Hamming Code

（ハミング符号）

1950年にベル研究所のリチャード・ハミングによって考案された。知られている誤り訂正符号の中では最も古く、ブロックあたり1ビットの誤りを訂正できる。リード・ソロモン符号などに比べると、ある程度高速で処理できるが、訂正力は高くない。このためエラー発生率が低く、速度が要求される用途に使う。ECCメモリやRAID 2などに使用される。（Wikipdedia）

符号長： n ＝$2^m - 1$
情報ビット数：k=n-m
つまり、情報 k ビットに対し、
$n-k$ ビット付加して 1 誤りの訂正を行う。
通常（n, k)ハミング符号と呼ぶ。
　例　(7,4)ハミング符号（符号長7、情報長4）

29年Ⅲ27　の例は、(7,4)ハミング符号で、
n=7, k=4　である。
情報ビットに付加したn-k=3ビットの内容は、

$c_1 = (x_1 + x_2 + x_3) mod 2$
$c_2 = (x_2 + x_3 + x_4) mod 2$
$c_3 = (x_1 + x_2 + x_4) mod 2$

表2の検査行列Hは、表1の右3ビットで、チエックbit　c1, c2, c3（左半分3行4列）と単位行列（右半分3行3列）から表2のように作成される。受信符号7ビットの y から$S=Hy^T$を$mod 2$で計算して、シンドロームを求め、どのビットが誤りかを知る。

表１ 行列 $G = I^4 A^T$,　$(H = AI^3,\ \ HG^T = GH^T = 0)$

誤りがある位置（1がある点）				シンドローム		
e1	e2	e3	e4	c1	c2	c3
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1

誤りが第3ビットであるとき、シンドロームは 1 1 0 となる。（赤線）
誤りがないときはシンドロームは　000 となる。

表２検査行列 $H=AI^3$　シンドローム $S=Hy^T$, y は 7 ビット受信符号

誤りビット	1	2	3	4	5	6	7
シンドローム Hy' mod2	1	1	1	0	1	0	0
	0	1	1	1	0	1	0
	1	1	0	1	0	0	1

シンドロームには[0 0 0]が含まれず、かつ、同じものが2か所以上出現しないようにしなければならない。

使用例１
ｙ＝[1 001001]を受信、正誤を調べる。

$$S = Hy^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \bmod 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

から誤りは第2ビットと判定

正しいｙ＝[1 1 0 1 0 0 1]

使用例２
ｙ＝[1101101]を受信、正誤を調べる。

$$S = Hy^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \bmod 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

から誤りは第5ビットと判定

正しいｙ＝[1 1 0 1 0 0 1]

$HG^T = 0$ の計算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{mod2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{G}H^T = 0$ の計算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{mod2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c_1, c_2, c_3の順序を変えても成り立つか？、c_2、c_3を入れ替えてみる。

Cの順序を変えた場合 G, Hが変わる

$HG^T = 0$ の計算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{mod2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{OK}$$

$\mathrm{G}H^T = 0$ の計算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{mod2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{OK}$$

１．符号化の方法，　送信したいデータ 4 ビットとG との mod2 乗算を行う

送信したいデータ＝[1 1 0 1]とする。

$$[1\ \ 1\ \ 0\ \ 1] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\underbrace{1\ \ 1\ \ 0\ \ 1}_{\text{情報ビット}}\ \ \underbrace{\underline{0\ \ 1\ \ 0}}_{\text{検査ビット}}]$$

参考　送信したいデータ＝[1 1 0 1]とG
とのmod2乗算によって、

G =

1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1

データを左4ビットに取り出す

c1 c2 c3
を計算し
右3ビットに。

2．チェックの方法，　Hと受信したデータ７ビット のmod2 乗算を行いシンドロームを求める。

受信データを、y=[1　1　0　0 0 1 0]　とする。

表２検査行列H　シンドローム $S=Hy^T$, y は７ビット受信符号

誤りビット	1	2	3	4	5	6	7
シンドローム Hy' mod2	1	1	1	0	1	0	0
	1	1	0	1	0	1	0
	0	1	1	1	0	0	1

Hの作り方

Gの右4行3列を転置してHの左４列３行に配置する。

次にその右に3行3列の単位行列を付加する。

検査例1　y＝[1　1 0　0 0 1 0] の場合

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{mod2=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

誤りは
第4ビット

w=[1　1 0　1 0 1 0] が正解，OK!

検査例2　w＝[1　1 0 1 0 1 0] の場合

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{mod2=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

誤りなし