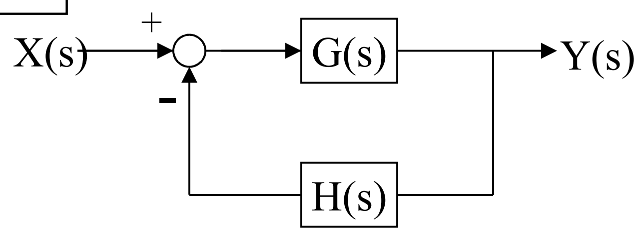
# 制御系の安定判定

1. 系の安定性
2. 安定性の判定法
2.1 ラウス　フルビッツの定理
2.2 ナイキストの方法
付録　回転方向が逆のナイキスト法
　　　ナイキスト法の簡便法


参考資料
及川多喜雄、「制御系の数学」 内田老鶴園
藤井隆雄、「制御理論」 オーム社
宮崎道雄、「システム制御Ⅱ」IEEJ、オーム社
電気工学ハンドブック
R.C. Dorf & R.H. Bishop,"Modern Control Systems", Prentice Hall

# 1. 系の安定性




上図のような負帰還(*negative feedback*)制御系では、

$$Y(s)=X(s)\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}=X(s)T(s)\cdots(1)$$

が成り立つ。

$X(s)$は入力、$Y(s)$は出力、$T(s)$は伝達関数である。

$X(s)$は、単位インパルスでは1、単位階段状入力(*unit step input*)では、$1/s$、単位速度入力 $x=t$ では、$1/s^2$ である。

伝達関数 $T(s)$ において $m<n$ すなわち分母の次数の方が高く次のように表すことが出来るとする。

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}=\frac{c_m s^m+\cdots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\cdots(2)$$

$$=\frac{c_m(s-z_1)\cdots(s-z_i)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_k)\cdots(s-p_n)}\cdots p_k\neq z_i\cdots(3)$$

$z_i : i=1\cdots m$ を零点、$p_k : k=1\cdots n$ を極という。

$(2)$ の分母 $s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$

を特性方程式といい、$p_k$ はその解である。

このとき、

$$T(s)=\frac{\alpha_1}{s-p_1}+\cdots+\frac{\alpha_k}{s-p_k}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-p_n}\cdots(4)$$

と表すことができる。

(4)式は、入力が単位インパルスすなわち衝撃であるときの応答に等しく、時間領域の解は、次式の形になる。

$$y(t)=\alpha_1\varepsilon^{p_1 t}+\cdots+\alpha_k\varepsilon^{p_k t}+\cdots+\alpha_n\varepsilon^{p_n t}\cdots(5)$$

$p_k=u_k+jv_k$ と置くと、$\varepsilon^{p_k t}=\varepsilon^{u_k t}\varepsilon^{jv_k t}$ と書ける。

ここで、$\varepsilon^{jv_k t}=\cos v_k t+j\sin v_k t$ は振動項であり $\pm 1$ の範囲内にある。なお、$u+jv$ が特性方程式の根であるとき、$u-jv$ も根になり、時間領域の解は実数解になる。

$u_k>0$ のとき、$\varepsilon^{u_k t}$は、時間の経過とともに指数関数で増大し$\varepsilon^{p_k t}$は発散振動になるので不安定。

(4)式に$1/s^{k'}$ $(k'\geq 2)$があると、解に$t^{k'-1}$を含み不安定。

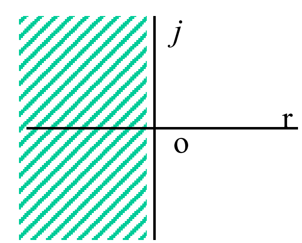
$1/(s-p_k)^{k'}$があると、解に$t^{k'-1}\varepsilon^{p_k t}$を含むが、$p_k\neq 0$ では指数関数の項が支配的で$\varepsilon^{p_k t}$の安定性で決まる。

すなわち、この系が安定であるためには、すべての $u_k<0$、すなわち、すべての $p_k$ の実数部が負でなければならない。

(3)式でいえば、$T(s)$ のすべての極 $p_k$ が複素平面の左半面になければならない( $\mathrm{Re}(p_k)<0$ )。

これが安定条件である。

特性方程式の解がj軸を除く左半面上にあることが安定条件である。



# 2. 安定性の判定法
## 2.1 ラウス　フルビッツの定理

実数係数の代数方程式 $\tau(s)=0$ の根が複素平面の左半面にあるための必要十分条件は、
$D_0, D_1, D_2, \cdots D_n$ がすべて正になることである。
$\tau(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s + a_0 = 0$ とすると、
$D_0=a_n,\ D_1=a_{n-1},$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3}\\ a_n & a_{n-2}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5}\\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4}\\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix},\cdots,\cdots(6)$$

(この証明は専門書を参照して下さい)

[例 1]
$\tau(s)=0.2s^3+2.1s^2+s(1+0.05K)+K$
が安定となる条件を求める。
$D_0=0.2>0,\ D_1=2.1>0,$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2.1 & K\\ 0.2 & 1+0.05K\end{vmatrix}=2.1(1+0.05K)-0.2K$$
$$=2.1-0.095K>0\rightarrow K<22.105263\cdots$$

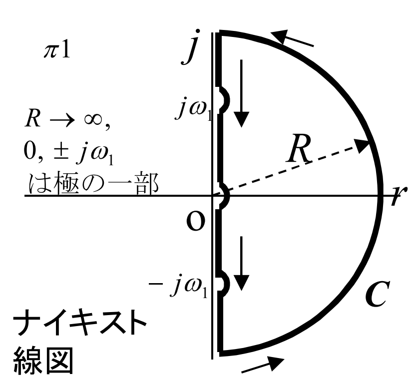
[例 2]
$\tau(s)=s^2+2s+3$
$D_0=1>0,\ D_1=2>0,$

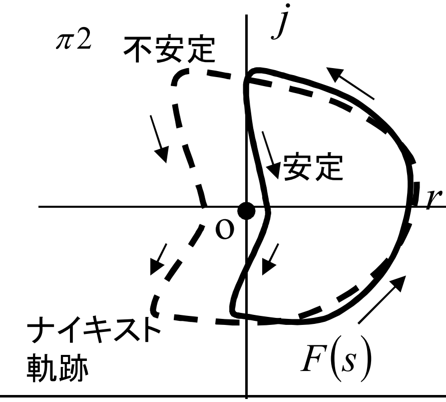
$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6>0$$

よって安定。
(参考 $\tau(s)=0\rightarrow s=-1\pm j\sqrt{2}$)

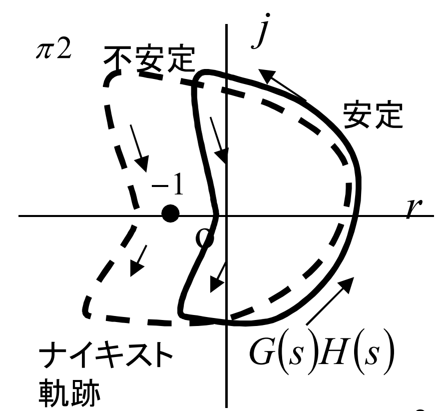
## 2.2 ナイキストの方法

$T(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ の分母 $1+G(s)H(s)\equiv F(s)$ について、考える。安定性の判定は、$s$ が下図 $\pi 1$ 平面の右半面を($j$ 軸上の極があればそれを避けて)正の向きに周回したとき、$\pi 2$ 平面上に描いた $F(s)$ の軌跡が原点の周りを回らなければ安定、原点の周りを正の向きに回れば不安定とする。(回転方向を逆向きにとる事もある…付録)
$F(s)$ の代わりに $G(s)H(s)$ をとれば、その軌跡の点(−1, 0)のまわりの回転について上と同じく判定する。



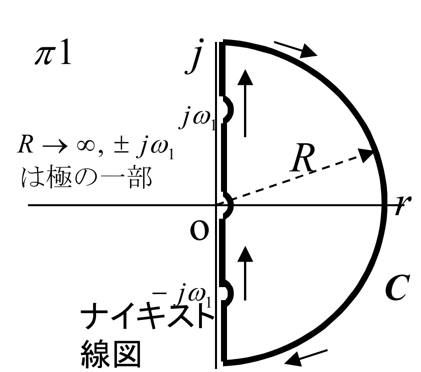

右図
$F(s)$ の代わりに、$G(s)H(s)$ をとれば, $F(s)=0$ は、
$G(s)H(s)=F(s)-1=-1\cdots(7)$
となるので, $\pi 2$ 上で、
$G(s)H(s)$ が点 −1(-1,0) の周りを正の向きに(−1を左に見て)回らなければ安定と判定する。

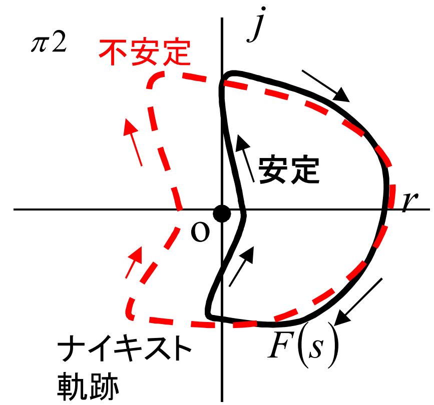


## 付録　回転方向が逆の ナイキストの方法

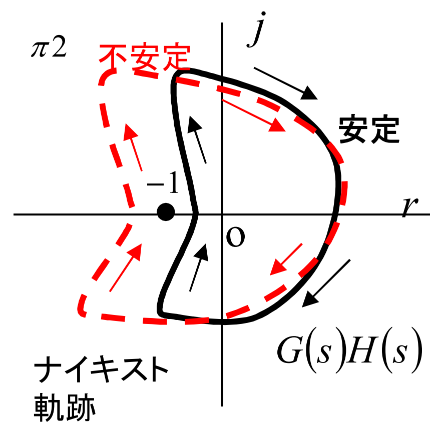
電気工学ハンドブックをはじめ、最近の出版物には、$\pi 1$ 平面の回転方向を右回り（時計式）にとるものが主流になっている。
次頁の簡便法で、虚軸上を下から上に移動するのにあわせて標準化したものと考えられる。
安定性判別では、$\pi 2$ 平面上の回転を左回り（反時計式）の場合の逆に考えればよい。

これまでと同様に、$T(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ の分母 $1+G(s)H(s)\equiv F(s)$ について考える。
安定性の判定は、$s$ が右上図 $\pi 1$ 平面の右半面を( $j$ 軸上の極があればそれを内部に含まぬように避けて)時計式に周回したとき、$\pi 2$ 平面上に描いた $F(s)$ の軌跡が原点の周りを時計式に（原点を右に見て）回らなければ安定、原点の周りを時計式に回れば不安定とする。
$F(s)$ の代わりに $G(s)H(s)$ をとれば、その軌跡の点$(-1, 0)$のまわりの回転について上と同じく判定する。
$N=Z-P$ で、$Z=0$ が安定条件、通常は $P=0$
$\rightarrow N=0$
$P=P_0$ なら、$N=-P_0$ (反時計式に $P_0$ 回)
$N$ : 時計式回転数、$Z$ : 右半面にある零点の数
$P$ : 右半面にある極の数




右図
$F(s)$の代わりに、$G(s)H(s)$をとれば, $F(s)=0$ は、
$G(s)H(s)=F(s)-1=-1 \cdots (7)$
となるので, $\pi 2$ 上で、
$G(s)H(s)$が点 $-1(-1,0)$
の周りを時計式に
$(-1$を右に見て$)$回らなければ安定と判定する。



# 付録　ナイキストの方法の簡便法

$\pi 1$ 平面の左半平面全体を囲むこれまでの方法の簡便法として、虚軸上の移動のみを対象とする簡便法が実際にはよく用いられている。

この理由は、周波数応答の計算が簡単なことが一つある。また、$G(s)H(s)$を分数で表示した時分母の次数の方が高いので、右半平面の半径$R$の半円の部分は、$\pi 2$ 上の軌跡としては原点の周りの微小な円周上に移り、殆ど無視しても良いことがある。

また､$\pi 1$ 上の原点が極の一つである場合は､原点を囲む微小半円は、分母の次数の方が高いので、$\pi 2$上では大きな円周状となるが殆ど実軸上では$-1$から遠い区域にあることが多い。

$s = j\omega$ の場合と、$s = -j\omega$ の場合とでは実軸に対して対称となるので、$s = j\omega$のみに対応する軌跡で､$\omega = 0$ から、$\omega \to \infty$ までの$G(s)H(s)$ の軌跡が、実軸を横切る時､$-1$ を右に見て通らなければ安定と判定する。

もちろん、$s = -j\omega$ の軌跡を見ることもある。