カルノーマップと論理演算（その１）

複雑な論理演算式を簡単化するには、諸公式を活用して式の変形を重ねる方法があるが,かなりの演算テクニックを要する。

カルノーマップの利用によってそれらがかなり緩和されるので、その解説を行う。

その１は積和形を扱う

論理演算を図式的に行う方法の一つとしてカルノーマップ法がある。
これは、基本的に論理演算の公式であるところの $X+\overline{X}=1$, $X(1+Y)=X$, $X+X=X, XX=X$, $X\overline{X}=0$、$X(\overline{Y}+Y)=X\cdot 1=X, 1+1=1$, $1\cdot 1=1, 1+0=1$, $1\cdot 0=0$ などを利用して、表の上で見やすく表現し、集約する方法であり、ベル研究所のモーリス　カルノー（*Maurice Karnaugh*）の発明によるとされている。(+は和∨、積は共有∧を表す)

2 変数の場合

例 1 -1

A \ B	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\overline{B}$	
A		AB

例1−1では、縦軸は A、横軸は B を表し、表内部は「横軸×縦軸」が和集合の要素として存在するときにその値を、存在しなければ無記入にする。
従って、例 1-1の表す論理式は、

$\overline{A}\,\overline{B}+AB$

であり、これは、これ以上簡単にはならない。

2 変数の場合(続き)

例 1 -1

$\begin{matrix} & B \\ A & \end{matrix}$	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	
A		AB

例 1–1 を再掲した。この図を、例 1–2 のように、任意の変数Xについて、$X=1$、$\overline{X}=0$ という風に縦軸、横軸の表示を書き直し、さらに、表の中は、要素があれば 1 を、なければ無記入にすると、0 と 1 で表現した簡単化した図になる。

例 1 -2

$\begin{matrix} & B \\ A & \end{matrix}$	0	1
0	1	
1		1

例1–1と例 1–2とは 1 対 1 に対応しており、同じ内容を表している。
例1–2 では、縦軸は A、横軸は Bを表し、縦軸上の 0は$\overline{A}$ を、1 はA を、横軸上の 0,1 はそれぞれ$\overline{B}$、Bを表す。
表内部は（横軸 × 縦軸）が和集合の要素 として存在するときに 1 を、存在しなければ無 記入にする。
従って、例 1 - 2 の表す論理式は、$\overline{A}\,\overline{B}+AB$ である。
例1 - 2 の図から、直ちに例 1 -1の図が頭に浮かぶよう になる必要がある。

例2

A＼B	0	1
0	1	1
1		

例2では、論理式は、$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B$であるが、これは
$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}\left(\overline{B}+B\right)=\overline{A}\cdot 1=\overline{A}$と変形できる。
すなわち、$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}$ が導かれる。
図の上では、1が隣接している所に着目すると$\overline{A}$の行はすべて1であるので$\overline{A}$に対してBはすべての場合(0, および1)をとることを意味し、$\overline{A}\cdot 1=\overline{A}$に集約される。この例で見たように、集約できるのは表内部で1が縦または横に隣接している部分である。

例3

A＼B	0	1
0	1	
1	1	

例3では、論理式は、$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}$であるが、これは
$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}=\left(\overline{A}+A\right)\overline{B}=1\cdot\overline{B}=\overline{B}$と変形できる。
すなわち、$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}=\overline{B}$ が導かれる。
図の上では、1が隣接している所に着目すると、$\overline{B}$の列はすべてのAに対して1であるのでAについてはすべての場合をとることを意味し、$\overline{B}\cdot 1=\overline{B}$に集約される。。

例4

A＼B	0	1
0	1	1
1	1	

例４では、論理式は、$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B$ であるが、これは
$\overline{A}\,\overline{B}$をもう一度加えても変わらないので（$X+X=X$）

$$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B=\left(\overline{A}+A\right)\overline{B}+\overline{A}\left(\overline{B}+B\right)=\overline{B}+\overline{A}$$

と変形できる。すなわち、$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}+\overline{B}$ が導かれる。

図の上では､1が隣接する所に着目し、次のようにする。

$\overline{A}$ の行はすべて埋まっているのでこの行は$\overline{A}$に集約される。

$\overline{B}$ の列もすべて埋まっているのでこの列は$\overline{B}$に集約される。

したがって、$\overline{A}+\overline{B}$ に集約される。

例5

A＼B	0	1
0	1	1
1	1	1

例５では、論理式は、$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B+AB$であるが、1 が隣接する所に着目し、まず縦に加えると、実線部が$\overline{B}$､破線部がB､さらにこの二つを加えて、

$\overline{B}+B=1$

すなわち、$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B+AB=1$ に集約される。

なお、$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B+AB=\left(\overline{A}+A\right)\overline{B}+\left(\overline{A}+A\right)B$
$=\left(\overline{A}+A\right)\left(\overline{B}+B\right)=1\cdot1=1$ となり､1が正方形に隣接している赤実線の部分は､$\left(\overline{A}+A\right)\left(\overline{B}+B\right)$のように因数分解できることが分る。

3 変数の場合

例6

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

例6のように3変数の場合は1変数(A)と2変数(BC)の組合せに分け、2変数(BC)の方の並べ方は、隣り合わ せに並ぶ項は、1要素だけが異なるように 並べる。
00 01 10 11 ではなく、図のように 、
00 01 11 10 と並べる。なお、00 10 11 01 等も可能である。

例6では、論理式は、$\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C$であるが、
1 が隣接する所に着目 すると、
破線部では、$\overline{A}\left(BC+B\overline{C}\right)=\overline{A}B\left(\overline{C}+C\right)=\overline{A}B$
実線部では、$A\left(\overline{B}\overline{C}+\overline{B}C\right)=A\overline{B}\left(\overline{C}+C\right)=A\overline{B}$
すなわち、$\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C=\overline{A}B+A\overline{B}$
と簡略化される。

例7

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

例７では、論理式は、$\overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$ であるが、１が隣接する所に着目してまと めると、

赤線部では、$A\left(\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}C\right) = A\overline{B}\left(\overline{C} + C\right) = A\overline{B}$

青線部では、$A\left(\overline{B}C + BC\right) = A\left(\overline{B} + B\right)C = AC$

空色線部では、$\overline{A}\left(BC + B\overline{C}\right) = \overline{A}B\left(\overline{C} + C\right) = \overline{A}B$

黒線部では、$BC\left(\overline{A} + A\right) = BC$

すなわち、

$\overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC =$

$= A\overline{B} + AC + \overline{A}B + BC = A\overline{B} + \overline{A}B + \left(A + B\right)C$

と簡略化される。

例8

BC / A	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	1	

例8では、論理式は、$\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C+ABC$ であるが、まず1が縦横に隣接する所に着目してまとめると、赤破線部が$\overline{B}C\left(\overline{A}+A\right)=\overline{B}C$、黒破線部が$BC\left(\overline{A}+A\right)=BC$、この二つで、$\left(\overline{B}+B\right)C=C$、

(正方形縦横4マスで1が隣接する黒実線の部分は、$\left(\overline{A}+A\right)(\overline{B}C+BC)$と表され、$\left(\overline{A}+A\right)(\overline{B}C+BC)=\left(\overline{A}+A\right)(\overline{B}+B)C=C$とできる。)

さらに、赤実線部と空色実線部とで、$A(\overline{B}\,\overline{C}+\overline{B}C)+\overline{A}\left(BC+B\overline{C}\right)=A\overline{B}+\overline{A}B$

$\therefore\ \overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C+ABC=C+A\overline{B}+\overline{A}B$

と簡略化される。

例9 4変数の例

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	
11	1	1	1	1
10				

4変数A、B、C、Dの論理式、
$F(A,B,C,D)=\sum(1,5,7,12,13,14,15)$
$=0001+0101+0111+\Lambda$
を左図のカルノーマップを参考にして
最も簡単化した論理式の正誤選択問題。
(平成16年度電気電子一次)

例9では、まず1が縦横に 隣接する所に着目して まとめると、
赤実線部がAB(すべてのCD) $= AB$、
黒実線部が、$\overline{A}B\left(\overline{C}D+CD\right)+AB\left(\overline{C}D+CD\right)=\left(\overline{A}B+AB\right)\left(\overline{C}D+CD\right)$
$=\left(\overline{A}+A\right)B\left(\overline{C}+C\right)D=BD$
この部分は、直接、$\left(\overline{A}B+AB\right)\left(\overline{C}D+CD\right)=BD$としてもよい。
青実線部が、$\left(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B\right)\overline{C}D=\overline{A}\,\overline{C}D$
したがって、$F(A,B,C,D)=AB+BD+\overline{A}\,\overline{C}D$と簡略化される。

例10　4変数

WX \ YZ	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11			1	1
10				

4変数W、X、Y、Zの論理式、

$$F(W,X,Y,Z)=\overline{W}X\overline{Y}Z+WXY\overline{Z}+XYZ+\overline{W}XY$$

を最も簡単化した論理式の正誤選択問題。

(平成21年度電気電子一次)

カルノーマップを作る過程、下の説明参照

1を入れる箇所

$\overline{W}X\,\overline{Y}Z=0101$, $WX\,Y\overline{Z}=1110$, $WX\,YZ=1111$,

$\overline{W}X\,YZ=0111$, $\overline{W}X\,Y\overline{Z}=0110$

例10では、まずカルノーマップを作る必要がある。

4変数で表示されている$\overline{W}X\,\overline{Y}Z$と$WX\,Y\overline{Z}$は直ちに1を入れる場所が分る。

3変数のXYZと$\overline{W}XY$については、これらに含まれない要素を次のようにして加え、

$$XYZ=\left(W+\overline{W}\right)XYZ=WX\,YZ+\overline{W}X\,YZ,\quad \overline{W}XY=\overline{W}XY\left(Z+\overline{Z}\right)=\overline{W}X\,YZ+\overline{W}X\,Y\overline{Z}$$

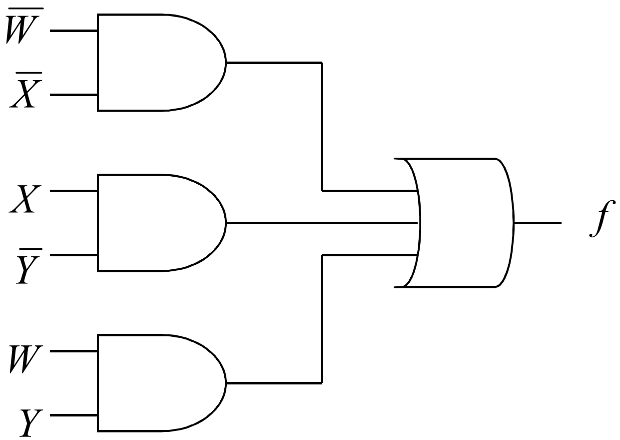
と変形することによって1を入れる場所が分る（$\overline{W}X\,YZ$は共通になっている）。

表ができたら、集約作業に入る。1が縦横に隣接する所に着目してまとめると、

実線部が$\left(\overline{W}X+WX\right)\left(YZ+Y\overline{Z}\right)=XY$、破線部が、$\overline{W}X\left(\overline{Y}Z+YZ\right)=\overline{W}XZ$

したがって、$F(W,X,Y,Z)=XY+\overline{W}XZ$と簡略化される。

例11　3変数



左図の論理回路の出力 f として誤っているのは どれか。

① $f = X\overline{Y} + \overline{X}Y + WY + \overline{W}\overline{Y}$

② $f = WX + \overline{W}\overline{X} + WY + \overline{W}\overline{Y}$

③ $f = \overline{X}Y + WX + \overline{W}\overline{X} + \overline{W}\overline{Y}$

④ $f = X\overline{Y} + \overline{W}\overline{X} + WY + \overline{W}\overline{Y}$

⑤ $f = X\overline{Y} + \overline{X}Y + WX + WY$

(平成21年度電気一次)

WX \ Y	0	1
00	1	1
01	1	
11	1	1
10		1

$\overline{W}\overline{X}$

$X\overline{Y}$

WY

3変数 W、X、Y の論理式、

$f = \overline{W}\overline{X} + X\overline{Y} + WY$

をカルノーマップに表すと左図のようになる。

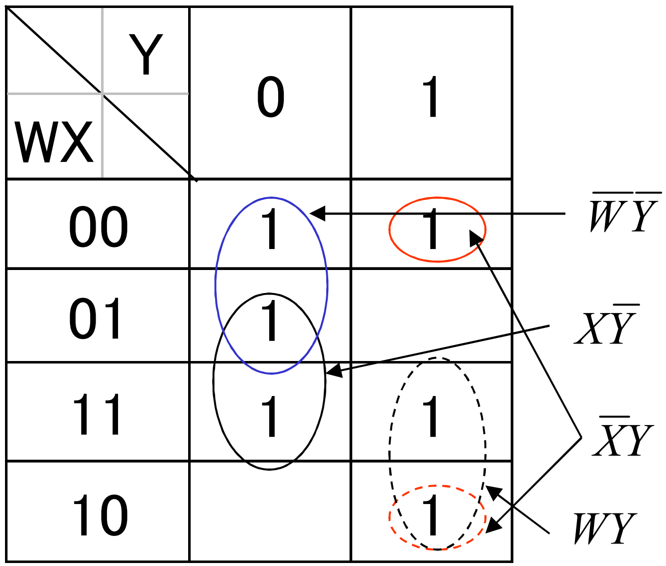
この際、例 10 で示したように 1～2変数の項は

3変数項に書き直す必要がある。

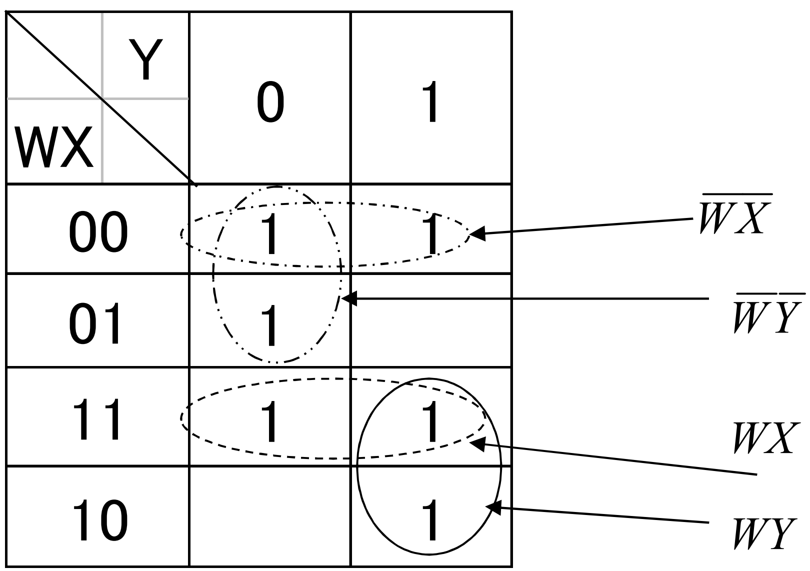
例 $X\overline{Y} = (\overline{W} + W)X\overline{Y}$

$= (\overline{W}X + WX)\overline{Y}$

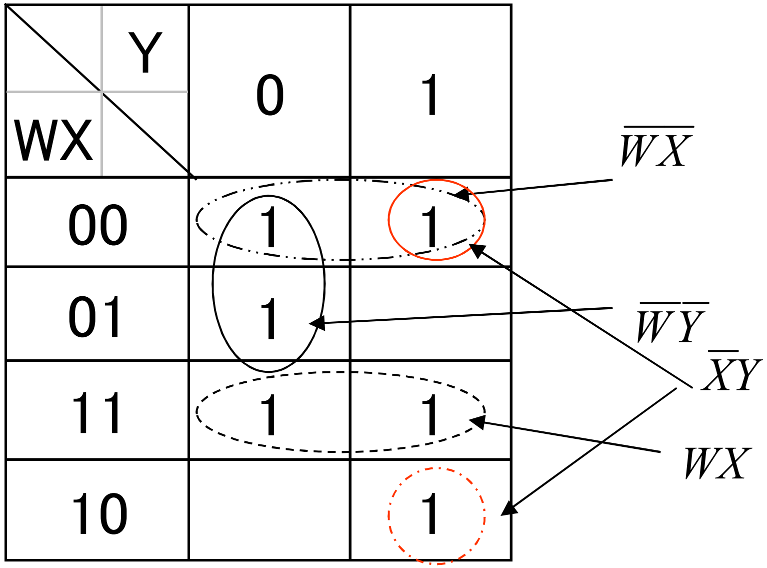
$= (WX$が 01と11$)(Y$ が 0$)$ の隣接部分



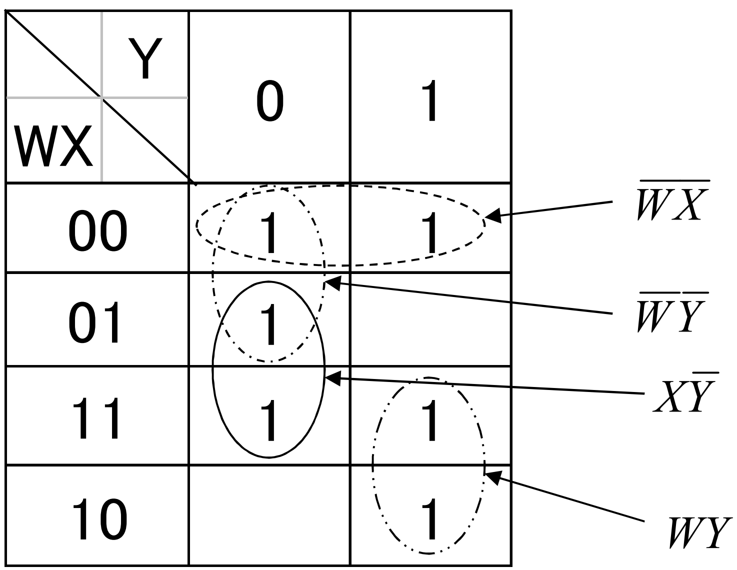
① $f = X\overline{Y} + \overline{X}Y + WY + \overline{W}\,\overline{Y}$
左図のように、すべて カバーされ、
空白部は含まれないの で正しい



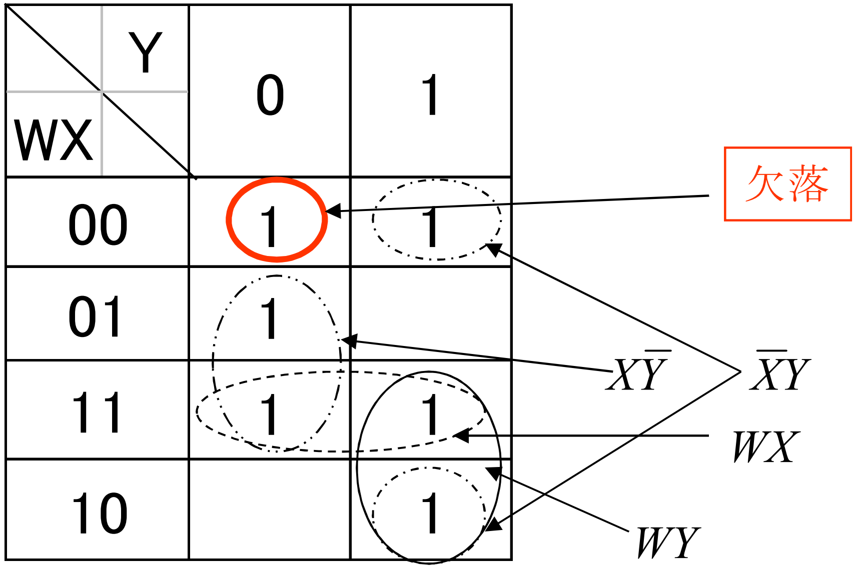
② $f = WX + \overline{W}\,\overline{X} + WY + \overline{W}\,\overline{Y}$
左図のように、すべて カバーされ、
空白部は含まれないの で正しい。



③ $f = \overline{X}Y + WX + \overline{W}\,\overline{X} + \overline{W}\,\overline{Y}$
左図のように、すべて カバーされ、
空白部は含まれないの で正しい



④ $f = X\overline{Y} + \overline{W}\,\overline{X} + WY + \overline{W}\,\overline{Y}$
左図のように、すべて カバーされ、
空白部は含まれないの で正しい。



⑤ $f = X\overline{Y} + \overline{X}Y + WX + WY$
図のように、$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$の部分が欠落している ので誤り。

この問題を解く過程でみたように、カルノーマップの括り方は一通りではなく複数あり得ることが分る。ただし、すべての１をカバーしていなければならない。また、空白部を含んではいけない。この際、１がある同じ箇所を重複して使用することは許容される（$X+X=X$ が成り立つから）

例12　4変数

WZ \ YX	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1			1

$\overline{W}\cdot\overline{Y}\cdot\overline{X}$

$Y\cdot\overline{X}$

$Z\cdot\overline{Y}\cdot X$

$Z\cdot\overline{X}$

$W\cdot\overline{Y}\cdot\overline{X}$

$F(X,Y,Z,W)$
$=\overline{W}\cdot\overline{Y}\cdot\overline{X}+Z\cdot\overline{Y}\cdot X+W\cdot\overline{Y}\cdot\overline{X}+Z\cdot\overline{X}+Y\cdot\overline{X}$

(20年度電気電子一次)

カルノーマップは左図のようになる。
これを左下の図のように集約すると
$F=\overline{X}+Z\overline{Y}$ となる。

WZ \ YX	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1			1

$\overline{Y}\cdot\overline{X}+Y\cdot\overline{X}=\overline{X}$

$\left(\overline{W}\cdot Z+W\cdot Z\right)\left(\overline{Y}\cdot\overline{X}+\overline{Y}\cdot X\right)=Z\cdot\overline{Y}$

横軸の左端と右端は 00 10 で、一つだけ変化している
ので隣同士である。
縦軸の最上段と最下段も 00 10 で、一つだけ変化して
いるので隣同士である。

隣接部の集約まとめ

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11	1	1	1	1
10	1			

$\overline{A}\overline{B}C$

$\overline{A}CD$

BD

AB

$A\overline{C}\overline{D}$

1. カルノーマップで､1が縦または横に隣接する部分の集約方法をまとめてみる。
隣接する１を二つ集約すると変数が一つ減る。
縦の二つを集約すると、縦軸の要素で、0, 1 の二つの要素を持つものが消える。
図の$A\overline{C}\overline{D}$,, $\overline{A}CD$ がこれに当たる。
それぞれ、つぎのように証明できる。

$AB\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} = A(B+\overline{B})\overline{C}\overline{D} = A\overline{C}\overline{D}\ \Lambda\ B$ 消滅

$\overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}BCD = \overline{A}(\overline{B}+B)CD = \overline{A}CD\ \Lambda\ B$ 消滅

横に隣接する場合も同様にして、図から、

$\overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} = \overline{A}\overline{B}C(D+\overline{D}) = \overline{A}\overline{B}C\ \Lambda\ D$ 消滅

2. カルノーマップで、1が行または列を空白なく埋めている場合の集約方法をまとめてみる。
図の赤実線の部分は１行を空白なくすべて埋めているので、その行の縦軸 AB に集約される。

$AB(\overline{C}\overline{D} + \overline{C}D + CD + C\overline{D})$

$= AB\{\overline{C}(\overline{D}+D) + C(\overline{D}+D)\}$

$= AB(\overline{C}+C)(\overline{D}+D) = AB\ \Lambda$ CとD 消滅

3. カルノーマップで､1が縦2個および横2個正方形で隣接する部分の集約方法をまとめてみる。
図の赤破線の部分は正方形をなしている。
左の1.から縦、横の隣接で一つずつ変数が減少するので、計２個減少するはずである。そして、減少するのは、縦軸、横軸で 隣接箇所で 0,1 が変化している変数であるから、ここは AC がなくなり BD が残る。すなわち、横に集約すると、
$\overline{A}B(\overline{C}D + CD) = \overline{A}BD$および、$AB(\overline{C}D + CD) = ABD$
次に、この二つを加えて､$(\overline{A}+A)BD = BD$ を得る。

以上を集約すると、このカルノーマップの集約結果は、$AB + BD + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}CD + A\overline{C}\overline{D}$ となる。

例 13（平成 22年度電気電子）

$F(X,Y,Z)=\overline{\overline{X}YZ+X\overline{Y}Z+XYZ}$

を簡単化する問題

選択肢

①$X\cdot Y+\overline{Z}$　②$\overline{X}\cdot\overline{Y}+Z$

③$\overline{X}\cdot\overline{Y}+\overline{Z}$　④$X+Y+\overline{Z}$

⑤$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$

正解　③

$F(X,Y,Z)$ から最上部の ―――― を取り除いた

$\overline{X}YZ+X\overline{Y}Z+XYZ$

のカルノーマップを作ると図の 1 が記入されている部分の和集合になる。

$F(X,Y,Z)=\overline{\overline{X}YZ+X\overline{Y}Z+XYZ}$

は、その否定なので、1 が記入されていない空白部領域の和集合で、図に示すように、

$\overline{X}\cdot\overline{Y}+\overline{Z}$

となる。