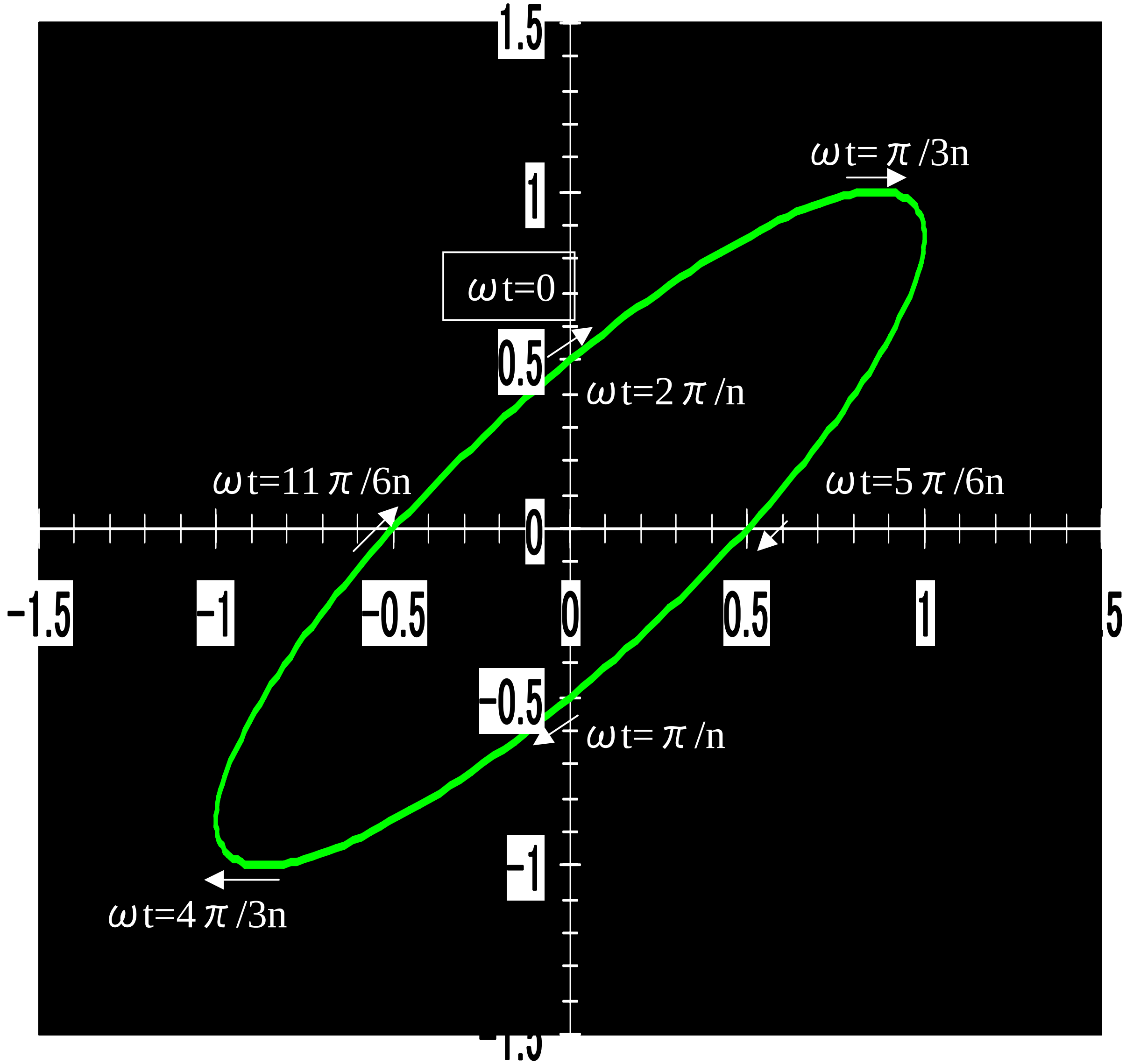
y=sin(nωt+π/6)

n=正整数

Fy : Fx= 1対1、

$$(1)\ \alpha = 0 \rightarrow \beta = \left| \sin^{-1}\left(\frac{\pm 0.5}{1} \right) \right| = \frac{\pi}{6}$$

$$(2)\ \beta = 0 \rightarrow \alpha = \left| \sin^{-1}\left(\frac{\pm 0.5}{1} \right) \right| = \frac{\pi}{6}$$



入力

x=sin ωt

y=sin 3ωt

Fy : Fx= 3対1、

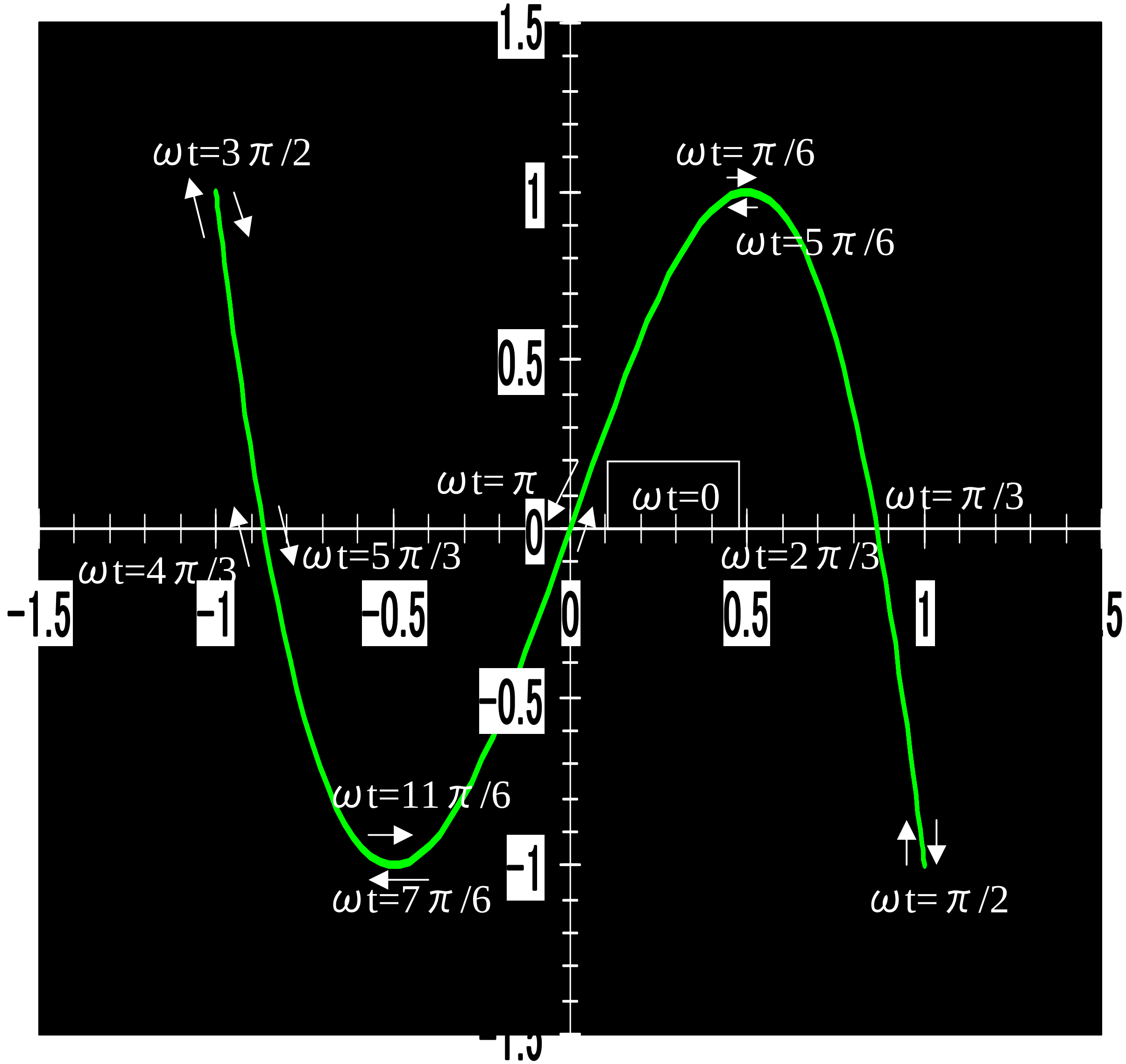
この後の図と比較すると、二つの山が重なっていることがわかる。

$$(1)\alpha = 0 \rightarrow \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)\right| = 0$$

$$(2)\beta = 0 \rightarrow \alpha = \left|\sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)\right| = 0$$

位相差 $= 0$

(原点を通る場合は位相差 $= 0$)



入力

x=sin ωt

y=sin (3ωt+π/6)

Fy : Fx= 3対1、

$$(1)\ \alpha = 0 \rightarrow \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{\pm 0.5}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{6}$$

$$(2)\ \beta = 0 \rightarrow \alpha = \left|\sin^{-1}\left(\pm\frac{0.17}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{18}$$

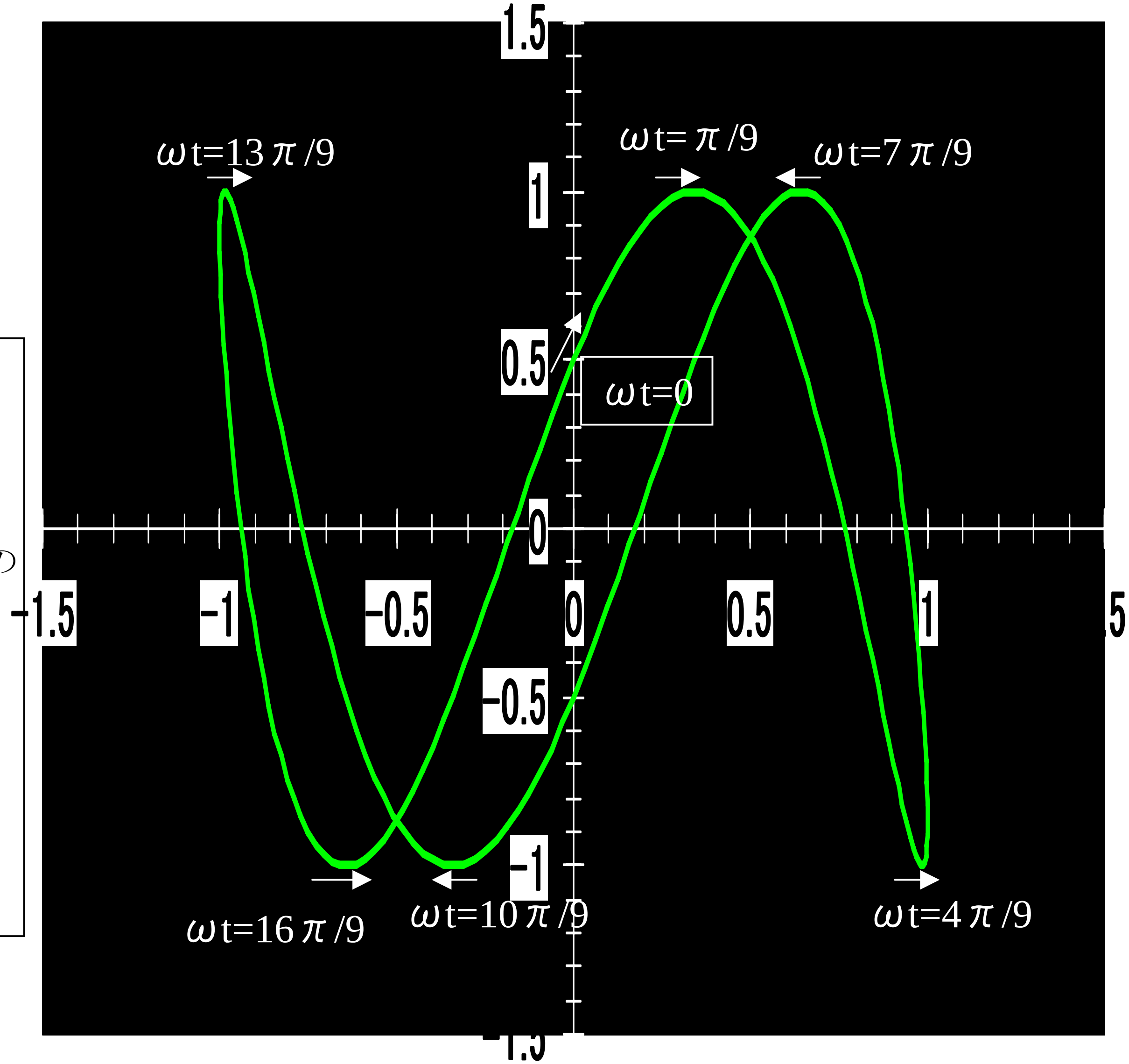
絶対値がそれぞれの最小となるのをとって、

位相差 $= \frac{\pi}{6}$ 又は、$\frac{\pi}{18}$

$\frac{\pi}{18}$ のとき、

$$x = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{18}\right)$$

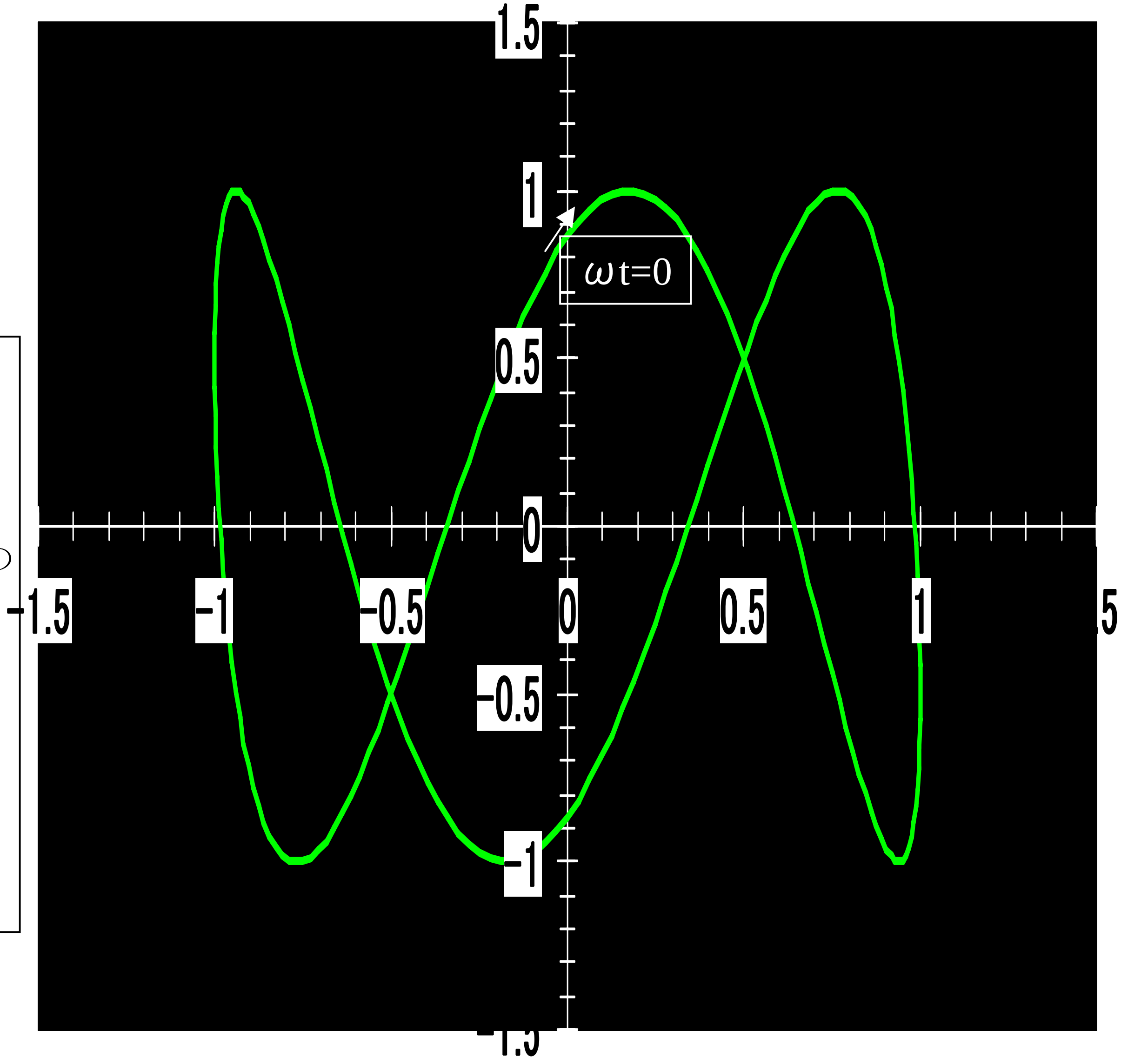
$$y = \sin 3\omega t$$



入力

x=sin ωt

y=sin (3ωt+π/3)



Fy : Fx= 3対1、

$$(1)\alpha = 0 \rightarrow \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{\pm 0.866}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{3}$$

$$(2)\beta = 0 \rightarrow \alpha = \left|\sin^{-1}\left(\frac{\pm 0.34}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{9}$$

絶対値がそれぞれの最小となるのをとって、

位相差 $= \frac{\pi}{3}$ 又は、$\frac{\pi}{9}$

$\frac{\pi}{9}$ のとき、

$$x = \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{9}\right)$$

$$y = \sin 3\omega t$$

入力

x=sin ωt

y=sin (3ωt+π/2)

Fy : Fx= 3対1、

$$(1)\ \alpha = 0 \rightarrow \beta = \left| \sin^{-1}\left(\frac{\pm 1}{1}\right) \right| = \frac{\pi}{2}$$

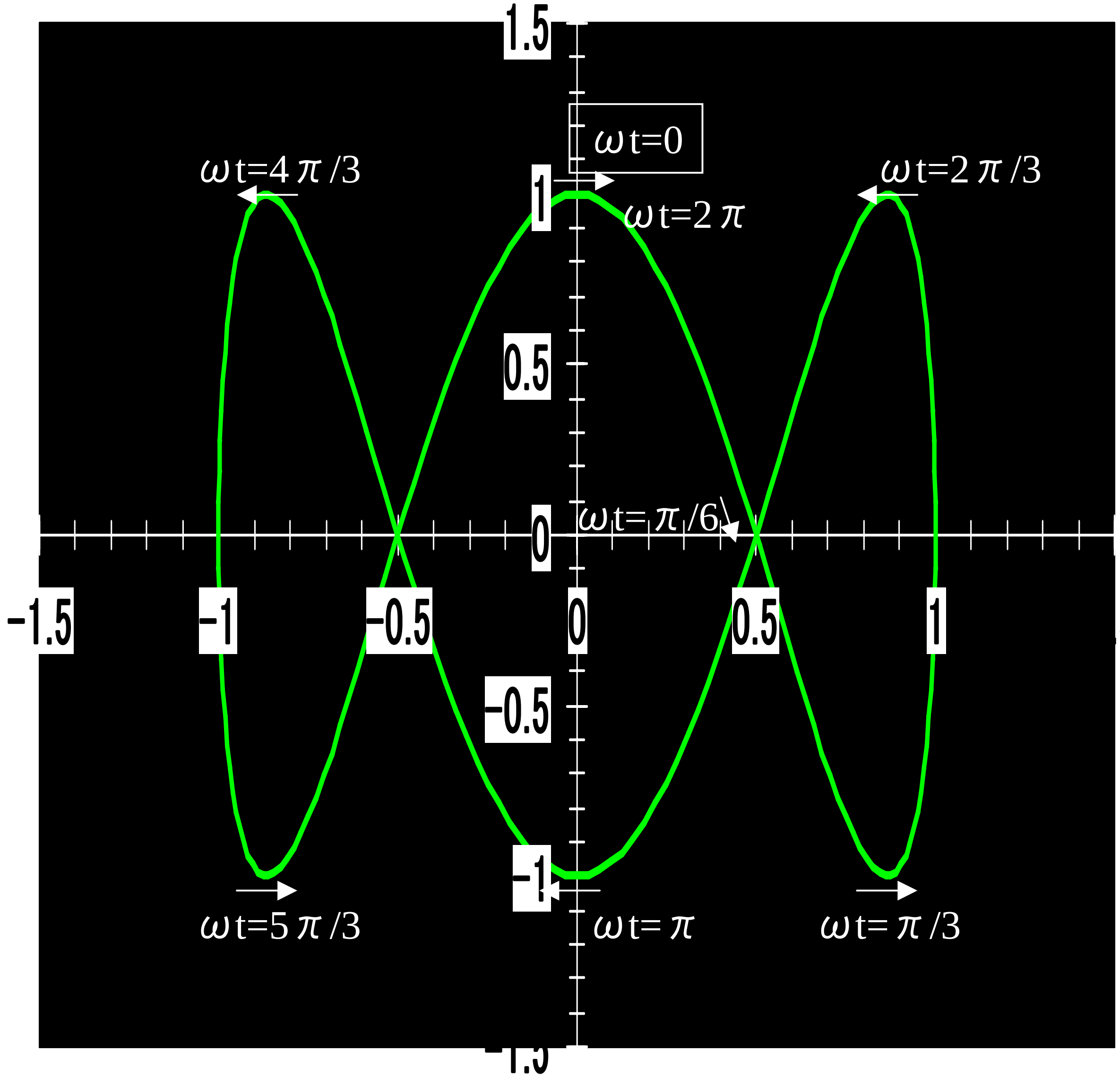
$$(2)\ \beta = 0 \rightarrow \alpha = \left| \sin^{-1}\left(\pm\frac{0.5}{1}\right) \right| = \frac{\pi}{6}$$

位相差 $= \frac{\pi}{2}$ 又は、$\frac{\pi}{6}$

$\pi/6$ のとき、

$$x = \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = \sin 3\omega t$$



入力

x=sin 2ωt

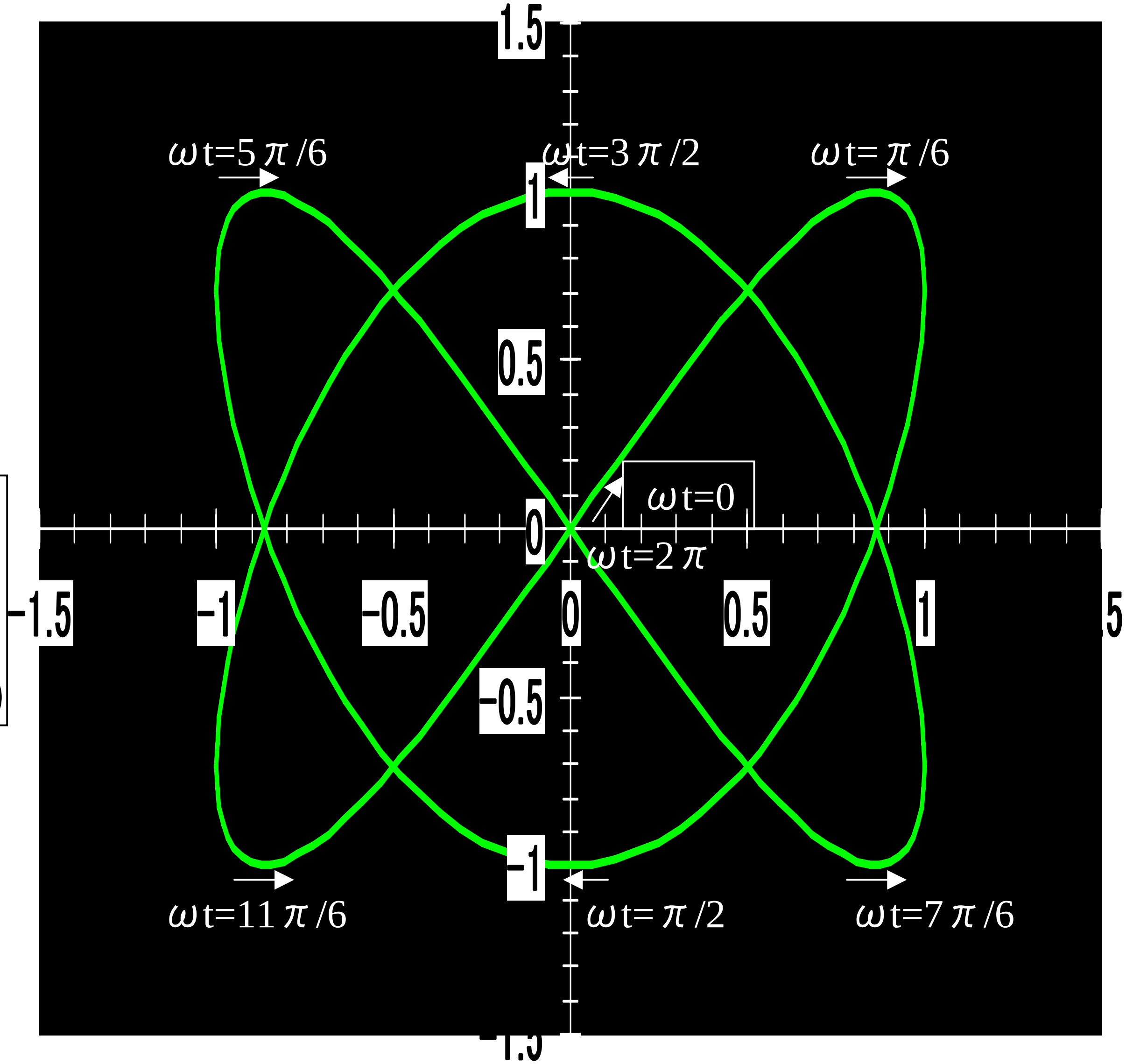
y=sin 3ωt

Fy : Fx= 3対2、

$$(1)\ \alpha = 0 \rightarrow \beta = \left| \sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) \right| = 0$$

$$(2)\ \beta = 0 \rightarrow \alpha = \left| \sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) \right| = 0$$

位相差$=0$、(原点を通っている。)



入力

x=sin 2ωt

y=sin (3ωt+π/6)

Fy : Fx= 3対2、

$$(1)\alpha = 0 \to \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{\pm 0.5}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{6}$$

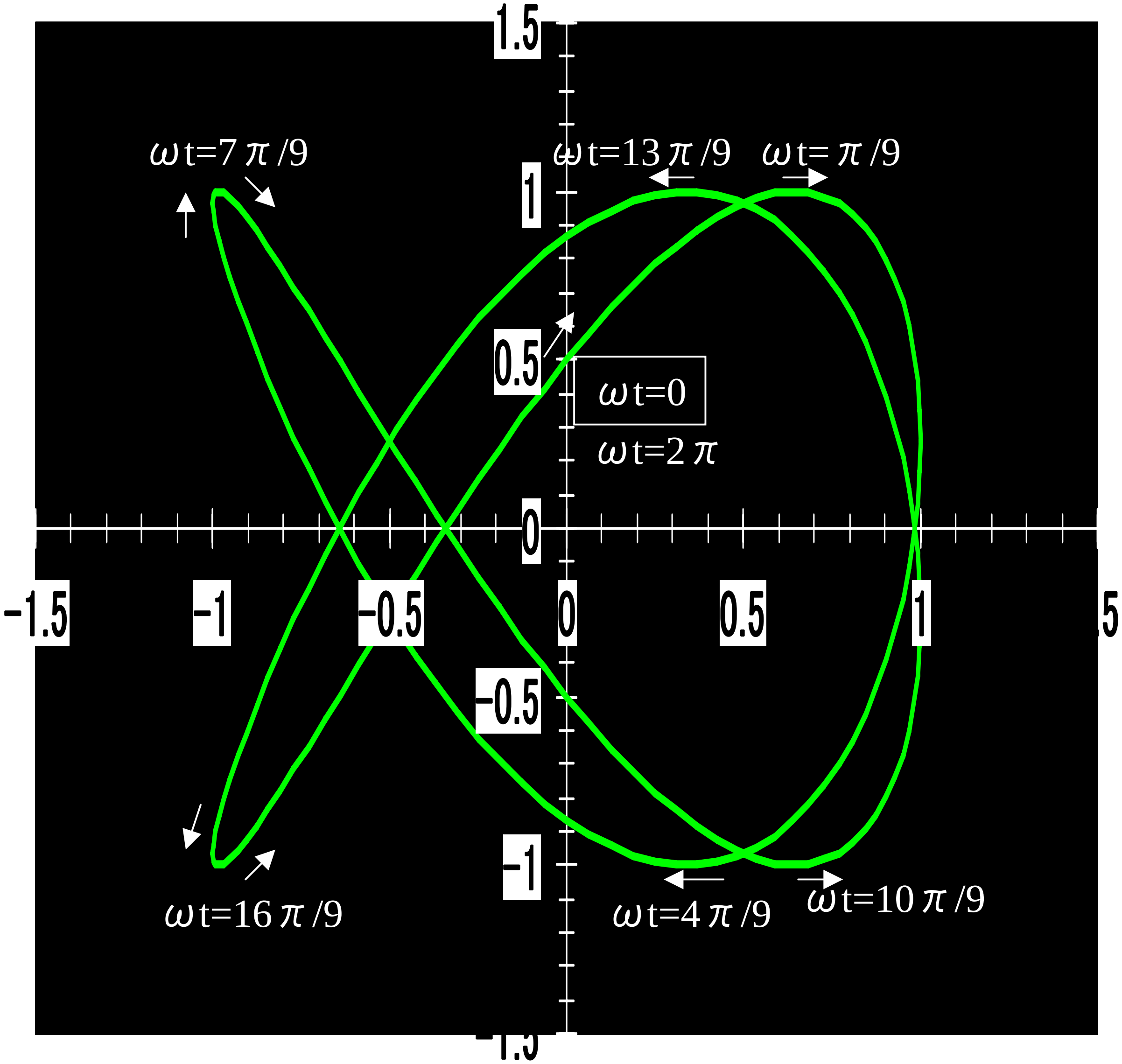
$$(2)\beta = 0 \to \alpha = \left|\sin^{-1}\left(-\frac{0.34}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{9}$$

位相差$=\frac{\pi}{6}$ 又は、$\frac{\pi}{9}$

$\pi/9$ のとき、

$$x = \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{9}\right)$$

$$y = \sin 3\omega t$$



入力

x=sin 2ωt

y=sin (3ωt+π/4)

Fy : Fx= 3対2、

前後の図と比較すると、二つの山が重なっていることがわかる。

$$(1)\alpha = 0 \rightarrow \beta = \left|\sin^{-1}\left(\frac{\pm 0.71}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{4}$$

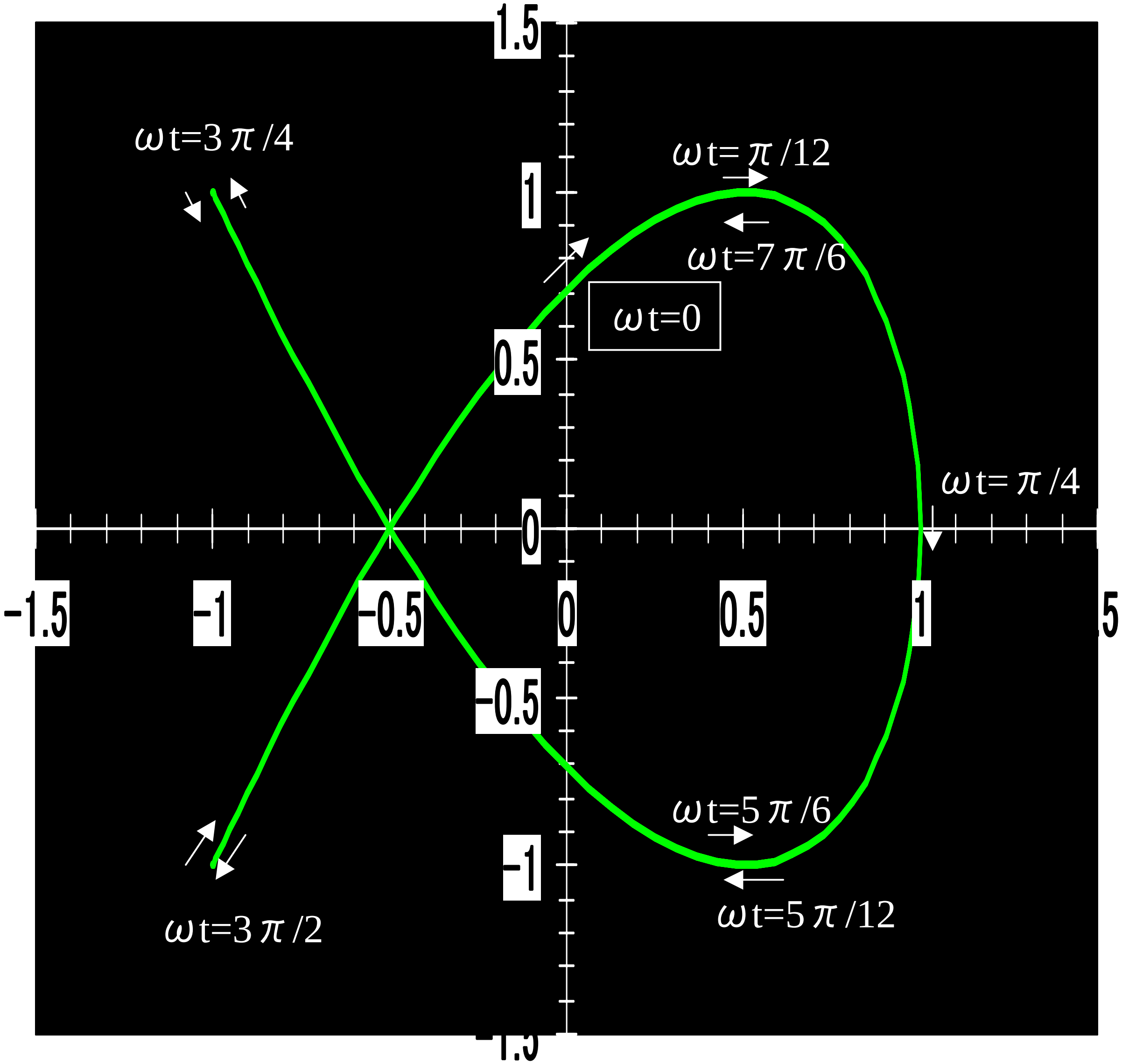
$$(2)\beta = 0 \rightarrow \alpha = \left|\sin^{-1}\left(-\frac{0.5}{1}\right)\right| = \frac{\pi}{6}$$

位相差 $= \frac{\pi}{4}$ 又は、$\frac{\pi}{6}$

$\pi/6$ のとき、

$$x = \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = \sin 3\omega t$$



入力

$x = \sin 2\omega t$

$y = \sin(3\omega t + \pi/3)$

Fy : Fx= 3対2、

$(1)\ \alpha = 0 \rightarrow \beta = \left|\sin^{-1}\left(\dfrac{\pm 0.5}{1}\right)\right| = \dfrac{\pi}{6}$

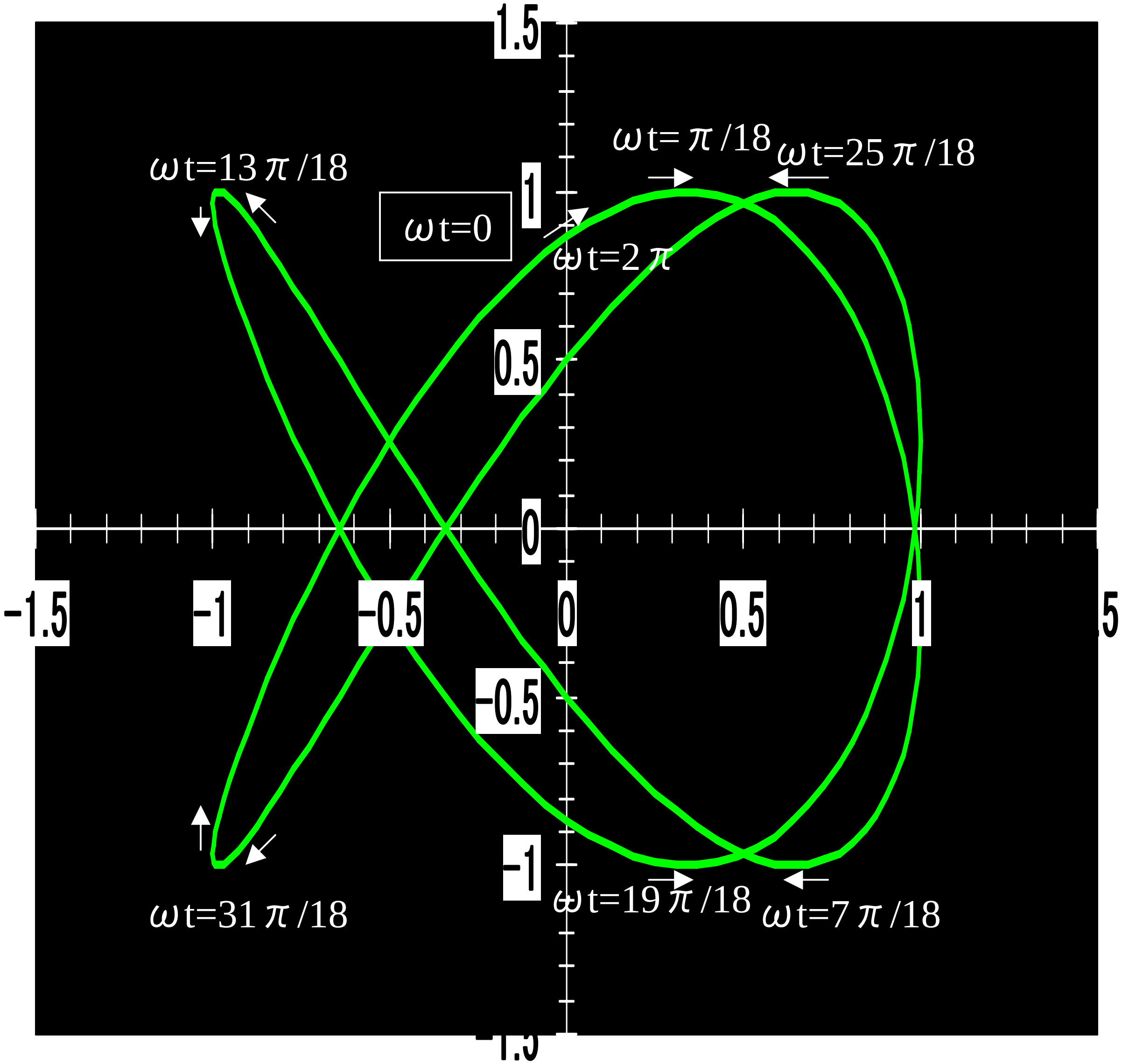
$(2)\ \beta = 0 \rightarrow \alpha = \left|\sin^{-1}\left(-\dfrac{0.34}{1}\right)\right| = \dfrac{\pi}{9}$

位相差 $= \dfrac{\pi}{6}$ 又は、$\dfrac{\pi}{9}$

$\pi/9$ のとき、

$x = \sin\left(2\omega t - \dfrac{\pi}{9}\right)$

$y = \sin 3\omega t$



入力

x=sin 2ωt

y=sin (3ωt+π/2)

(図はp.11のものと同じ)

Fy : Fx= 3対2、

$(1)\,\alpha=0\rightarrow\beta=\left|\sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)\right|=0$

$(2)\,\beta=0\rightarrow\alpha=\left|\sin^{-1}\left(\frac{0}{1}\right)\right|=0$

位相差＝0…入力と不一致

$x=2\omega t,\ y=3\omega t$

最小値でなく最大値をとれば、

$(1)\,\alpha=0\rightarrow\beta=\left|\sin^{-1}\left(\pm\frac{1}{1}\right)\right|=\frac{\pi}{2}$

$(2)\,\beta=0\rightarrow\alpha=\left|\sin^{-1}\left(\pm\frac{0.866}{1}\right)\right|=\frac{\pi}{3}$

$x=\sin\left(2\omega t\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$y=\sin 3\omega t$