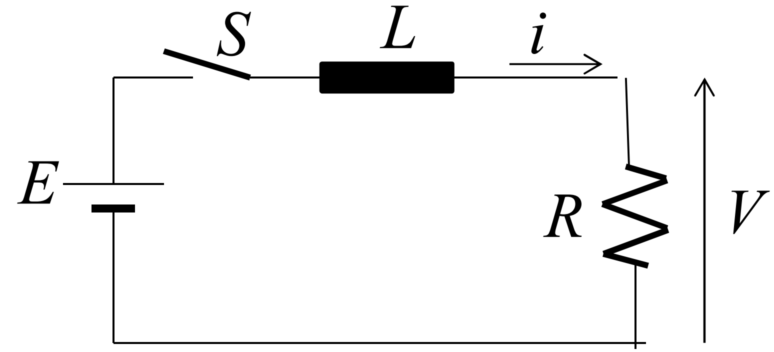
FDM, FEMの初歩

Keywords
支配方程式、フーリエの法則(熱流)、定常問題、非定常問題
ディリクレ条件、ノイマン条件
区間分割、一次微分の近似式、二次微分の近似式
弱形式、部分積分、グリーン・ガウスの定理
基底関数、近似関数、重み付き残差、ガラーキン法
残差積分、変数変換による任意三角形の直角三角形化(ξ,η,ζ)
要素合成、行列の加算

0 漸化式

0.1応用例　右図のようにリアクタンスを通して抵抗負荷につながる回路がある。
スイッチ投入後の負荷電圧の推移を計算する。



0.2 支配方程式

スイッチSを投入した後t秒後の電流をiとすれば次式が成り立つ。

$$E = L\frac{d\,i}{d\,t} + Ri,$$

0.3 漸化式による解法

時間 t を 微小時間 h 秒ごとに区切りそれに対応する電流に 番号nを付け i_n

とする。支配方程式の微分を近似的に差分に置き換えると、

$$\frac{d\,i}{d\,t} \approx \frac{\boldsymbol{i_{n+1} - i_n}}{\boldsymbol{t_{n+1} - t_n}} = \frac{\boldsymbol{i_{n+1} - i_n}}{\boldsymbol{h}}$$

$$\frac{\boldsymbol{i_{n+1} - i_n}}{\boldsymbol{h}} + \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{i_n} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{L}}$$

これから、

$$\boldsymbol{i_{n+1} = i_n(1 - Rh/L) + Eh/L \cdots A}$$

$\boldsymbol{t} = 0$ において、$\boldsymbol{S}$を投入した瞬間には回路中の$\boldsymbol{L}$の存在のため、電流は流れない。すなわち、$\boldsymbol{i_0} = 0$ である。

$E = 10[V],\ L = 1.25\ [H],$

$R = 2.5[\Omega],\ h = 0.01$ [[秒]

とすると、式 A は、

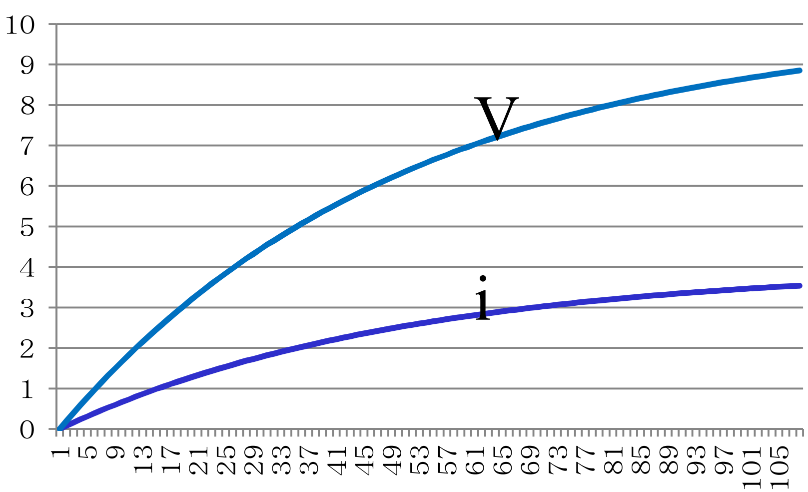
$$1 - Rh/L = 1 - 2.5 \times 0.01 / 1.25 = 0.98$$

$$Eh/L = 10 \times 0.01 / 1.25 = 0.08$$

$$i_{n+1} = 0.98\, i_n + 0.08$$

$$V_n = 2.5 \times i_n$$

$i_0 = 0$ から出発して計算しグ ラフに表示すると下図のようにな る。



t	i	V
0	0	0
0.01	0.08	0.2
0.02	0.1584	0.396
0.03	0.235232	0.58808
0.04	0.310527	0.776318
0.05	0.384317	0.960792
0.06	0.45663	1.141576
0.07	0.527498	1.318745
0.08	0.596948	1.49237
0.09	0.665009	1.662522
0.1	0.731709	1.829272
0.11	0.797075	1.992686
0.12	0.861133	2.152833
0.13	0.92391	2.309776
0.14	0.985432	2.463581
0.15	1.045724	2.614309
0.16	1.104809	2.762023
0.17	1.162713	2.906782
0.18	1.219459	3.048647
0.19	1.27507	3.187674
1.02	3.490529	8.726322
1.03	3.500718	8.751795
1.04	3.510704	8.776759
1.05	3.52049	8.801224
1.06	3.53008	8.8252
1.07	3.539478	8.848696

漸化式方式 (次数が高い場合)

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} \approx \frac{\theta_{n+2} - 2\theta_{n+1} + \theta_n}{h^2} \cdots B$$ (2次微分の例)

支配方程式を離散化方式で書き表す。

支配方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = r$$

この形の支配方程式は、$\theta = \theta' + r/q$と書き直せば

$$\frac{d^2(\theta' + r/q)}{dt^2} + p\frac{d(\theta' + r/q)}{dt} + (q\theta' + r) = r$$

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + p\frac{d\theta'}{dt} + q\theta' = 0$$

あらためて、θ'をθと書き直して

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0$$ と書き表すことにする。

離散化し漸化式方式で 解を求める。

$$\frac{\theta_{n+2} - 2\theta_{n+1} + \theta_n}{h^2} + p\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{h} + q\theta_n = 0$$

$$\theta_{n+2} = (2 - ph)\theta_{n+1} + (ph - qh^2 - 1)\theta_n \quad C$$

C式の右辺に既知の **2**個のデータを与えると左辺の値がき まる。境界条件（初期条件）として**2**個のデータが必要である。通 常、**2**点の数値か、**1**点の値と勾配が与えら れる。

漸化式方式では、 nが大きくなるほど誤差が累積するとい う問題があり、そのため hを極力小さくとるなど の工夫が必要となる。

1.差分法(FDM: Finite Difference Method)

.

1.1 支配方程式の確認

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+p\frac{d\theta}{dx}+q\theta=0\cdots$$定常状態

$\theta=\theta(x)\cdots$棒の位置 x における温度など。

1.2.区間分割(n等分, 区間幅=h)

長さ方向に n 等分する(またはh=Δt)
連続問題を離散化して近似解を求める。

1.3. FDM(Finite difference Method差分法)

$$\frac{d\theta}{dx}\approx\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{h}\cdots A$$ (1 次微分の場合)

または、

$$\frac{d\theta}{dx}\approx\frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2h}$$ など、$h=\Delta x$

$i=1,2,\cdots,n,n+1$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}\approx\frac{\theta_{i+2}-2\theta_{i+1}+\theta_i}{h^2}\cdots B$$ (2次微分の場合)

または、

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}\approx\frac{\theta_{i+1}-2\theta_i+\theta_{i-1}}{h^2}$$ など

$i=1,2,\cdots,n,n+1$

A,Bを支配方程式に代入し昇順に整理。

$$\frac{\theta_{i+2}-2\theta_{i+1}+\theta_i}{h^2}+p\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{h}+q\theta_i=0$$

$$\left(qh^2-ph+1\right)\theta_i+\left(ph-2\right)\theta_{i+1}+\theta_{i+2}=0$$

$$\begin{bmatrix} qh^2-ph+1 & ph-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_i\\ \theta_{i+1}\\ \theta_{i+2}\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} a & b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_i\\ \theta_{i+1}\\ \theta_{i+2}\end{bmatrix}=0$$

$a=qh^2-ph+1$
$b=ph-2,$

境界条件： $\theta_1=$既知、

および $\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_n\approx\frac{\theta_{n+1}-\theta_n}{h}=0\rightarrow\theta_{n+1}-\theta_n=0$

これを元に全体行列を 形成する。

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

θ_1は既知なので1 行 1 列を右辺に移項して、これから、次のように多元 1 次方程式を解いて解を求める。

$$\begin{bmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a\theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

漸化式として解く方法

運動方程式の形では、$h = \Delta t$として、

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \cdots C$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^2} \cdots D$$

$i = 1, 2, \cdots, n, n+1$

C, Dを支配方程式に代入する。

$$\frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^2} + p\frac{x_{i+1} - x_i}{h} + qx_i = 0$$

$$\begin{aligned} x_{i+2} &= (2 - ph)x_{i+1} + (ph - qh^2)x_i \\ &= a' x_{i+1} + b' x_i + c' \end{aligned}$$

初期条件：$t = 0$のとき、$x_1 = x_0$,

および $\dfrac{dx}{dt} = 0 \to x_2 = x_1$

$\to$ *Excel* などの表計算で逐次計算

2 .FEM(Finite Element Method 有限要素法)

支配方程式

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+p\frac{d\theta}{dx}+q\theta=0\cdots \text{定常状態}$$

$$\theta=\theta(x)$$

$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+p\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+q\theta=r\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\cdots(1)\begin{array}{c}\text{時間的に変化}\\(\text{非定常問題})\end{array}\\ \theta=\theta(x,t),x\to FEM,\ t\to FDM\end{array}\right)$$

近似解をθ'とすると、残差は

$$\frac{d^2(\theta'-\theta)}{dx^2}+p\frac{d(\theta'-\theta)}{dx}+q(\theta'-\theta)$$

$$=\left(\frac{d^2\theta'}{dx^2}+p\frac{d\theta'}{dx}+q\theta'\right)-\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}+p\frac{d\theta}{dx}+q\theta\right)$$

$$=\left(\frac{d^2\theta'}{dx^2}+p\frac{d\theta'}{dx}+q\theta'\right)$$

重み(w)付き残差の全区間積分値、即ち、

$\int_0^L w\left(\frac{d^2\theta'}{dx^2}+p\frac{d\theta'}{dx}+q\theta'\right)dx$ が 0 となるようにθ'を決め誤差分布もある程度調整できる。

区間分割と基底関数設定

FEM 補足 1-1 参照

n 等分し区間幅 h , テント形関数 $N_i(x)$ を決める。

近似関数と重み関数の設定

$$\theta'=\begin{bmatrix}N_1(x) & N_2(x) & \cdots & N_{n+1}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1'\\ \theta_2'\\ \vdots\\ \theta_{n+1}'\end{bmatrix}$$

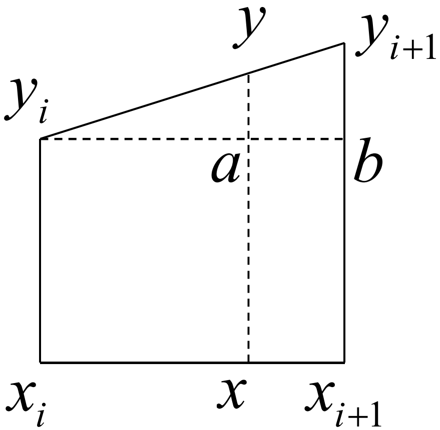
重み関数 : ガラーキン法。

$$w=\begin{bmatrix}\Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1(x)\\ N_2(x)\\ \vdots\\ N_{n+1}(x)\end{bmatrix}$$

Φ_i は任意の数値とする。θ_k が既知のとき(ディリクレ条件)$\Phi_k=0$とする。

$N_i(x)$は最大値が 1 のテント形の関数である。

折れ線近似と基底関数



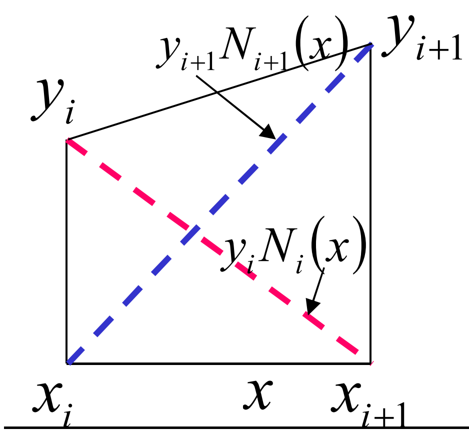
三角形$y_i ay$ と 三角形$y_i b y_{i+1}$ は相似形

$$\therefore \frac{y-y_i}{x-x_i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}$$、これから、

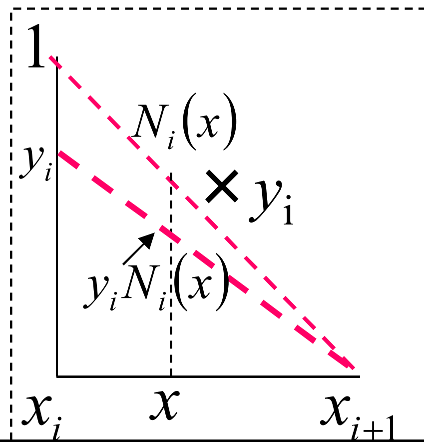
$$y=y_i+\left(y_{i+1}-y_i\right)\times\frac{x-x_i}{h}=y_i\times\frac{x_{i+1}-x}{h}+y_{i+1}\times\frac{x-x_i}{h}$$

$$\equiv y_i\times N_i(x)+y_{i+1}\times N_{i+1}(x)$$ (中段の図参照)

$$N_i(x_i)=1,\ N_i(x_{i+1})=0,\ N_{i+1}(x_i)=0,\ N_{i+1}(x_{i+1})=1$$

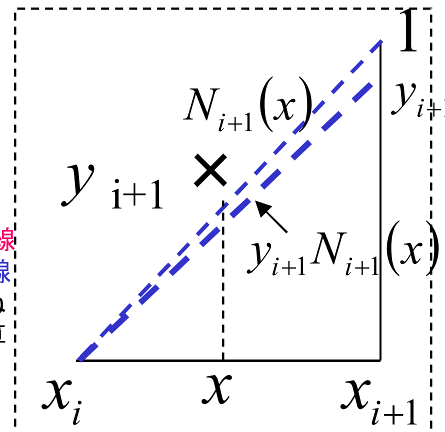


＝

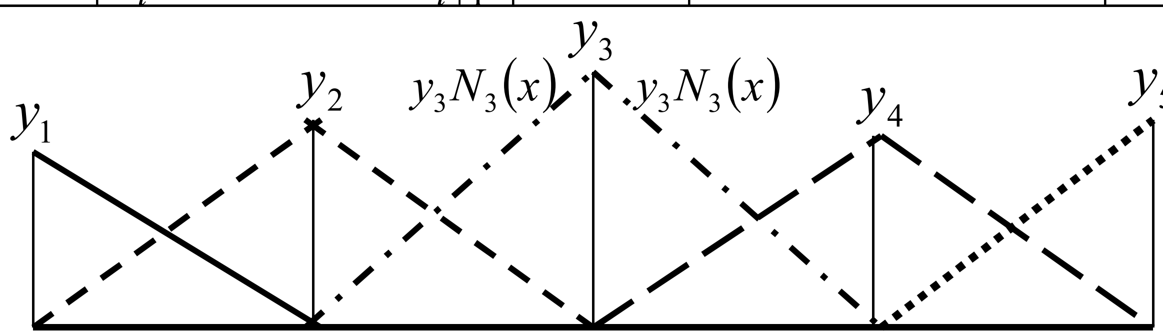


＋

赤の太い鎖線と青の太鎖線のX軸を重ねY方向に加算する



一つの頂点、節点は
二つの区間に
関係する。→合成



残差積分式の変形　弱形式化

$$\int_0^L w\left(\frac{d^2\theta'}{dx^2}+p\frac{d\theta'}{dx}+q\theta'\right)dx$$

$$=\left[w\frac{d\theta'}{dx}\right]_0^L-\int_0^L\frac{dw}{dx}\frac{d\theta'}{dx}dx+$$

$$+p\int_0^L w\frac{d\theta'}{dx}dx+q\int_0^L w\theta' dx=0$$

書き直すと、

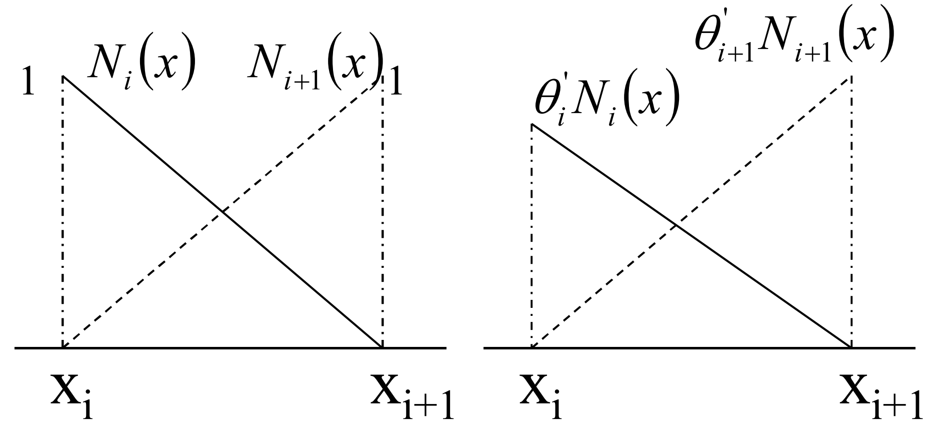
$$\int_0^L\frac{dw}{dx}\frac{d\theta'}{dx}dx-p\int_0^L w\frac{d\theta'}{dx}dx-q\int_0^L w\theta' dx$$

$$=\left[w\frac{d\theta'}{dx}\right]_0^L$$

一つの区間での積分、

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dw}{dx}\frac{d\theta'}{dx}dx-p\int_{x_i}^{x_{i+1}}w\frac{d\theta'}{dx}dx-$$

$$-q\int_{x_i}^{x_{i+1}}w\theta' dx=\left[w\frac{d\theta'}{dx}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$



この区間では、

$$N_i(x)=\frac{x_{i+1}-x}{h},$$

$$N_{i+1}(x)=\frac{x-x_i}{h}$$

左辺第1項

$$\frac{dw}{dx}=\begin{bmatrix}\Phi_i & \Phi_{i+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/h\\ 1/h\end{bmatrix}$$

$$\frac{d\theta'}{dx}=\begin{bmatrix}-1/h & 1/h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'_i\\ \theta'_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$\frac{dw}{dx}\frac{d\theta'}{dx}=\begin{bmatrix}\Phi_i & \Phi_{i+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/h\\ 1/h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/h & 1/h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'_i\\ \theta'_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\Phi_i & \Phi_{i+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/h^2 & -1/h^2\\ -1/h^2 & 1/h^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'_i\\ \theta'_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dw}{dx}\frac{d\theta'}{dx}dx=\begin{bmatrix}\Phi_i & \Phi_{i+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/h & -1/h\\ -1/h & 1/h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'_i\\ \theta'_{i+1}\end{bmatrix}$$

以下略