

フーリエ解析の要点

1. フーリエ級数展開

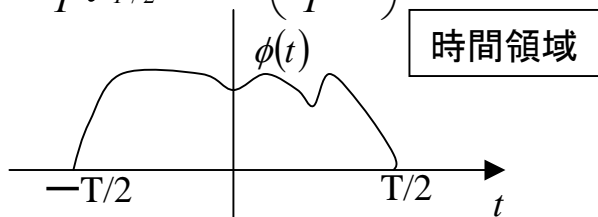
周期 T の関数 $\phi(t)$ は、級数展開できる。

$$\phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi}{T} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T} nt \right)$$

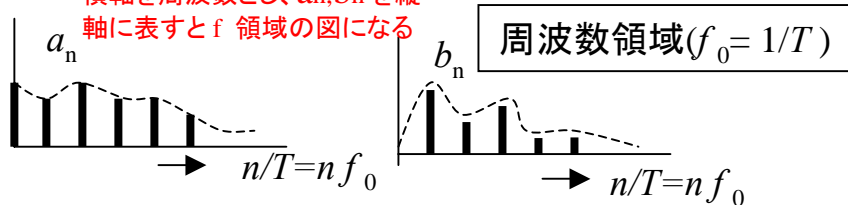
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t) \cos \left(\frac{2\pi}{T} nt \right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t) \sin \left(\frac{2\pi}{T} nt \right) dt, (n = 1, 2, \dots)$$



横軸を周波数とし、 a_n, b_n を縦軸に表すと f 領域の図になる



2. 複素形式のフーリエ級数

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varepsilon^{j2\pi nt/T}, c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

$c_n \varepsilon^{j2\pi nt/T} + c_{-n} \varepsilon^{-j2\pi nt/T}$ を計算すると、

$$= (\cos 2\pi nt / T + j \sin 2\pi nt / T) \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$+ (\cos 2\pi nt / T - j \sin 2\pi nt / T) \frac{a_n + jb_n}{2}$$

$= a_n \cos 2\pi nt / T + b_n \sin 2\pi nt / T$ となることが分かる。 $c_n = (a_n - jb_n) / 2$ から、

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t) \frac{\cos \left(\frac{2\pi}{T} nt \right) - j \sin \left(\frac{2\pi}{T} nt \right)}{2} dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t) \varepsilon^{-j \frac{2\pi}{T} nt} dt$$

これを $\phi(t)$ に代入して、

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(\tau) \varepsilon^{-j2\pi n\tau/T} d\tau \right\} \varepsilon^{j2\pi nt/T}$$

ここで、 $f = f_n = \frac{n}{T}$, $\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{1}{T}$

として、 $T \rightarrow \infty (\Delta\omega \rightarrow 0)$ とすれば、 $1/T \rightarrow df$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) \varepsilon^{-j2\pi f(\tau-t)} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j2\pi ft} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) \varepsilon^{-j2\pi f\tau} d\tau \right\} df$$

$\tau \rightarrow t$ と書き直して、分離して表現すれば、

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \varepsilon^{-j2\pi ft} dt \text{ (フーリエ変換)} \dots (A)$$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) \varepsilon^{j2\pi ft} df \text{ (フーリエ逆変換)} \dots (B)$$

フーリエ変換を $\mathbf{F}\{\}$, 逆変換を $\mathbf{F}^{-1}\{\}$ と書く。

f の代わりに $\omega (= 2\pi f)$ を使って、

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varepsilon^{-j\omega t} dt \text{ (フーリエ変換)} \dots (C)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \varepsilon^{j\omega t} d\omega \text{ (フーリエ逆変換)} \dots (D)$$

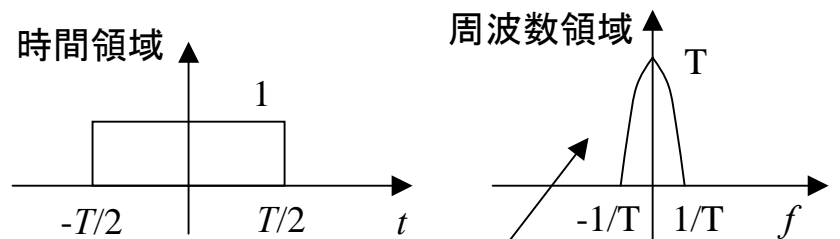
とする方式もある。(差異 : $1/\sqrt{2\pi}$ の有無、 $d\omega \leftrightarrow df$)

3. 孤立する一つのパルスのフーリエ変換 右図参照

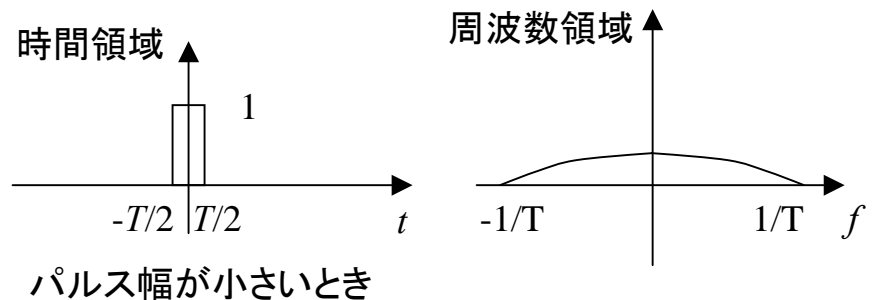
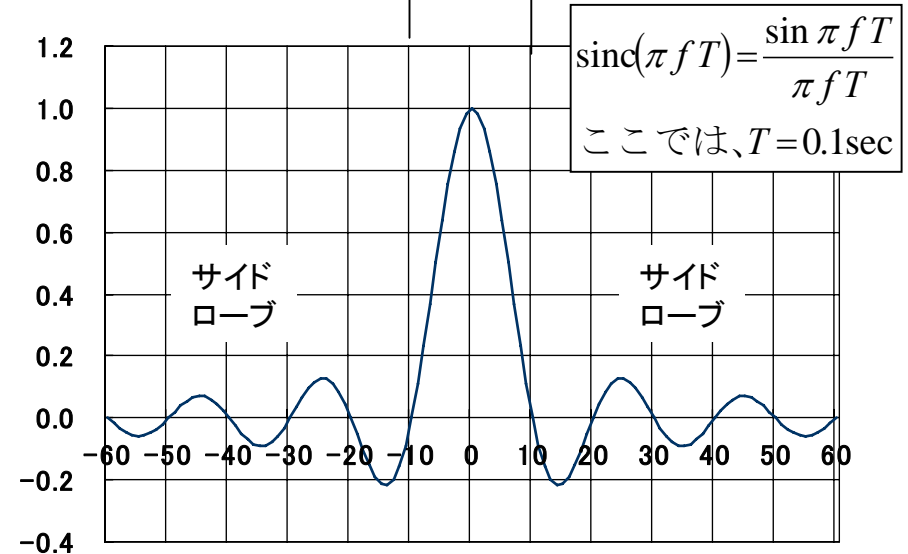
$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0, & t < -T/2, t > T/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} 1 \varepsilon^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{\varepsilon^{-j2\pi fT/2} - \varepsilon^{j2\pi fT/2}}{-j2\pi f} = T \frac{\varepsilon^{j\pi fT} - \varepsilon^{-j\pi fT}}{2j} \frac{1}{\pi f T} \\ &= T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = T \text{ sinc}(\pi f T) \end{aligned}$$

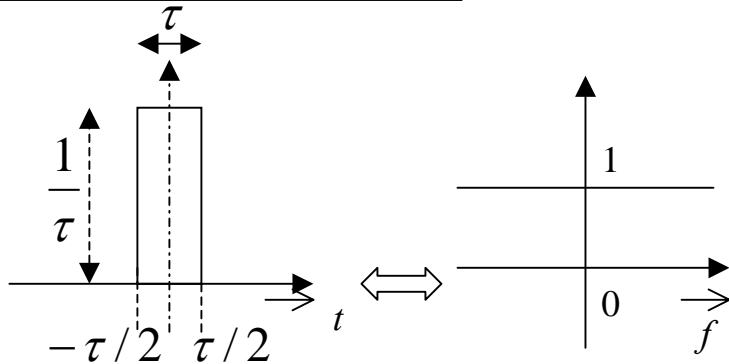
$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$$



この部分をメインローブといい代表して、関連する周波数領域全体を示す図として使うことがある。
 $|F(\omega)|$ としてサイドローブのマイナス部分を+側に反転させた表示法もある。



4. デルタ関数のフーリエ変換



$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \begin{cases} 1/\tau, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0, & t < -\tau/2, t > \tau/2 \end{cases}$$

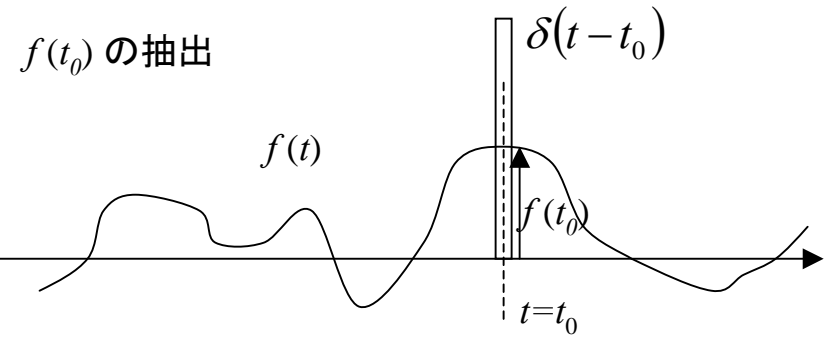
$$\Phi(f) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{1}{\tau} \varepsilon^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{-j2\pi f\tau/2} - \varepsilon^{j2\pi f\tau/2}}{-j2\pi f\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{j2\pi f\tau/2} - \varepsilon^{-j2\pi f\tau/2}}{j2\pi f\tau}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\pi f \cos \pi f \tau}{\pi f} = 1$$

δ 関数の応用

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$ となり、関数 $f(t)$ の $t=t_0$ における値の抽出ができる。(右上図)



$f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすると $F'(t) = f(t)$

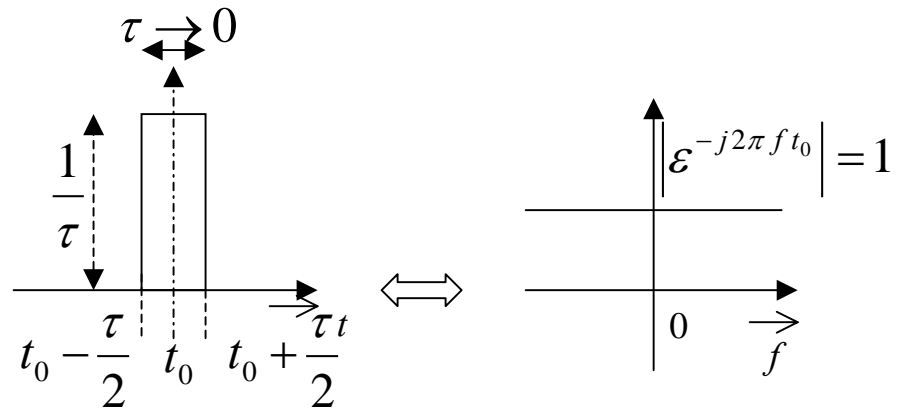
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} \frac{1}{\tau} f(t) dt$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \tau/2) - F(t_0 - \tau/2)}{\tau} = F'(t_0) = f(t_0) \text{ となり、}$$

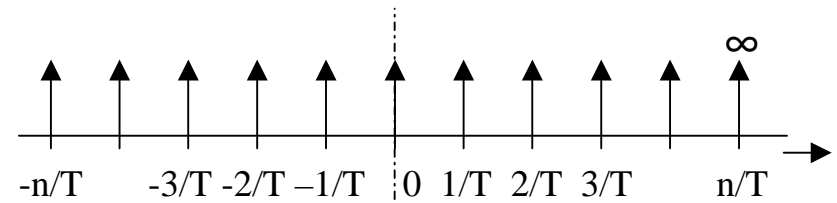
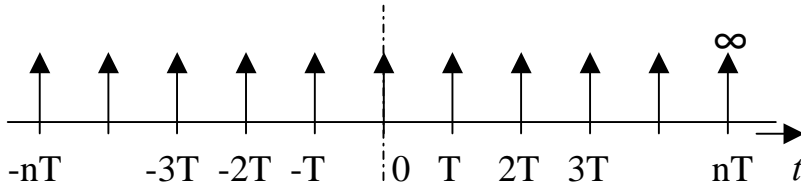
関数 $f(t)$ の $t=t_0$ における値の抽出ができる。(上図)

この性質を使って、 $f(t) = \varepsilon^{-j2\pi ft}$ として、

$$\mathbf{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \varepsilon^{-j2\pi ft} dt = \varepsilon^{-j2\pi ft_0} \text{ (下図)}$$



5. 櫛型関数(周期的デルタ関数)のフーリエ変換は櫛型関数



(1) $\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ のフーリエ変換

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \varepsilon^{-j2\pi f t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-j2\pi f nT} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(2) $\phi(t)$ のフーリエ級数展開

一方、 $\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ は基本周期が T の関数なので 2 (複素形式) により、

$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varepsilon^{j2\pi \frac{n}{T} t}$ と書くことができる。

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t) \varepsilon^{-j\frac{2\pi}{T} n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \varepsilon^{-j\frac{2\pi}{T} n t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \varepsilon^{j0} = \frac{1}{T} \rightarrow \therefore \phi(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j2\pi \frac{n}{T} t} \dots \textcircled{2}$$

(3) $\Phi(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ の逆変換を考えてみる^f。

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \varepsilon^{j2\pi f t} df \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \varepsilon^{j2\pi f t} df \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j2\pi \frac{n}{T} t} \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

これは②式と一致するので、

$\Phi(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ すなわち、櫛型関数 $\phi(t)$ の

フーリエ変換は櫛型関数 $\Phi(f)$ となる。

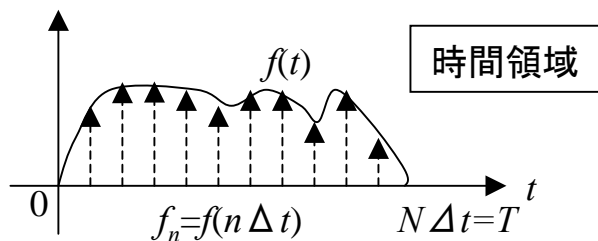
$$\mathbf{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \dots \textcircled{4}$$

さらに、①から、次式も成り立つ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-j2\pi f nT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \dots \textcircled{5}$$

6. 離散フーリエ変換

サンプリングデータを用いたフーリエ変換



$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \varepsilon^{-j \frac{2\pi}{T} nt} dt \dots (A)$$

において、区間を $0 \sim T$ に変更し、
 $n \rightarrow k, c_n \rightarrow \hat{F}_k$ と書き直すと、

$$\hat{F}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(n\Delta t) \varepsilon^{-j \frac{2\pi}{T} kt} dt$$

$T/N = \Delta t = dt, t = n\Delta t$ として、

$$\frac{2\pi}{T} kt = \frac{2\pi kn\Delta t}{N\Delta t} = \frac{2n\pi k}{N}$$

$$\hat{F}_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \varepsilon^{-j \frac{2n\pi k}{N}} \frac{T}{N}, \text{これと、逆変換を合せ、}$$

$$\hat{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \varepsilon^{-j \frac{2n\pi k}{N}}, \text{離散フーリエ変換} \dots (E)$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{F}_k \varepsilon^{j \frac{2n\pi k}{N}}, \text{離散フーリエ逆変換} \dots (F)$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & c & c^2 & \dots & c^{N-1} \\ 1 & c^2 & c^4 & \dots & c^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c^{N-1} & c^{2(N-1)} & \dots & c^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_0 \\ \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \vdots \\ \hat{F}_{N-1} \end{bmatrix}$$

ただし、 $c = \varepsilon^{j \frac{2\pi}{N}}$

すなわち、 $\mathbf{f} = \mathbf{Q}_N \hat{\mathbf{F}}$ と書ける。

また、 $\hat{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{Q}_N^*}{N} \mathbf{f}$ が成り立つ。 \mathbf{Q}_N^* は、 \mathbf{Q}_N の
 共役行列である。

この2式から $\mathbf{f} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{F}}$ の変換ができる。

7. 高速フーリエ変換

N を偶数にとり、 $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix}$ と分割して、

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{Q}_M \hat{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{D}_M \mathbf{Q}_M \hat{\mathbf{F}}_2$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{Q}_M \hat{\mathbf{F}}_1 - \mathbf{D}_M \mathbf{Q}_M \hat{\mathbf{F}}_2$$

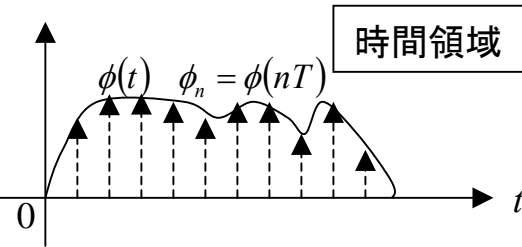
として、次数が半分の 式を解くことにより
 高速化する。

$$N = 2M,$$

$$\mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c^{M-1} \end{bmatrix}$$

8. サンプリングデータとフーリエ変換

8.1 櫛型関数(周期的デルタ関数)を用いたフーリエ変換



櫛型関数 $\delta(t-nT)$ は $t=nT$ で ∞ となるが、面積は1なので、 $\phi(t)$ との積の積分値は $\phi(t-nT)$ 、すなわちサンプリング値となる。

櫛型関数と任意の関数 $\phi(t)$ との積のフーリエ変換を考えるためコンボリューションを取り上げる。

$\mathbf{F}\{\phi(t)\psi(t)\} = \mathbf{F}\{\phi(t)\} * \mathbf{F}\{\psi(t)\} = \Phi * \Psi$ が成り立つ。

* はコンボリューション Convolution で、次式のとおり。

$$F(x) * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)G(y)dy$$

この定理の説明は次の通り。

$$\phi(t)\psi(t) = \mathbf{F}^{-1}\{\Phi(f)\} * \mathbf{F}^{-1}\{\Psi(f)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu)\varepsilon^{j2\pi\mu t} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\nu)\varepsilon^{j2\pi\nu t} d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu)\varepsilon^{j2\pi\mu t} d\mu \Psi(\nu)\varepsilon^{j2\pi\nu t} d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu)\Psi(\nu)\varepsilon^{j2\pi(\mu+\nu)t} d\mu d\nu$$

$$\mu + \nu = \xi \text{ と置いて、 } \nu = \xi - \mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu)\Psi(\xi - \mu)d\mu \varepsilon^{j2\pi\xi t} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) * \Psi(\xi)\varepsilon^{j2\pi\xi t} d\xi = \mathbf{F}^{-1}\{\Phi(\xi) * \Psi(\xi)\}$$

$$\therefore \mathbf{F}\{\phi(t)\psi(t)\} = \Phi(f) * \Psi(f)$$

櫛型関数 $c(t)$ と任意の関数 $\phi(t)$ との積のフーリエ変換を考える。

$$\mathbf{F}\{\phi(t)c(t)\} = \Phi(f) * C(f) = \Phi(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T} - y\right) dy$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) \delta\left(f - \frac{n}{T} - y\right) dy$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$\Phi(f)$ は $\phi(t)$ のフーリエ変換であるから、櫛型関数 $c(t)$ と任意の関数 $\phi(t)$ との積のフーリエ変換は $\Phi(f)$ が $1/T$ 間隔で無限に並んだものとなる(下図)。

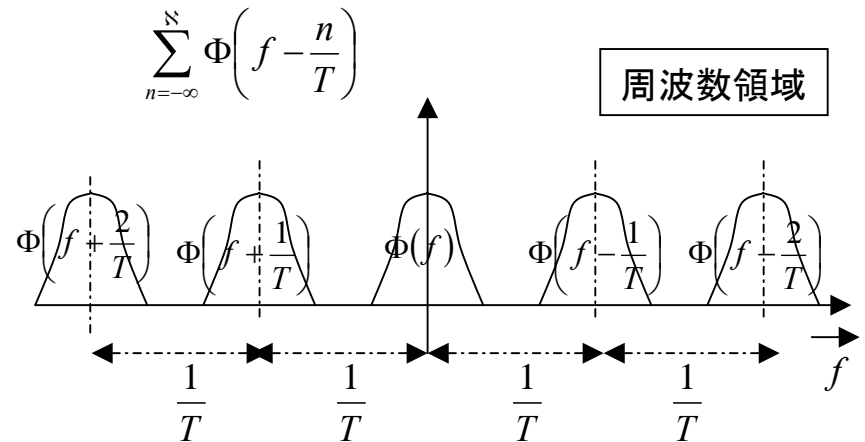


図 a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

周波数領域

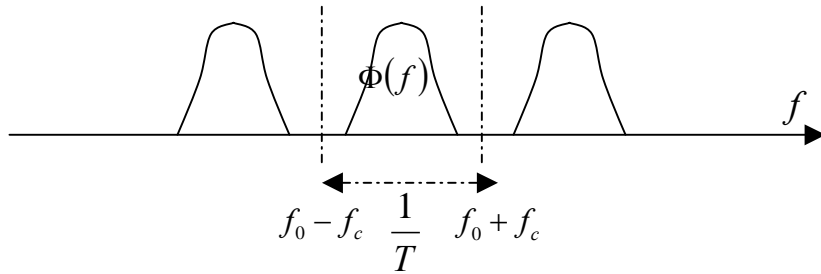


図 b

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

周波数領域

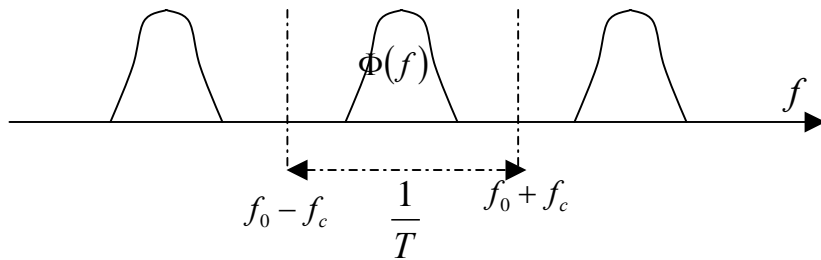
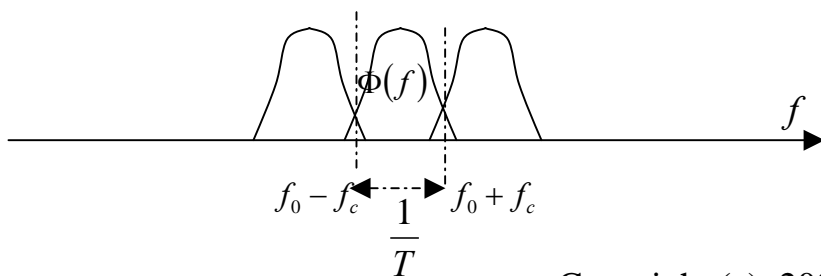


図 c

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

周波数領域



周波数領域の $\Phi\left(f - \frac{n}{T}\right)$ は、 $\phi(t)$ のフーリエ変換であるから、1個あれば、それをフーリエ逆変換して $\phi(t)$ が復元できる。 $\Phi(f)$ に含まれる周波数の最高値を f_c とするとき、図 a、図 b のように

$\frac{1}{T} \geq 2f_c$ のときは、 $2f_c$ の周波数幅で切り出した部分に隣接の Φ の裾野との重なりがなく、完全に

復元できる。しかし、図 c のように $\frac{1}{T} \leq 2f_c$ のときは、裾野が重なり、 $2f_c$ で切り出した部分に隣接部の信号が含まれることになり、これを逆変換しても正しい $\phi(t)$ が復元できないことになる。

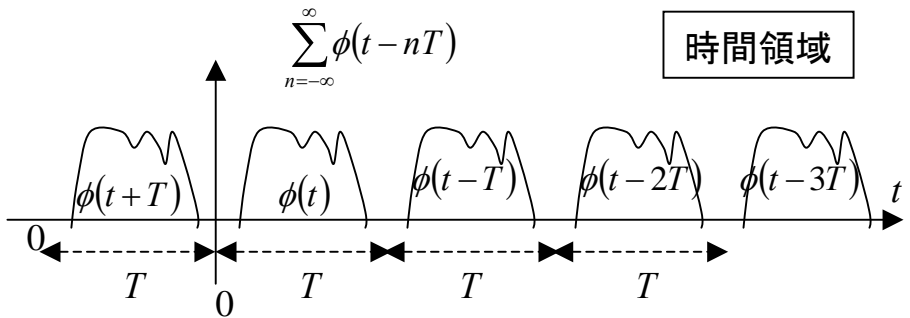
この現象を *Aliasing* (エイリアジング、異名効果、*alias*: 異名、別名、偽名…本来のものでないもの) という。

したがって、

$\frac{1}{T} \geq 2f_c$ すなわち、サンプリング周波数は $2f_c$ よりも高くなければならない。

これは、シャノンの標本定理の一つの説明になっている。

8.2 一般の周期関数のフーリエ変換



時間領域で周期的に同じパターンが現れる周期関数のフーリエ変換を考える。8.1節との対比から周波数領域での櫛型関数と、 $\phi(t)$ のフーリエ変換 $\Phi(f)$ との積になることが予想される。

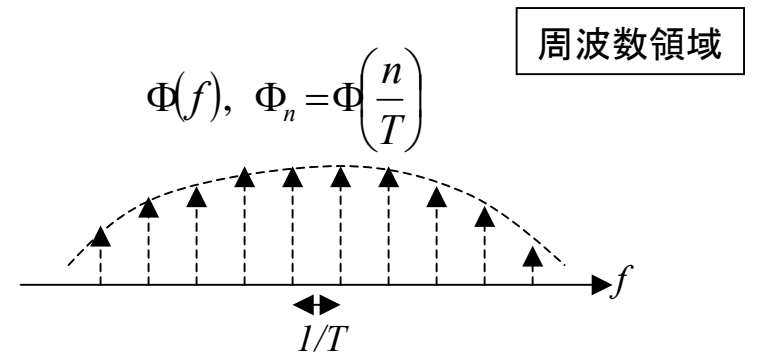
まず、積とコンボリューションとの関係では、 $\mathbf{F}^{-1}\{\Phi(f)\Psi(f)\} = \mathbf{F}^{-1}\{\Phi(f)\} * \mathbf{F}^{-1}\{\Psi(f)\} = \phi * \psi$ 、が次のようにして成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} \Phi(f)\Psi(f) &= \mathbf{F}\{\phi(t)\}\mathbf{F}\{\psi(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\varepsilon^{-j2\pi ft} dt \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\varepsilon^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\psi(\tau)\varepsilon^{-j2\pi f(t+\tau)} dt d\tau \\ t+\tau &= \xi \text{ と置いて、 } \tau = \xi - t \\ \Phi(f)\Psi(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\psi(\xi-t) dt \varepsilon^{-j2\pi f\xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) * \psi(\xi) \varepsilon^{-j2\pi f\xi} d\xi = \mathbf{F}\{\phi(\xi) * \psi(\xi)\} \\ \therefore \mathbf{F}^{-1}\{\Phi(f)\Psi(f)\} &= \phi(t) * \psi(t) \end{aligned}$$

櫛型関数 $C(f)$ と、任意の関数 $\Phi(f)$ の積のフーリエ逆変換を考える(下図)。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}\{\Phi(f)C(f)\} &= \phi(t) * c(t) = \phi(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\delta(t-nT-y) dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t-nT) \end{aligned}$$

$\phi(t)$ は、 $\Phi(f)$ のフーリエ逆変換であるから、櫛型関数 $C(f)$ と、任意の関数 $\Phi(f)$ の積のフーリエ変換は $\phi(t)$ が間隔 T で並んだものとなる(左上の図)。逆に、左上図のような時間領域での周期的関数のフーリエ変換は、下図のように周期関数 $\phi(t)$ の1個のフーリエ変換 $\Phi(f)$ を包絡線とする輝線スペクトルとなる。



9. フーリエ変換の性質

1. 線形則

$$\mathbf{F}\{\alpha\phi(t) + \beta\psi(t)\} = \alpha\mathbf{F}\{\phi(t)\} + \beta\mathbf{F}\{\psi(t)\} \\ = \alpha\Phi(f) + \beta\Psi(f)$$

2. 微分則

$$\mathbf{F}\left\{\frac{d^m}{dt^m}\phi(t)\right\} = (j2\pi f)^m \Phi(f)$$

$$\mathbf{F}^{-1}\left\{\frac{d^m}{dt^m}\Phi(f)\right\} = (-j2\pi f)^m \phi(t)$$

3. 相似則と移動

$$\mathbf{F}\{\phi(at + b)\} = \frac{\varepsilon^{j2\pi fb/a}}{|a|} \Phi\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\mathbf{F}\{\phi(t + b)\} = \varepsilon^{j2\pi fb} \Phi(f)$$

$$\mathbf{F}\{\phi(at)\varepsilon^{-j2\pi bt}\} = \frac{1}{|a|} \Phi\left(\frac{f + b}{a}\right)$$

$$\mathbf{F}\{\phi(t)\varepsilon^{-j2\pi bt}\} = \Phi(f + b)$$

4. 畳み込み(合成積、コンボリューション)

$$\mathbf{F}\{\phi * \psi\} = \Phi\Psi$$

$$\mathbf{F}\{\phi\psi\} = \Phi * \Psi$$

ただし、

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

5. パーシバル(または、ブランシュレル)の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f)|^2 df$$

6. その他

$$(1) \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\varepsilon^{-j2\pi f \cdot 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt$$

フーリエ変換の原点での値は関数 $\phi(t)$ の面積に等しい。

(2) Fourier変換の他の定義方法

$$\textcircled{1} \text{ Fourier変換 } F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varepsilon^{-j\xi x} dx$$

$$\text{Fourier逆変換 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\varepsilon^{j\xi x} d\xi$$

$$\textcircled{2} \text{ Fourier変換 } F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varepsilon^{-j\xi x} dx$$

$$\text{Fourier逆変換 } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\varepsilon^{j\xi x} d\xi$$

$x \leftrightarrow t, \xi \leftrightarrow \omega (= 2\pi f)$ と表すこともある。

9.2 フーリエ変換の性質(6(2))① ξ 、 x 方式の場合)

1. 線形則

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} &= \alpha \mathbf{F}\{f(x)\} + \beta \mathbf{F}\{g(x)\} \\ &= \alpha F(\xi) + \beta G(\xi)\end{aligned}$$

2. 微分則

$$\mathbf{F}\left\{\frac{d^m}{dt^m} f(x)\right\} = (j\xi)^m F(\xi)$$

$$\mathbf{F}^{-1}\left\{\frac{d^m}{dt^m} F(\xi)\right\} = (-jx)^m f(x)$$

3. 相似則と移動

$$\mathbf{F}\{f(ax+b)\} = \frac{\varepsilon^{jb\xi/a}}{|a|} F\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

$$\mathbf{F}\{f(x+b)\} = \varepsilon^{jb\xi} F(\xi)$$

$$\mathbf{F}\{f(ax)\varepsilon^{-jbx}\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\xi+b}{a}\right)$$

$$\mathbf{F}\{f(x)\varepsilon^{-jbx}\} = F(\xi+b)$$

4. 畳み込み(合成積、コンボリューション)

$$\mathbf{F}\{f(x)*g(x)\} = \sqrt{2\pi} F(\xi)G(\xi)$$

$$F(\xi)*G(\xi) = \sqrt{2\pi}\mathbf{F}\{f(x)g(x)\}$$

ただし、

$$f(x)*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

5. パーシバル(または、ブランシュレル)の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi$$

6. その他

$$(1) f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varepsilon^{-j\xi 0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

フーリエ変換の原点での値は関数 $f(x)$ の面積に等しい。

(2) Fourier 変換の他の定義方法

$$\textcircled{1} \text{ Fourier 変換 } F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varepsilon^{-j\xi x} dx$$

$$\text{Fourier 逆変換 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\varepsilon^{j\xi x} d\xi$$

$$\textcircled{2} \text{ Fourier 変換 } F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varepsilon^{-j\xi x} dx$$

$$\text{Fourier 逆変換 } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\varepsilon^{j\xi x} d\xi$$

$x \leftrightarrow t$, $\xi \leftrightarrow \omega (= 2\pi f)$ と表すこともある。