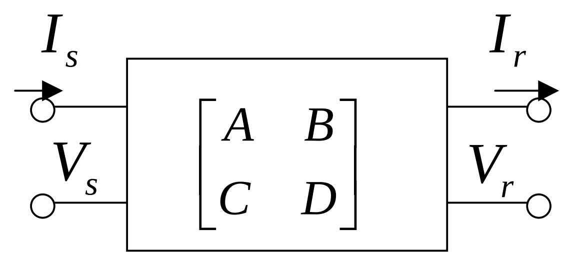
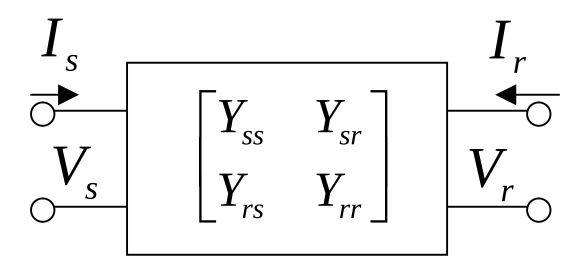
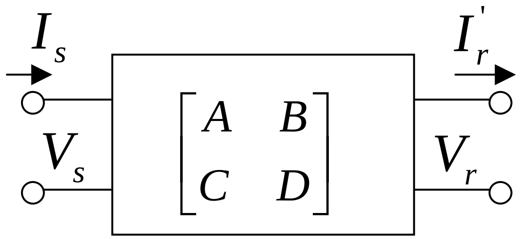
# 四端子回路の
# 四端子定数とY行列

**<u>要注意事項</u>**
四端子定数方式では、$I_r$ の向きは端子から流出方向が正、
Y 行列方式では電流はすべて端子への流入方向が正。



## 1．四端子定数を求める




$$V_s = AV_r + BI_r'$$

$$I_s = CV_r + DI_r'$$

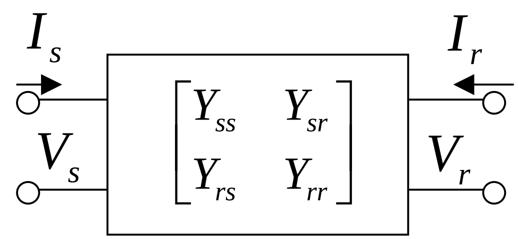
これから、

$$A = \left[\frac{V_s}{V_r}\right]_{I_r'=0},\ C = \left[\frac{I_s}{V_r}\right]_{I_r'=0}$$ ，無負荷時

$$B = \left[\frac{V_s}{I_r'}\right]_{V_r=0},\ D = \left[\frac{I_s}{I_r'}\right]_{V_r=0}$$ 、短絡時

また、$AD - BC = 1$ が成り立つことを利用することもできる。

## 2. Y行列を求める




$$I_s = Y_{ss}V_s + Y_{sr}V_r$$

$$I_r = Y_{rs}V_s + Y_{rr}V_r$$

これから、

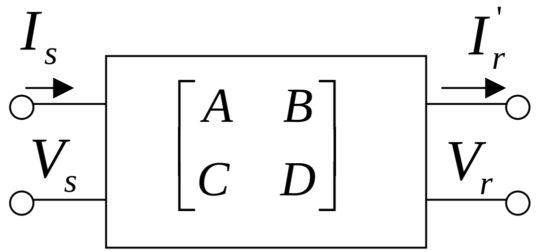
$$Y_{ss} = \left[\frac{I_s}{V_s}\right]_{V_r=0},\ Y_{rs} = \left[\frac{I_r}{V_s}\right]_{V_r=0}$$ 、無負荷時

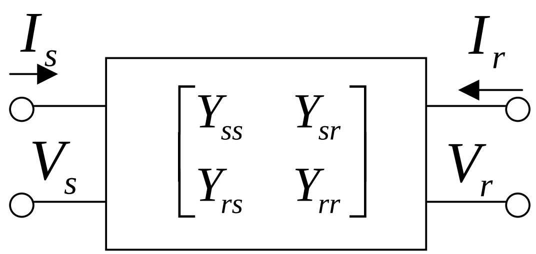
$$Y_{sr} = \left[\frac{I_s}{V_r}\right]_{V_s=0},\ Y_{rr} = \left[\frac{I_r}{V_r}\right]_{V_s=0}$$ 、短絡時

通常、$Y_{sr} = Y_{rs}$ である。

# 3. 四端子定数からY行列への変換

四端子定数方式では、$I_r$ の向きは端子から流出方向が正、Y 行列方式では電流はすべて端子への流入方向が正。




$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r' \end{bmatrix}$$

これを$Y$行列方式に変換する。

$$V_s = AV_r + BI_r' \leftrightarrow I_r' = \frac{1}{B} V_s - \frac{A}{B} V_r$$

$$I_s = CV_r + DI_r' \leftrightarrow I_s = \frac{D}{B} V_s - \frac{AD - BC}{B} V_r$$

$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D/B & -\left(AD - BC\right)/B \\ 1/B & -A/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

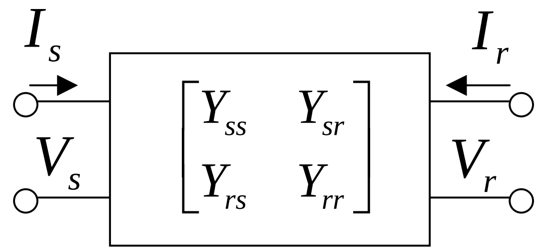
$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ -I_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D/B & -1/B \\ -1/B & A/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix}$$

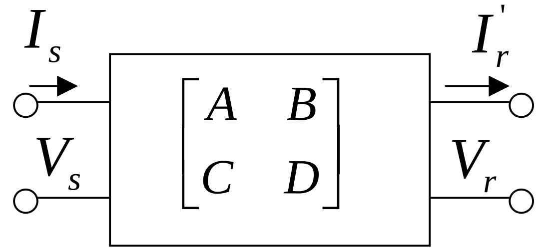
$AD - BC = 1$ であるから、$\underline{Y_{ss} = D/B,\ Y_{sr} = Y_{rs} = -1/B,\ Y_{rr} = A/B}$

# 4. Y行列から四端子定数への変換

四端子定数方式では、$I_r$ の向きは端子から流出方向が正、
Y 行列方式では電流はすべて端子への流入方向が正。

$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix}$$




四端子定数方式に変換してみる。

$$I_r = Y_{rs} V_s + Y_{rr} V_r \leftrightarrow V_s = \frac{-Y_{rr}}{Y_{rs}} V_r + \frac{1}{Y_{rs}} I_r$$

$$I_s = Y_{ss} V_s + Y_{rr} V_r = \frac{-Y_{ss} Y_{rr}}{Y_{rs}} V_r + \frac{Y_{ss}}{Y_{rs}} I_r + Y_{sr} V_r$$

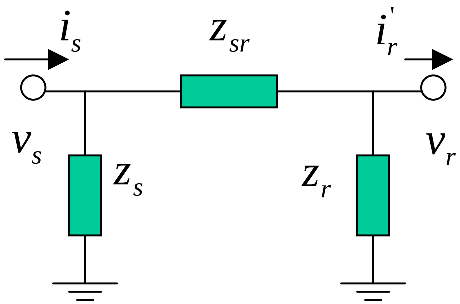
$$= \left( \frac{Y_{sr} Y_{rs} - Y_{ss} Y_{rr}}{Y_{rs}} \right) V_r + \frac{Y_{ss}}{Y_{rs}} I_r, \quad I_r' = -I_r$$ と書き直して、

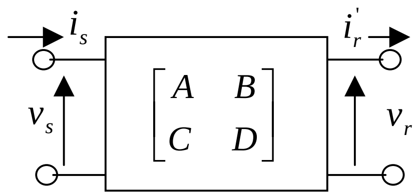
$$V_s = \frac{-Y_{rr}}{Y_{rs}} V_r - \frac{1}{Y_{rs}} I_r', \; I_s = \left( \frac{Y_{sr} Y_{rs} - Y_{ss} Y_{rr}}{Y_{rs}} \right) V_r - \frac{Y_{ss}}{Y_{rs}} I_r'$$

$$\underline{A = -Y_{rr} / Y_{rs}, \; B = -1 / Y_{rs}, C = \left( Y_{sr} Y_{rs} - Y_{ss} Y_{rr} \right) / Y_{rs}, \; D = -Y_{ss} / Y_{rs}}$$

## （1）$\pi$ 形回路($L$ 形回路、単純 $Z$ を含む)

### 四端子定数方式




$$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+z_{sr}/z_r & z_{sr} \\ 1/z_s+1/z_r+z_{sr}/z_s z_r & 1+z_{sr}/z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r' \end{bmatrix}$$

導出過程

$$A=\left(\frac{v_s}{v_r}\right)_{i_r'=0} = \frac{z_{sr}+z_r}{z_r} = 1+z_{sr}/z_r$$

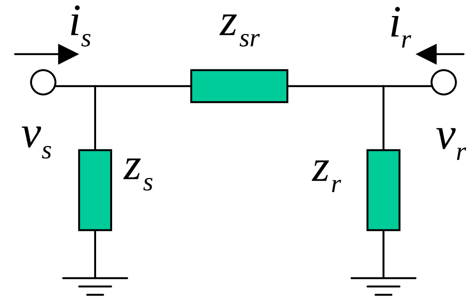
$$C=\left(\frac{i_s}{v_r}\right)_{i_r'=0}, v_r = i_s z_s/(z_s+z_{rs}+z_r)\times z_r$$

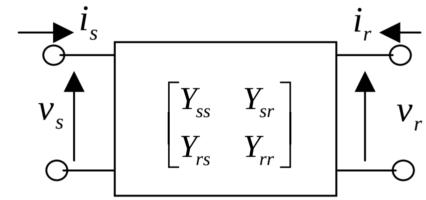
$$\therefore C=(z_s+z_{rs}+z_r)/z_s z_r = 1/z_s+1/z_r+z_{sr}/z_s z_r$$

$$B=\left(\frac{v_s}{i_r'}\right)_{v_r=0} = \frac{v_s}{v_s/z_{sr}} = z_{sr},\ D=\left(\frac{i_s}{i_r'}\right)_{v_r=0}$$

$$i_r' = i_s\frac{z_s}{z_s+z_{sr}},\ \therefore D=1+z_{sr}/z_s$$

### Y行列方式




$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_s}+\frac{1}{z_{sr}} & -\frac{1}{z_{sr}} \\ -\frac{1}{z_{sr}} & \frac{1}{z_r}+\frac{1}{z_{sr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

導出過程

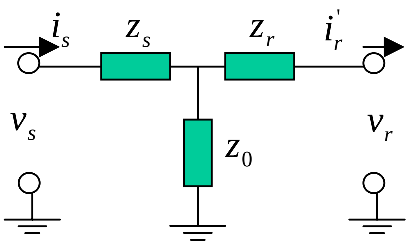
$$Y_{ss}=\left(\frac{i_s}{v_s}\right)_{v_r=0} = \frac{1}{z_s}+\frac{1}{z_{sr}},\ Y_{rs}=\left(\frac{i_r}{v_s}\right)_{v_r=0} = -\frac{1}{z_{sr}}$$

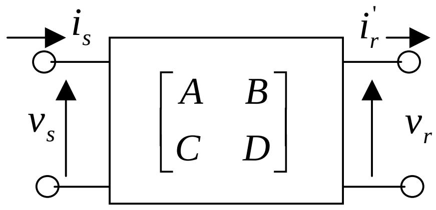
$$Y_{sr}=\left(\frac{i_s}{v_r}\right)_{v_s=0} = -\frac{1}{z_{sr}} = Y_{rs},\ Y_{rr}=\left(\frac{i_r}{v_r}\right)_{v_s=0} = \frac{1}{z_r}+\frac{1}{z_{sr}}$$

$AD-BC=(1+z_{sr}/z_r)(1+z_{sr}/z_s)-z_{sr}(1/z_s+1/z_r+z_{sr}/z_s z_r)=1$
$z_s$, $z_r$ の一つを∞にすれば $L$ 形回路、両方を∞にすれば単純 $Z$ 形回路となる。

(2) T形回路

## 四端子定数方式




$$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+z_s/z_0 & z_s+z_r+z_s z_r/z_0 \\ 1/z_0 & 1+z_r/z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r' \end{bmatrix}$$

導出過程

$$A = \left(\frac{v_s}{v_r}\right)_{i_r'=0} = \frac{z_0+z_s}{z_0} = 1+z_s/z_0,$$

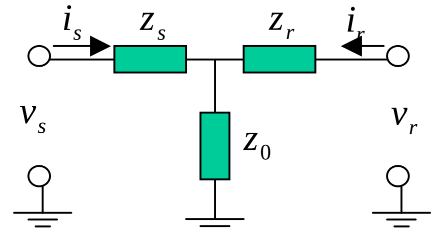
$$C = \left(\frac{i_s}{v_r}\right)_{i_r'=0}, v_r = i_s z_0, \therefore C = 1/z_0$$

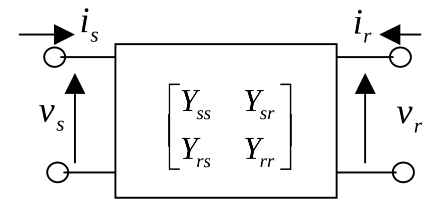
$$B = \left(\frac{v_s}{i_r'}\right)_{v_r=0} = z_s + z_r + \frac{z_s z_r}{z_0}$$

$$\because i_r' = i_s \frac{z_0}{z_0+z_r} = \frac{v_s}{z_s + z_0 z_r/(z_0+z_r)} \frac{z_0}{z_0+z_r}$$

$$D = \left(\frac{i_s}{i_r'}\right)_{v_r=0} = \frac{z_0+z_r}{z_0} = 1 + \frac{z_r}{z_0},$$ なお $AD - BC = 1$

## Y行列方式




$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \frac{1}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} \begin{bmatrix} z_r + z_0 & -z_0 \\ -z_0 & z_s + z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

導出過程

$$Y_{ss} = \left[\frac{i_s}{v_s}\right]_{v_r=0} = \frac{z_0+z_r}{z_0 z_s + z_0 z_r + z_s z_r}$$

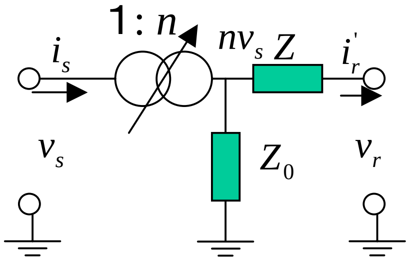
$$\because v_s = i_s\left(z_s + \frac{z_0 z_r}{z_0+z_r}\right) = i_s\left(\frac{z_0 z_s + z_0 z_r + z_s z_r}{z_0+z_r}\right)$$

$$Y_{rs} = \left[\frac{i_r}{v_s}\right]_{v_r=0} = \frac{-z_0}{z_0 z_s + z_0 z_r + z_s z_r} = Y_{sr}$$

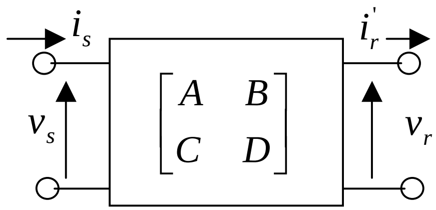
$$\because i_r = -i_s \frac{z_0}{z_0+z_r} \rightarrow \frac{i_r}{i_s} = -\frac{z_0}{z_0+z_r}$$

$$, Y_{rr} = \left[\frac{i_r}{v_r}\right]_{v_s=0} = \frac{z_0+z_s}{z_0 z_s + z_0 z_r + z_s z_r}$$ (対称性から)

## (3) 変圧器等価回路




**四端子定数方式**




$$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n & z/n \\ n/z_0 & n(1+z/z_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_r \\ i_r' \end{bmatrix},$$

$$(z_0 \to \infty \text{のとき})\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n & z/n \\ 0 & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_r \\ i_r' \end{bmatrix}$$

導出過程

$$A = \left(\frac{v_s}{v_r}\right)_{i_r'=0} = \frac{1}{n}, \quad \because v_r = nv_s$$

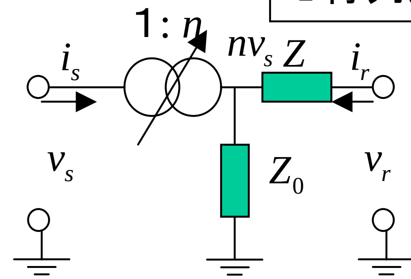
$$C = \left(\frac{i_s}{v_r}\right)_{i_r'=0}, v_r = i_s z_0 / n, \therefore C = n / z_0$$

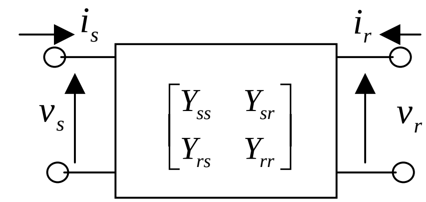
$$B = \left(\frac{v_s}{i_r'}\right)_{v_r=0} = \frac{z}{n}, \quad \because i_r' = \frac{nv_s}{z}$$

$$D = \left(\frac{i_s}{i_r'}\right)_{v_r=0} = \frac{n(z_0+z)}{z_0}, \because \frac{i_s}{n}\frac{z_0}{z_0+z} = i_r',$$

なお$AD - BC = 1$となる。

**Y行列方式**




$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^2(1/z_0 + 1/z) & -n/z \\ -n/z & 1/z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

$$(z_0 \to \infty \text{のとき})\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^2/z & -n/z \\ -n/z & 1/z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

導出過程

$$i_r = \frac{v_r - nv_s}{z} = -\frac{n}{z}v_s + \frac{1}{z}v_r, \; Y_{rs} = -\frac{n}{z}, Y_{rr} = \frac{1}{z}$$

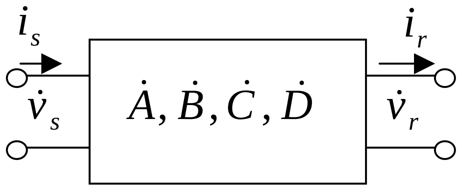
$$\frac{i_s}{n} = \frac{nv_s}{z_0} - i_r = \frac{nv_s}{z_0} - \frac{v_r - nv_s}{z},$$

$$\to i_s = \frac{n^2 v_s}{z_0} - \frac{nv_r - n^2 v_s}{z} = n^2\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right)v_s - \frac{nv_r}{z}$$

$$\therefore Y_{ss} = n^2\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right), Y_{sr} = -\frac{n}{z} = Y_{rs}$$

## (4) 分布定数回路

四端子定数




分布定数回路では、

$$\dot{A} = \cosh \dot{\gamma} l = \dot{D},$$

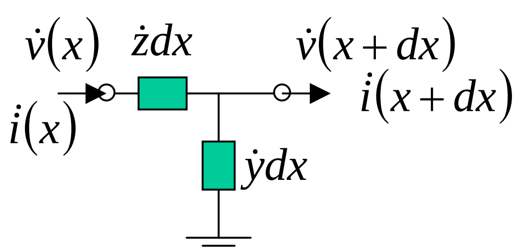
$$\dot{B} = \dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l$$

$$\dot{C} = \frac{1}{\dot{Z}_0} \sinh \dot{\gamma} l,\ \ \dot{\gamma} = \sqrt{\dot{z}\,\dot{y}},\ \dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}$$

$\dot{z}, \dot{y}$は単位長あたりのインピーダンス, アドミタンス。これから、

$$\dot{A}\dot{D} - \dot{B}\dot{C} = \cosh^2 \dot{\gamma} l - \sinh^2 \dot{\gamma} l = 1$$

## 導出過程




$$\dot{v}(x+dx) - \dot{v}(x) = -\dot{z}dx\,\dot{i}(x) \to \frac{d\,\dot{v}}{d\,x} = -\dot{z}\,\dot{i}(x)$$

$$\dot{i}(x+dx) - \dot{i}(x) = -\dot{y}dx\,\dot{v}(x) \to \frac{d\,\dot{i}}{d\,x} = -\dot{y}\,\dot{v}(x)$$

$$\to \frac{d^2\,\dot{v}}{d\,x^2} = -\dot{z}\frac{d\,\dot{i}}{d\,x} = \dot{z}\dot{y}\dot{v},\ \frac{d^2\,\dot{i}}{d\,x^2} = -\dot{y}\frac{d\,\dot{v}}{d\,x} = \dot{z}\dot{y}\dot{i}$$

$$\frac{d^2\,\dot{v}}{d\,x^2} = \dot{z}\dot{y}\,\dot{v} \to \dot{v} = a\cosh\sqrt{\dot{z}\dot{y}}\;x + b\sinh\sqrt{\dot{z}\dot{y}}\;x$$

$$\dot{i} = -\frac{1}{\dot{z}}\frac{d\,\dot{v}}{d\,x} = -\frac{\sqrt{\dot{z}\dot{y}}}{\dot{z}}\left(a\sinh\sqrt{\dot{z}\dot{y}}\;x + b\cosh\sqrt{\dot{z}\dot{y}}\;x\right)$$

$$x = 0 \to \dot{v} = \dot{v}_s, \dot{i} = \dot{i}_s, \to a = \dot{v}_s, -\frac{\sqrt{\dot{z}\dot{y}}}{\dot{z}} b = \dot{i}_s$$

$$b = -\dot{i}_s\sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}} = -\dot{i}_s\dot{Z}_0,\ \ \sqrt{\dot{z}\dot{y}} = \dot{\gamma}$$

したがって、

$$\dot{v} = \dot{v}_s \cosh\dot{\gamma}\,x - \dot{i}_s\dot{Z}_0 \sinh\dot{\gamma}\,x$$

$$\dot{i} = -\frac{\dot{v}_s}{\dot{Z}_0}\sinh\dot{\gamma}\,x + \dot{i}_s \cosh\dot{\gamma}\,x$$

$x = l$ で、$\dot{v} = \dot{v}_r,\ \dot{i} = \dot{i}_r$ であるから、

$$\dot{v}_r = \dot{v}_s \cosh \dot{\gamma} l - \dot{i}_s \dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l$$

$$\dot{i}_r = -\frac{\dot{v}_s}{\dot{Z}_0} \sinh \dot{\gamma} l + \dot{i}_s \cosh \dot{\gamma} l$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \dot{\gamma} l & -\dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l \\ -\frac{1}{\dot{Z}_0} \sinh \dot{\gamma} l & \cosh \dot{\gamma} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_s \\ \dot{i}_s \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dot{v}_s \\ \dot{i}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \dot{\gamma} l & -\dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l \\ -\frac{1}{\dot{Z}_0} \sinh \dot{\gamma} l & \cosh \dot{\gamma} l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{i}_r \end{bmatrix}$$

結局、

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{\mathrm{s}} \\ \dot{i}_{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \dot{\gamma} l & \dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l \\ \frac{1}{\dot{Z}_0} \sinh \dot{\gamma} l & \cosh \dot{\gamma} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{i}_r \end{bmatrix}$$

となる。

## Y 行列形式

四端子行列から $Y$ 行列形式への変換は、

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D}/\dot{B} & -1/\dot{B} \\ -1/\dot{B} & \dot{A}/\dot{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_s \\ \dot{v}_r \end{bmatrix}$$

から、

$$\dot{Y}_{ss} = \frac{\dot{D}}{\dot{B}} = \frac{\cosh \dot{\gamma} l}{\dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l} = \frac{1}{\dot{Z}_0 \tanh \dot{\gamma} l}$$

$$\dot{Y}_{sr} = \dot{Y}_{rs} = \frac{-1}{\dot{B}} = -\frac{1}{\dot{Z} \sinh \dot{\gamma} l_0}$$

$$\dot{Y}_{rr} = \frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \dot{Y}_{ss} = \frac{1}{\dot{Z}_0 \tanh \dot{\gamma} l}$$

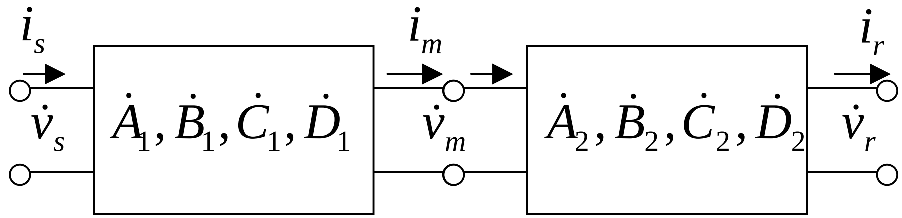
結局、

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{Z}_0 \tanh \dot{\gamma} l} & -\frac{1}{\dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l} \\ -\frac{1}{\dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l} & \frac{1}{\dot{Z}_0 \tanh \dot{\gamma} l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_s \\ \dot{v}_r \end{bmatrix}$$

となる。

四端子定数形式は複数の回路をカスケード（直列）につなぐときに便利な方式である。 二つの四端子回路のカスケード接続はつぎのように行える。

以下、$\dot{V}$ 等の・を省略して表記する。




$$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ i_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_m \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix}$$

から、$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix}$ と、行列の積を計算すればよい。

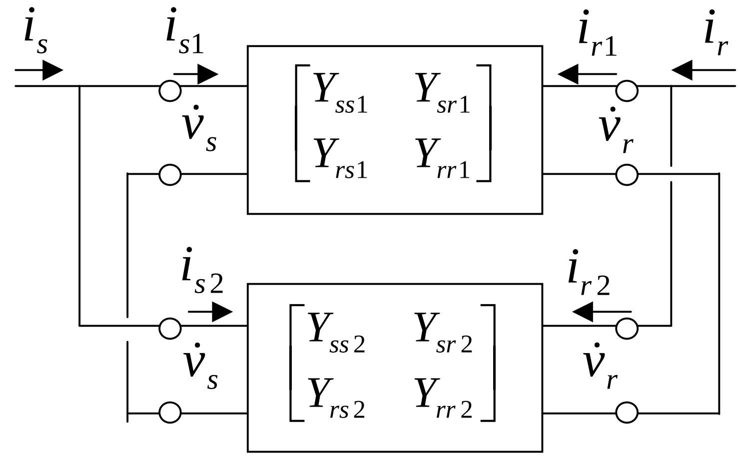
$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

念のため、行列式の性質を使って、

$$AD - BC = \begin{vmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = \left(A_1D_1 - B_1C_1\right)\left(A_2D_2 - B_2C_2\right) = 1 \times 1 = 1$$

Y行列形式は複数の四端子回路を並列につなぐときに便利な方式である。
二つの四端子回路の並列接続はつぎのように行える。




以下、$\dot{V}$等の・を省略して表記する。

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s2} \\ i_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss1} & Y_{sr1} \\ Y_{rs1} & Y_{rr1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{ss2} & Y_{sr2} \\ Y_{rs2} & Y_{rr2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{ss1}+Y_{ss2} & Y_{sr1}+Y_{sr2} \\ Y_{rs1}+Y_{rs2} & Y_{rr1}+Y_{rr2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

各四端子要素が前記の$(1)\sim(4)$の形である場合は$Y_{sr}=Y_{rs}$と、対称になる。
零電位面を省略して図示すると次のようになる。