ＦＤＭ, ＦＥＭの要点その２
(二次元弾性問題のヒント)

二次元弾性問題(厚さが一定の三次元物体を想定)に三角形要素を適用する場合は、未知数としては各頂点の変位をとる。こうすると、次ページの三角屋根のハウス状のモデル（形状関数）が、x方向の変位を柱の高さにしたものと、y方向の変位を柱の高さにしたものとの 2 種類になる（p.3　および p.5 の図参照)。
基底関数を熱伝導の場合と同じく　$N_1^e(x,y),\ N_2^e(x,y),\ N_3^e(x,y)$　とすると、

$$\begin{cases} N_1^e = a_1^e + b_1^e x + c_1^e y \\ N_2^e = a_2^e + b_2^e x + c_2^e y \\ N_3^e = a_3^e + b_3^e x + c_3^e y \end{cases}\text{、すなわち、}\begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^e & b_1^e & c_1^e \\ a_2^e & b_2^e & c_2^e \\ a_3^e & b_3^e & c_3^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

と表せるが、ここで各頂点の座標をx, yに代入すると、基底関数は
一つの頂点で1、他の頂点で0をとるので

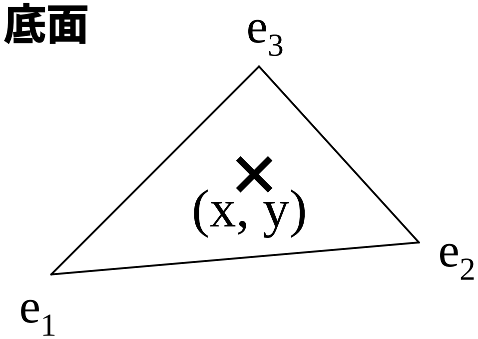
$$\begin{bmatrix} a_1^e & b_1^e & c_1^e \\ a_2^e & b_2^e & c_2^e \\ a_3^e & b_3^e & c_3^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_1^e & b_1^e & c_1^e \\ a_2^e & b_2^e & c_2^e \\ a_3^e & b_3^e & c_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2A_e}\begin{bmatrix} x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e & y_2^e - y_3^e & x_3^e - x_2^e \\ x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & y_3^e - y_1^e & x_1^e - x_3^e \\ x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e & y_1^e - y_2^e & x_2^e - x_1^e \end{bmatrix}$$

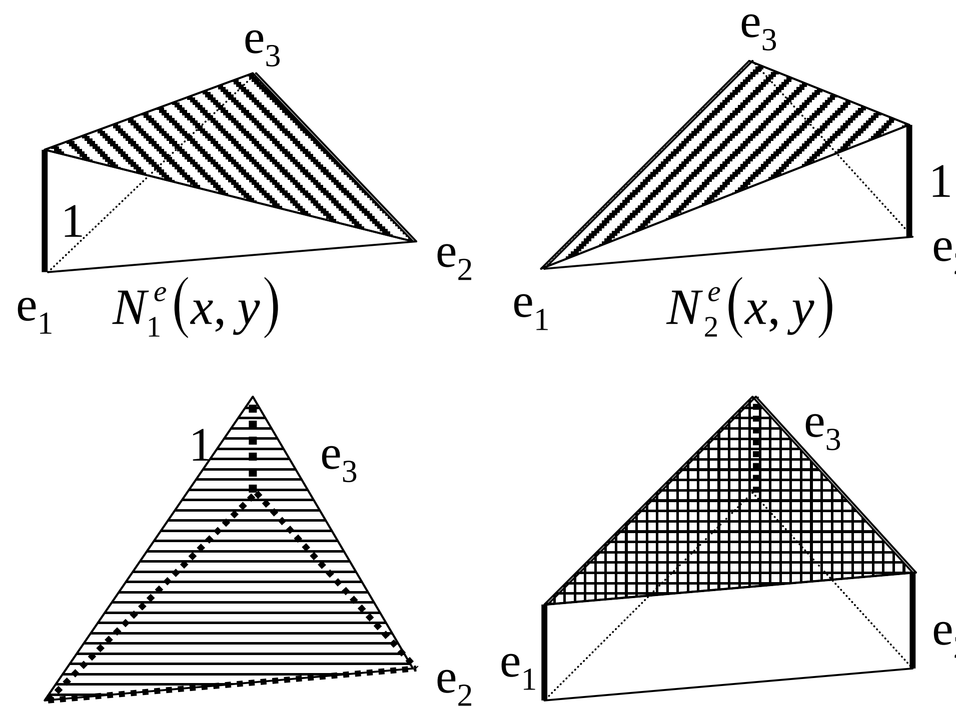
$$A_e = \frac{1}{2}\left\{\left(x_2^e - x_1^e\right)\left(y_3^e - y_1^e\right) - \left(x_3^e - x_1^e\right)\left(y_2^e - y_1^e\right)\right\} = \Delta\text{の面積}$$

三角形要素と基底関数、形状関数

底面



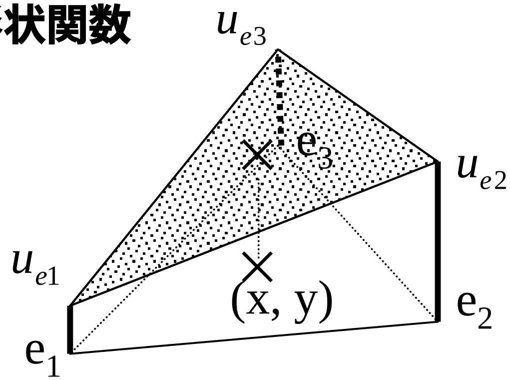
三つの基底関数とその和



$N_3^e(x,y)$

$$N_1^e(x,y)+N_2^e(x,y)+N_3^e(x,y)=1$$

形状関数



$$u_e(x,y)=u_{e1}N_1^e(x,y)+u_{e2}N_2^e(x,y)+u_{e3}N_3^e(x,y)$$

未知数としては各頂点の変位　$u_{ex1}, u_{ey1}, u_{ex2}, u_{ey2}, u_{ex3}, u_{ey3}$　をとる。こうすると、p.3 にある三角屋根のハウス状のモデルが、x方向の変位を柱の高さにしたものと、y方向の変位を柱の高さにしたものとの2種類になる(次頁p.5の図参照)。
すなわち、要素内の点(x, y)における、x, y 方向の変位は、各頂点の変位から、

$$
\begin{aligned}
u_{ex}(x,y) &= u_{ex1}N_{e1}(x,y) + u_{ex2}N_{e2}(x,y) + u_{ex3}N_{e3}(x,y) \\
u_{ey}(x,y) &= u_{ey1}N_{e1}(x,y) + u_{ey2}N_{e2}(x,y) + u_{ey3}N_{e3}(x,y)
\end{aligned}
$$

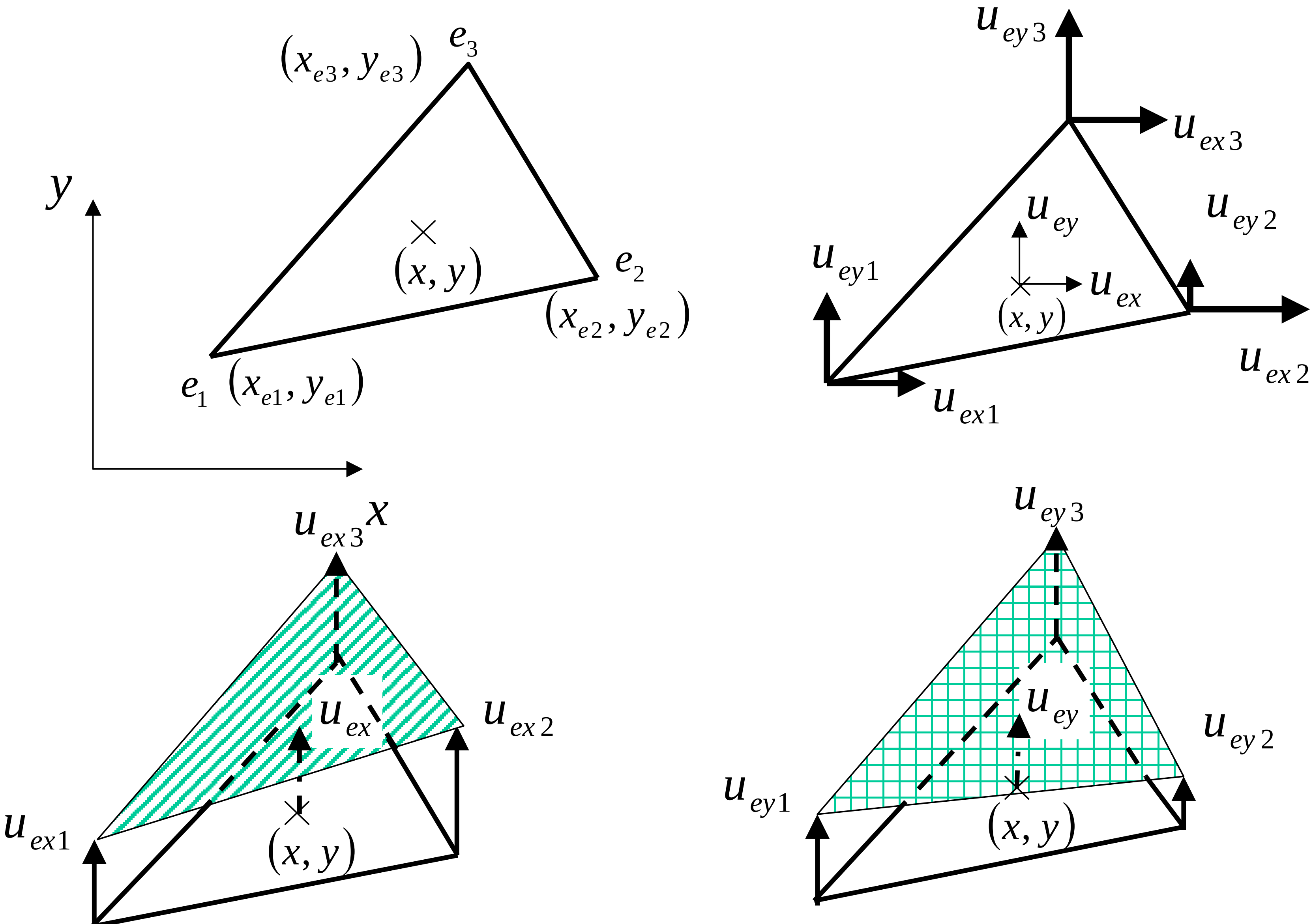
行列表示すれば、

$$
\begin{bmatrix} u_{ex}(x,y) \\ u_{ey}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{e1}(x,y) & 0 & N_{e2}(x,y) & 0 & N_{e3}(x,y) & 0 \\ 0 & N_{e1}(x,y) & 0 & N_{e2}(x,y) & 0 & N_{e3}(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ex1} \\ u_{ey1} \\ u_{ex2} \\ u_{ey2} \\ u_{ex3} \\ u_{ey3} \end{bmatrix}
$$

ひずみは次式で定義されるが、次の最後の式から座標によらず一定となることが分かる。

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x,y) \\ \varepsilon_y(x,y) \\ \gamma_{xy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ex}(x,y) \\ u_{ey}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{e1} & 0 & N_{e2} & 0 & N_{e3} & 0 \\ 0 & N_{e1} & 0 & N_{e2} & 0 & N_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ex1} \\ u_{ey1} \\ u_{ex2} \\ u_{ey2} \\ u_{ex3} \\ u_{ey3} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_{e1}}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_{e2}}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_{e3}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_{e1}}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_{e2}}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_{e3}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_{e1}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_{e1}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{e2}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_{e2}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{e3}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_{e3}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ex1} \\ u_{ey1} \\ u_{ex2} \\ u_{ey2} \\ u_{ex3} \\ u_{ey3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e & 0 & b_2^e & 0 & b_3^e & 0 \\ 0 & c_1^e & 0 & c_2^e & 0 & c_3^e \\ c_1^e & b_1^e & c_2^e & b_2^e & c_3^e & b_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ex1} \\ u_{ey1} \\ u_{ex2} \\ u_{ey2} \\ u_{ex3} \\ u_{ey3} \end{bmatrix}
$$



x 方向変位モデル

y 方向変位モデル

応力はひずみから次式で表され、一つの三角形要素内では座標によらず一定となる。

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ D_{12} & D_{22} & D_{23}\\ D_{13} & D_{23} & D_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ D_{12} & D_{22} & D_{23}\\ D_{13} & D_{23} & D_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1^e & 0 & b_2^e & 0 & b_3^e & 0\\ 0 & c_1^e & 0 & c_2^e & 0 & c_3^e\\ c_1^e & b_1^e & c_2^e & b_2^e & c_3^e & b_3^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{ex1}\\ u_{ey1}\\ u_{ex2}\\ u_{ey2}\\ u_{ex3}\\ u_{ey3}\end{bmatrix}$$

$\equiv \mathbf{DB}_e\mathbf{u}_e$ と書き表す。

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ D_{12} & D_{22} & D_{23}\\ D_{13} & D_{23} & D_{33}\end{bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\cdots\text{平面応力状態}$$

$$\mathbf{D}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & \nu/(1-\nu) & 0\\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu)\end{bmatrix}\cdots\text{平面ひずみ状態}$$

<u>支配方程式</u>としては、仮想仕事の原理を用いる場合を示すと、微小仮想変位 $\mathbf{u}_e^*$ を与えると、仮想仕事の原理から、外力のする仕事と内部エネルギーの変化が等しいので、重力のように物体全体に働く外力を単位面積当り $\mathbf{f}_a$ 、境界に働く外力を単位長当り $\mathbf{f}_s$ として、

$$\int_{\Omega_e}\mathbf{u}_e^{*T}\mathbf{f}_a h_e dA+\int_{\Gamma}\mathbf{u}_e^{*T}\mathbf{f}_s h_e ds=\int_{\Omega_e}\boldsymbol{\varepsilon}^{*T}\boldsymbol{\sigma}h_e dA=\int_{\Omega}\mathbf{u}_e^{*T}\mathbf{B}_e^T\mathbf{DB}_e\mathbf{u}_e h_e dA$$

h_e は厚さ、$\int ds$ は境界に沿う線積分、$\int dA$ は要素内面積分

$\mathbf{u}_e^*$ は仮想変位でしかも任意の値であることから、上式が任意の微小仮想変位で成り立つためには、$\mathbf{u}_e^*$ を括り出したときの係数が0、

$$\mathbf{u}_e^{*T}\left[\int_{\Omega_e}\mathbf{f}_a h_e dA+\int_{\Gamma}\mathbf{f}_s h_e ds-\int_{\Omega}\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}\mathbf{B}_e\mathbf{u}_e h_e dA\right]=0$$

すなわち次式が成り立つ。

$$\int_{\Omega_e}\mathbf{f}_a h_e dA+\int_{\Gamma_e}\mathbf{f}_s h_e ds=\int_{\Omega}\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}\mathbf{B}_e\mathbf{u}_e h_e dA=A_e h_e\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}\mathbf{B}_e\mathbf{u}_e=\mathbf{K}_e\mathbf{u}_e$$

この左辺を$\mathbf{F}_e$ と書けば、$\mathbf{F}_e=\mathbf{K}_e\mathbf{u}_e$ の形になる。

ここで、$\mathbf{K}_e=A_e h_e\mathbf{B}_e^T\mathbf{D}\mathbf{B}_e$、$A_e$ は三角形の面積、h_e は厚さ
$\mathbf{K}_e$ は要素剛性行列と呼ばれる。
$\mathbf{B}_e$ は3行6列、$\mathbf{D}$は3行3列なので、$\mathbf{K}_e$は、$(6\times3)\times(3\times3)\times(3\times6)$ で6行6列となる。

三角形要素一つについて、上式が成り立つので、すべての三角形について、合成し、さらに、ディリクレ条件、ノイマン条件を考慮し、未知変位を求め、ひずみ、応力等を求める。