カルノーマップと論理演算（その２ 和積形）

カルノーマップには、その１、積和形のほかに和積形(いくつかの和を掛け合わせた形)

という形式もあるので、その解説を行う。この二者は、表現の違いだけで当然同じものを表している。

カルノーマップ法のうちには和積形と呼ばれるものがある。これは、論理演算の公式であるところの、$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$,　$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ を応用して要素の和をいくつか（カルノーサークルの数だけ）掛け合わせた形で表す方法である。
この方法は一言で言えば、カルノーマップの空白部全体を表現し,その否定をとれば、充実部に等しくなることを利用している。(以下 · を省略することあり)

2 変数の場合

例 1 -1

A \ B	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	
A		AB

例1–1で、空白の部分に着目する。
空白部全体は、$\overline{A}B + A\overline{B}$であり、残り部分である充実部はこれの否定になるはずであるから、$\overline{\overline{A}B + A\overline{B}}$。
さらに、$\overline{\overline{A}B + A\overline{B}} = \overline{\overline{A}B} \cdot \overline{A\overline{B}} = (A + \overline{B})(\overline{A} + B)$ として和積形が得られる。
この式を展開すれば、$X\overline{X} = 0$ に注意して
$(A + \overline{B})(\overline{A} + B) = A\overline{A} + AB + \overline{A}\,\overline{B} + B\overline{B} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$(積和形)
すなわち、$(A + \overline{B})(\overline{A} + B) = \overline{A}\,\overline{B} + AB$ であって、積和形でも和積形でも同じ内容を表すことがわかる。

2 変数の場合(続き)

例 1 -1

A \ B	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	
A		AB

例1−1を再掲した。この図を、空白部分の要素の否定で表すと、右上は、$\overline{\overline{A}B} = A + \overline{B}$ となる。左下は、$\overline{A\overline{B}} = \overline{A} + B$ となる。前頁と比較すれば、この二つを掛け算の形で表すと、和積形になることが分る。すなわち、$(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$となり、求める形が得られる。結論として、空白部について、$X \to \overline{X},\ \overline{X} \to X,$ 和 $\to$ 積、積 $\to$ 和に逆転させると、和積形が得られることが分かる。

例 1 -2

A \ B	0	1
0	1	
1		1

例1−1と例1−2とは1対1に対応しており、同じ内容を表している。

例1−2では、縦軸は A、横軸は Bを表し、縦軸上の 0は$\overline{A}$を、1はAを、横軸上の 0,1はそれぞれ$\overline{B}$、Bを表す。

表内部は（横軸 × 縦軸）が和集合の要素 として存在するときに 1を、存在しなければ無 記入にする。この図を 使って、上記と同様に、右上空白部は 、$A+\overline{B}$、左下空白部は、$\overline{A}+B$、この二つを積の形にすれば、 和積形として、$(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$が得られる。

例2

A＼B	0	1
0	1	1
1		

例2では、空白部分の論理式は、$A\overline{B}+AB=A$ であるから、1の存在する部分の合計は、この否定で、$\overline{A}$ となる。しいて和積形にすれば、$\overline{A\overline{B}+AB}=\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$ $\left\{=\overline{A}\right\}$となる。
図の上では、空白部が隣接している所をまず集約して A、つぎにこの否定をとれば $\overline{A}$ となる。
空白部で、肯定と否定、積と和を逆にして、$\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$ が得られる。これは、$\overline{A}+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}$ と変形でき、上記と同じ結果になる。すなわち、隣接部はまず和集合として集約した後、肯定と否定、積と和を逆転させる方が簡単になる。

例3

A＼B	0	1
0	1	
1	1	

例3では、空白部分の論理式は、$\overline{A}B+AB=B$ である。
1の存在する部分はこの否定で $\overline{B}$ が導かれる。
図の上では、空白部が隣接している所に着目し、まず集約すると、$\left(\overline{A}+A\right)B=B$ が得られる。ついで、これを否定すれば、$\overline{B}$ が得られる。
例3と同様に肯定と否定、和を積を逆転させると、
$\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$ $\left\{=\left(\overline{B}+A\right)\left(\overline{B}+\overline{A}\right)=\overline{B}\right\}$が得られる。

例4

A \ B	0	1
0	1	1
1	1	

例4では、空白部の論理式は、AB であるので、1の存在する部分はこの否定で、$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ となる。

図の上では、空白部に着目し、次のようにする。
肯定と否定を逆転させ,和と積を逆転させると、
空白部から、$\left(\overline{A} + \overline{B}\right)$ が得られる。これが、答えである。

例5

A \ B	0	1
0	1	1
1	1	1

例5では、空白部の論理式 は、0 であるから、1 の存在する部分はこの否定で 1 となる。

3 変数の場合

例6

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

例6のように3変数の場合は1変数(A)と2変数(BC)の組合せに分け、2変数(BC)の方の並べ方は、隣り合わせに並ぶ項は、1要素だけが異なるように並べる。
00 01 10 11 ではなく、図のように、
00 01 11 10 と並べる。なお、00 10 11 01 等も可能である。

例6で、空白部の論理式を隣接部分を括って表すと、
$(\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)+(ABC+AB\overline{C})=\overline{A}\overline{B}+AB$ であるが、1の存在する部分は、この否定で、
$\overline{\overline{A}\overline{B}+AB}=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ となる。

念のためこれから積和形を求めると、$A\overline{A}+A\overline{B}+\overline{A}B+B\overline{B}=A\overline{B}+\overline{A}B$ となる。これは、(その1) の積和形の例 6 の結果と合致する。

否定と肯定および積と和とをそれぞれ逆転させ集約した空白部に着目すると実線部は
$A+B$、破線部は、$\overline{A}+\overline{B}$、したがって、$(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ $\{=A\overline{B}+\overline{A}B\}$ となる。
集約しない形では、個々の空白部ごとの、肯定と否定、和と積との逆転後の積として、
$(A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$ と表すこともできる。

例7

BC / A	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

例7では、空白部の論理式は、$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}+AB\overline{C}$ であるから、1が存在する部分はこの否定で、$(A+B)(\overline{A}+\overline{B}+C)$ $\left\{=A\overline{B}+\overline{A}B+(A+B)C\right\}$ と和積形で簡略化される。

肯定と否定、積と和とをそれぞれ逆転させて、空白部を記述すると赤線部が、$A+B$、青線部が、$\overline{A}+\overline{B}+C$、であるから、集約して、直接的に、$(A+B)(\overline{A}+\overline{B}+C)$ と書ける。
個々の空白部ごとに、積と和、否定と肯定とを逆転表現し、それらを掛け合わせて、$(A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$とすることもできる。

例8

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	1	

例8では、空白部の論理式 は、$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C}$ であるから、1が存在する部分は
この否定で、$(A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)$となる。

念のため、積和形を求 めてみる。
この掛け算を実行して みると、$X\overline{X}=0,\ X+\overline{X}=1\ XX=X,\ X+X=X$,に注意して、
$\therefore (A+B)(\overline{A}+\overline{B})+C(A+B+\overline{A}+\overline{B})+CC = C+A\overline{B}+\overline{A}B$
と簡略化される。

空白部に着目し、積と 和、否定と肯定を逆転 させると、直接的に
$(A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)$ と表すことができる。

例9 4変数の例

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	
11	1	1	1	1
10				

4変数A、B、C、Dの論理式、

$$F(A,B,C,D)=\sum(1,5,7,12,13,14,15)$$

$$=0001+0101+0111+\cdots$$

を左図のカルノーマップを参考にして最も簡単化した論理式の正誤選択問題。(平成16年度電気電子一次)

例9では、空白部について、いきなり、肯定と否定、積と和の逆転を利用して和積形を求めてみる。

赤実線部は、$(\overline{A}+B)$、空色実線部と空色破線部が隣接とみなせるが、この正方形では、$(A+D)$、黒破線部が、$(A+B+\overline{C})$。したがって、

$F(A,B,C,D)=(\overline{A}+B)(A+D)(A+B+\overline{C})$となる。積和形に変換してみると、

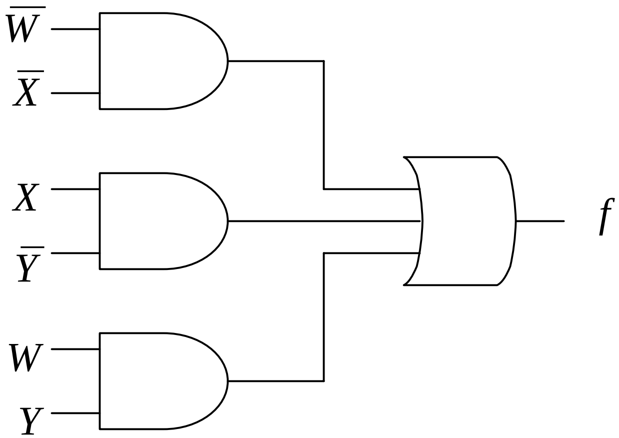
$$(\overline{A}+B)(A+D)(A+B+\overline{C})=(\overline{A}D+BD+BA)(A+B+\overline{C})$$

$$=\overline{A}BD+\overline{A}\,\overline{C}D+ABD+BD+B\overline{C}D+AB+AB\overline{C}$$

$$=AB(1+\overline{C}+D)+BD(1+A+\overline{C})+\overline{A}\,\overline{C}D=AB+BD+\overline{A}\,\overline{C}D$$

となり、(その1)の例9の積和形で求めた結果と一致する。

例10　3変数



左図の論理回路の出力 f をカルノーマップに展開すると下表のようになる。これを和積形に集約せよ。
(関連　平成21年度電気一次)

Y / WX	0	1
00	1	1
01	1	
11	1	1
10		1

$W+\overline{X}+\overline{Y}$

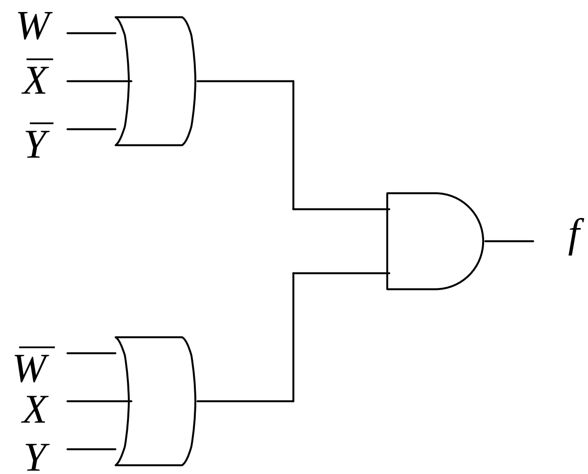
$\overline{W}+X+Y$

$f=\overline{W}\,\overline{X}+X\overline{Y}+WY$
をカルノーマップ上に展開すると左図のようになる。

空白部が少ないので和積形が便利である。
肯定と否定、和と積を逆転させて空白部をまとめると、
黒実線部が、$W+\overline{X}+\overline{Y}$、
黒破線部が、$\overline{W}+X+Y$

$f=\left(W+\overline{X}+\overline{Y}\right)\left(\overline{W}+X+Y\right)$

論理回路では右図になる。



例11　4変数

WZ \ YX	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1			1

$\overline{W}\cdot\overline{Y}\cdot\overline{X}$

$Y\cdot\overline{X}$

$Z\cdot\overline{Y}\cdot X$

$Z\cdot\overline{X}$

$W\cdot\overline{Y}\cdot\overline{X}$

$F(X,Y,Z,W)$
$=\overline{W}\cdot\overline{Y}\cdot\overline{X}+Z\cdot\overline{Y}\cdot X+W\cdot\overline{Y}\cdot\overline{X}+Z\cdot\overline{X}+Y\cdot\overline{X}$

(20年度電気電子一次)

カルノーマップは左図 のようになる。
積和形で集約すると、 $F=\overline{X}+\overline{Y}Z$ となる。
(既出、積和形)

WZ \ YX	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1			1

$W+Z+\overline{X}$

$\overline{Y}+\overline{X}$

$\overline{W}+Z+\overline{X}$

$\boxed{Z+\overline{X}}$

右の計算を参考に、和　積形についての公式
$(X+Y)(X+\overline{Y})=X$
$(X+A)(X+B)=X+AB$ が得られる。

和積形でまとめると左 図を参考にして、
$(\overline{Y}+\overline{X})(W+Z+\overline{X})(\overline{W}+Z+\overline{X})$
$=(\overline{Y}+\overline{X})(Z+\overline{X})$となる。｛これは、
$\overline{X}(1+\overline{Y}+Z)+\overline{Y}Z=\overline{X}+\overline{Y}Z$ と変形可。｝
あるいは、図の赤実線 と赤破線は正方形
で上下に隣接している とも見てよいから、
$(Z+\overline{X})$これに黒実線部分 $(\overline{Y}+\overline{X})$との積を
取り、$(\overline{Y}+\overline{X})(Z+\overline{X})$ となる。これは、
$(W+Z+\overline{X})(\overline{W}+Z+\overline{X})$
$=W\overline{W}+(Z+\overline{X})^2+(W+\overline{W})(Z+\overline{X})$
$=(Z+\overline{X})+(Z+\overline{X})=(Z+\overline{X})$からもいえる。

和積形で集約し積和形に簡単化

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11	1	1	1	1
10	1			

$A+B+C$

$A+C+D$

$A+\overline{B}+D$

$\overline{A}+B+\overline{C}$

$\overline{A}+B+\overline{D}$

和積形で集約した上、 積和形で簡単化することを試みる。次の公 式がよく使われる。

1. $(X+Y)(X+\overline{Y})=X$

$\because (X+Y)(X+\overline{Y})=XX+X(Y+\overline{Y})+Y\overline{Y}$

$=X+X+0=X$

2. $(X+Y)(X+Z)=X+YZ$

$\because (X+Y)(X+Z)=XX+X(Y+Z)+YZ$

$=X(1+Y+Z)+YZ=X+YZ$

3. $X(1+Y)=X, \because 1+Y=1$

4. $X\overline{X}=0, XX=X, X+X=X$

黒実線部は、$(A+B+C+D)(A+B+C+\overline{D})=A+B+C$

黒破線部は、$(A+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D)=A+C+D$

この二つで、$(A+C+B)(A+C+D)=A+C+BD\cdots$①

同様にして、赤実線部 は、$\overline{A}+B+\overline{C}$, 赤破線部は、 $\overline{A}+B+\overline{D}$

この二つで、 $\overline{A}+B+\overline{C}\,\overline{D}\cdots$②

青実線部二つで、 $A+\overline{B}+D\cdots$③

以上総合して、$(A+C+BD)(\overline{A}+B+\overline{C}\,\overline{D})(A+\overline{B}+D)$、積和形にするには以 下のように展開する。

$=(A+C+BD)(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}D+AB+BD+A\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D})$

$=AB+ABD+A\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}CD+ABC+BCD+\overline{A}BD+ABD+BD$

$=(AB+ABC+ABD)+(A\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D})+(\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}CD)+(\overline{A}BD+ABD+BD+BCD)$

$=AB(1+C+D)+BD(1+\overline{A}+A+C)+A\overline{C}\,\overline{D}(1+\overline{B})+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}CD=AB+BD+A\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}CD$