

四端子定数で
 $AD-BC=1$
となることの説明

四端子定数方式では、 I_r の向きは端子から流出方向が正、
 Y 行列方式では電流はすべて端子への流入方向が正。

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix}$$

Y 行列方式に変換してみる。

$$V_s = AV_r + BI_r \Leftrightarrow I_r = \frac{1}{B}V_s - \frac{A}{B}V_r$$

$$I_s = CV_r + DI_r \Leftrightarrow I_s = \frac{D}{B}V_s - \frac{AD - BC}{B}V_r$$

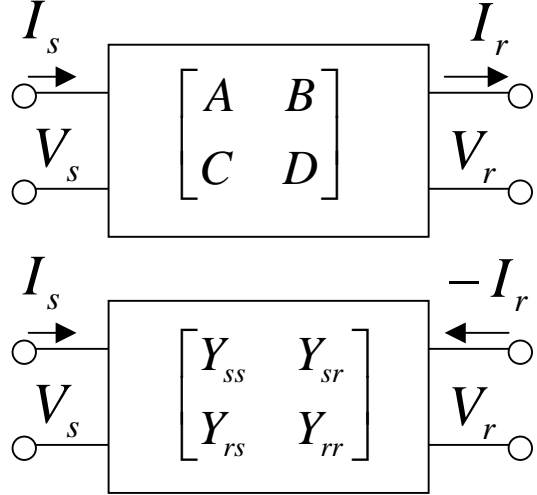
$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D/B & -(AD - BC)/B \\ 1/B & -A/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_s \\ -I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D/B & -(AD - BC)/B \\ -1/B & A/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix}$$

$$Y_{sr} = Y_{rs} \Leftrightarrow -1/B = -(AD - BC)/B \Leftrightarrow AD - BC = 1$$

すなわち、 $AD - BC = 1$ は Y 行列が対称であることと等価である。

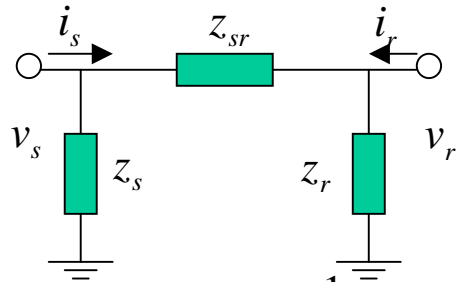
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \text{ である。} \left(\because \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1 \right)_2$$



Y行列の対称性のチェック

(電流は s, r とも端子に流入する向きを正にとる)

(1) π形回路、L形回路、単純Z



$$v_r = 0, v_s = 1 \rightarrow i_r = -\frac{1}{z_{sr}} = Y_{rs}, i_s = \frac{1}{z_s} + \frac{1}{z_{sr}} = Y_{ss}$$

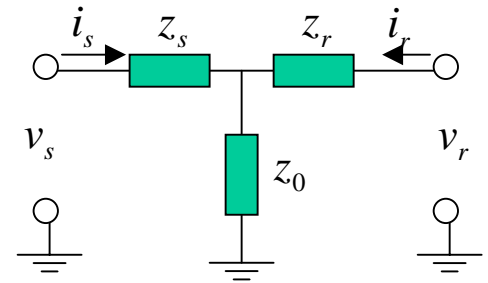
$$v_s = 0, v_r = 1 \rightarrow i_s = -\frac{1}{z_{sr}} = Y_{sr}, i_r = \frac{1}{z_r} + \frac{1}{z_{sr}} = Y_{rr}$$

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{sr}} + \frac{1}{z_s} & -\frac{1}{z_{sr}} \\ -\frac{1}{z_{sr}} & \frac{1}{z_{sr}} + \frac{1}{z_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

$z_s \neq z_r$ でも対称性がある。 z_s, z_r の一方を ∞ にしても成り立つからL形回路でも成り立つ。

$z_s \rightarrow \infty, z_r \rightarrow \infty$ から、 z_{sr} だけの単純インピーダンスときにも成り立つことが分かる。

(2) T形回路



$v_r = 0, v_s = 1$ とすると、

$$i_r = -\frac{1}{z_s + \frac{z_r z_0}{z_r + z_0}} \times \frac{z_0}{z_r + z_0} = -\frac{z_0}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} = Y_{rs}$$

$$i_s = \frac{1}{z_s + \frac{z_r z_0}{z_r + z_0}} = \frac{z_r + z_0}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} = Y_{ss}$$

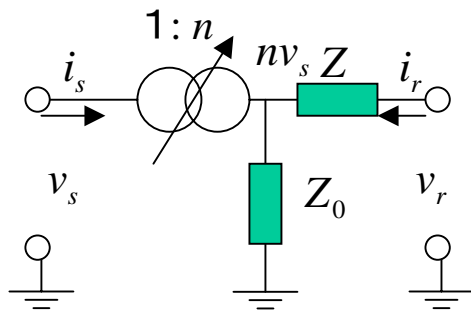
$v_s = 0, v_r = 1$ とすると、

$$i_s = -\frac{1}{z_r + \frac{z_s z_0}{z_s + z_0}} \times \frac{z_0}{z_s + z_0} = -\frac{z_0}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} = Y_{sr}$$

$$i_r = \frac{1}{z_r + \frac{z_s z_0}{z_s + z_0}} = \frac{z_s + z_0}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} = Y_{rr}$$

$Y_{sr} = Y_{rs}$ が成り立つ。

(3) 変圧器等価回路



$$i_r = \frac{v_r - nv_s}{z}$$

$$i_s = n \left(\frac{nv_s}{z_0} - i_r \right) = \frac{n^2 v_s}{z_0} - \frac{nv_r - n^2 v_s}{z}$$

$$= n^2 \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z} \right) v_s - \frac{n}{z} v_r, \text{すなわち、}$$

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^2 \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z} \right) & -\frac{n}{z} \\ -\frac{n}{z} & \frac{1}{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

$$\therefore Y_{rs} = Y_{sr} = -\frac{n}{z}$$

(4) 分布定数回路

分布定数回路では、

$$\dot{A} = \cosh \dot{\gamma} l = \dot{D},$$

$$\dot{B} = \dot{Z}_0 \sinh \dot{\gamma} l$$

$$\dot{C} = \frac{1}{\dot{Z}_0} \sinh \dot{\gamma} l, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\dot{z} \dot{y}}, \quad \dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}$$

\dot{z}, \dot{y} は単位長あたりのインピーダンス, アドミタンス

これから、 $\dot{A}\dot{D} - \dot{B}\dot{C} = \cosh^2 \dot{\gamma} l - \sinh^2 \dot{\gamma} l = 1$

$$\therefore \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

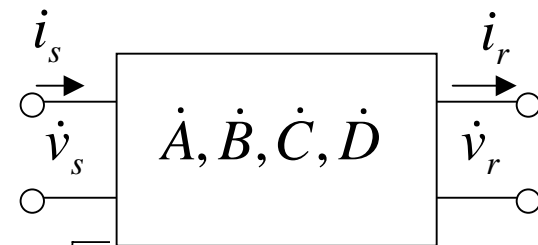
$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = e^x \times e^{-x} = 1$$

Y行列形式を用いると

$$\begin{bmatrix} i_s \\ -i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D}/\dot{B} & -(\dot{A}\dot{D} - \dot{B}\dot{C})/\dot{B} \\ -1/\dot{B} & \dot{A}/\dot{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_s \\ \dot{v}_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{D}/\dot{B} & -1/\dot{B} \\ -1/\dot{B} & \dot{A}/\dot{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_s \\ \dot{v}_r \end{bmatrix}$$

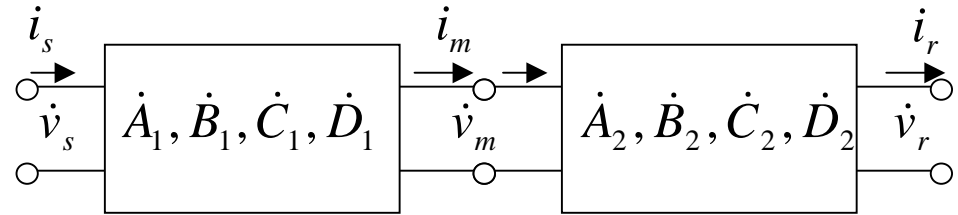
$$\therefore \dot{Y}_{sr} = \dot{Y}_{rs} = -\frac{1}{\dot{B}}$$



二つの四端子回路のカスケード接続

以下、 \dot{v} 等の \cdot を省略して表記する。

$$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ i_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_m \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix}$$



から、
$$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$AD - BC = (A_1 A_2 + B_1 C_2)(C_1 B_2 + D_1 D_2) - (A_1 B_2 + B_1 D_2)(C_1 A_2 + D_1 C_2)$$

$$= A_1 A_2 C_1 B_2 + A_1 A_2 D_1 D_2 + B_1 C_2 C_1 B_2 + B_1 C_2 D_1 D_2$$

$$- A_1 A_2 C_1 B_2 - A_1 B_2 D_1 C_2 - B_1 D_2 C_1 A_2 - B_1 C_2 D_1 D_2$$

$$= (A_1 D_1 - B_1 C_1)(A_2 D_2 - B_2 C_2) = 1 \times 1 = 1$$

これにより、要素となる四端子について $AD-BC=1$ が成り立つなら、カスケード接続後の合成四端子定数について $AD-BC=1$ が成り立つ。

回路が前記の π 回路などの要素のカスケードな組み合わせで出来ていれば Y 行列は対称で $AD-BC=1$ が成り立つことが言える。

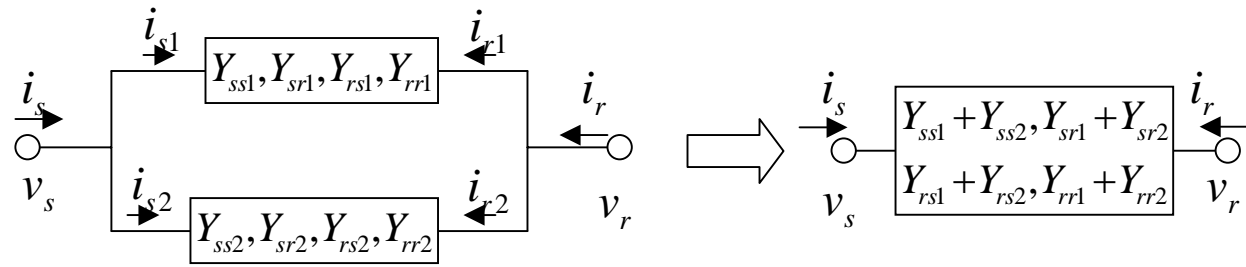
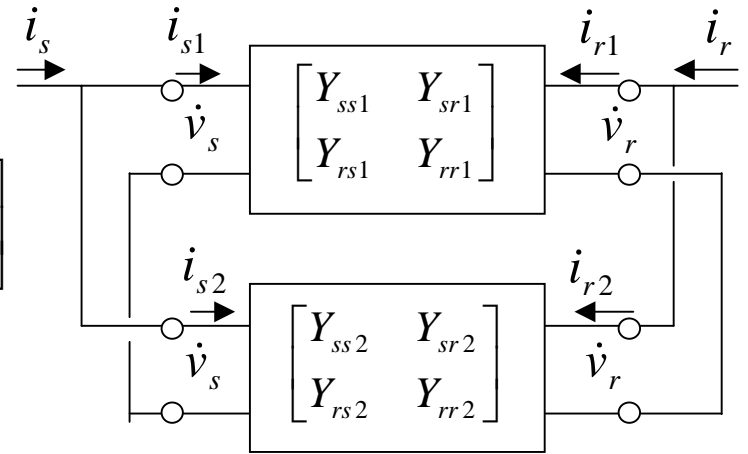
二つの四端子回路の並列接続

以下、 \dot{V} 等の \cdot を省略して表記する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s2} \\ i_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss1} & Y_{sr1} \\ Y_{rs1} & Y_{rr1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{ss2} & Y_{sr2} \\ Y_{rs2} & Y_{rr2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y_{ss1} + Y_{ss2} & Y_{sr1} + Y_{sr2} \\ Y_{rs1} + Y_{rs2} & Y_{rr1} + Y_{rr2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

各四端子要素が前記の(1)~(4)の形である場合は $Y_{sr} = Y_{rs}$ と、対称になる。

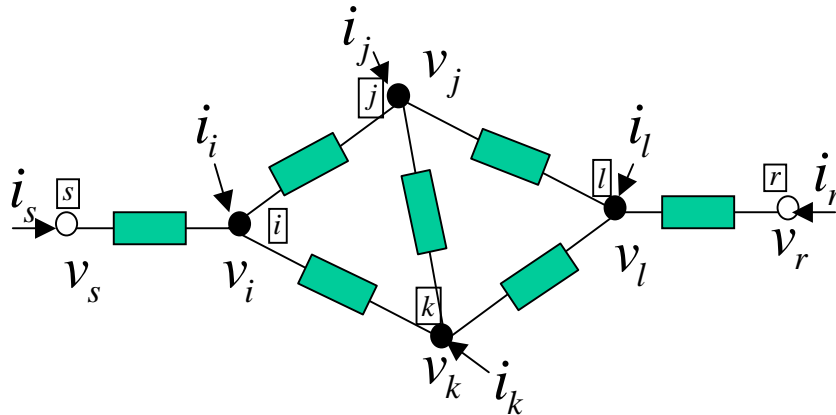
零電位面を省略して図示すると次のようになる。



次ページ以降の図でも、色付き長方形は、上図のような2端子間のY行列を表しているものとする。

複数の四端子要素を任意の形で接続した一般の回路から1個の四端子を作る場合

零電位面を省略して、要素となる四端子回路(零電位面を除くと2端子)を多数接続した場合を考える。要素となる各四端子回路は前頁までの考察でY行列で代表できる。



この回路網全体のY行列は、各端子ごとに接続される4端子(零電位面を除き2端子)のY行列要素から次のように和をとることによって得られる。

総端子数を n とするとき、まず、はじめに、 n 行 n 列の Y の全要素を 0 にしておく。

つぎに、端子 m に着目し、 m ($m=1,2,\dots,n$) に接続される相手端子を x として、すべての x のY行列要素 ($y_{m mx}, y_{mx}$ で表す) を次式により加算して作る。

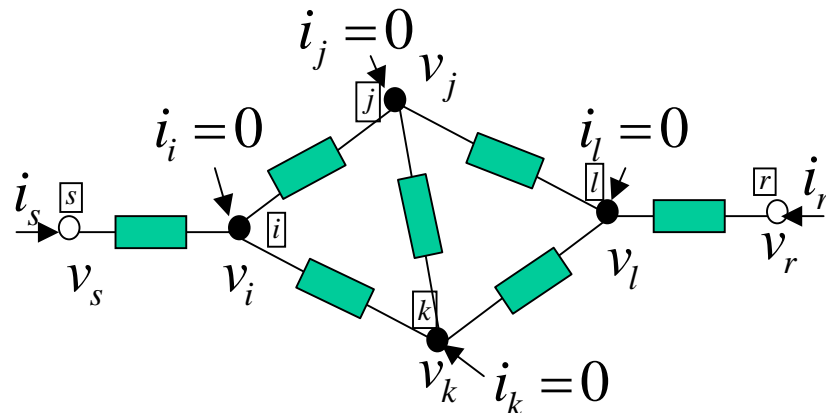
$$Y_{mm} = Y_{mm} + y_{m mx}, Y_{mx} = Y_{mx} + y_{mx} \quad (x \text{ は } m \text{ の全隣接端子})$$

$$(\text{例、 } m=k \text{ のとき、 } x=i, j, l), Y_{kk} = y_{k ki} + y_{k kj} + y_{k kl}, Y_{ki} = y_{ki}, Y_{kj} = y_{kj}, Y_{kl} = y_{kl}$$

以上から、次の回路方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} i_l \\ i_s \\ \vdots \\ i_r \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{1s} & \cdots & Y_{1r} & Y_{1n} \\ Y_{s1} & Y_{ss} & \cdots & Y_{sr} & Y_{sn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Y_{r1} & Y_{rs} & \cdots & Y_{rr} & Y_{rn} \\ Y_{n1} & Y_{ns} & \cdots & Y_{nr} & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ v_n \end{bmatrix} \Rightarrow I = YV \text{ と表示}$$

この回路網の中の端子 s と端子 r に着目し、これ以外の端子に外部から流入する電流を 0 とすると端子 s, r に対する四端子回路になる。(右図)



このときの四端子定数を求めるには次のようにすればよい。

$I = YV$ から、 $Z = Y^{-1}$ を用いて、 $V = ZI$ とする。

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{1s} & \cdots & Z_{1r} & Z_{1n} \\ Z_{s1} & Z_{ss} & \cdots & Z_{sr} & Z_{sn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Z_{r1} & Z_{rs} & \cdots & Z_{rr} & Z_{rn} \\ Z_{n1} & Z_{ns} & \cdots & Z_{nr} & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_s \\ \vdots \\ i_r \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{1s} & \cdots & Z_{1r} & Z_{1n} \\ Z_{s1} & Z_{ss} & \cdots & Z_{sr} & Z_{sn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Z_{r1} & Z_{rs} & \cdots & Z_{rr} & Z_{rn} \\ Z_{n1} & Z_{ns} & \cdots & Z_{nr} & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i_s \\ 0 \\ i_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1s} & Z_{1r} \\ Z_{ss} & Z_{sr} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{rs} & Z_{rr} \\ Z_{ns} & Z_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

すなわち、 $\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sr} \\ Z_{rs} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$ が得られる。各枝が前記(1)~(4)のように対称行列となる

要素から出来ていれば、 $Y_{ij} = Y_{ji}$ 、逆行列 Z でも $Z_{ij} = Z_{ji}$ と対称である。すなわち、端子 s, r 間の四端子定数については、 $AD - BC = 1$ が成り立つといえる。

Z で表すと四端子定数は次のようになる。

$$v_s = Z_{ss} i_s + Z_{sr} i_r, v_r = Z_{rs} i_s + Z_{rr} i_r \leftrightarrow i_s = (v_r - Z_{rr} i_r) / Z_{rs} = (1/Z_{rs}) v_r + (Z_{rr}/Z_{rs})(-i_r)$$

$$v_s = Z_{ss} (v_r - Z_{rr} i_r) / Z_{rs} + Z_{sr} i_r = (Z_{ss}/Z_{rs}) v_r - (Z_{sr} - Z_{ss} Z_{rr} / Z_{rs})(-i_r)$$

すなわち、

$$v_s = \left(\frac{Z_{ss}}{Z_{rs}} \right) v_r + \left(\frac{Z_{ss}Z_{rr}}{Z_{rs}} - Z_{sr} \right) (-i_r)$$

$$i_s = \left(\frac{1}{Z_{rs}} \right) v_r + \left(\frac{Z_{rr}}{Z_{rs}} \right) (-i_r)$$

$$A = \frac{Z_{ss}}{Z_{rs}}, B = \frac{Z_{ss}Z_{rr}}{Z_{rs}} - Z_{sr}, C = \frac{1}{Z_{rs}}, D = \frac{Z_{rr}}{Z_{rs}}$$

$$\therefore AD - BC = \frac{Z_{ss}}{Z_{rs}} \frac{Z_{rr}}{Z_{rs}} + \left(Z_{sr} - \frac{Z_{ss}Z_{rr}}{Z_{rs}} \right) \left(\frac{1}{Z_{rs}} \right) = \frac{Z_{sr}}{Z_{rs}}$$

前記(1) ~ (4)の対称な要素を用いれば、 Y 行列が対称で、 Z 行列も対称となり

$Z_{sr} = Z_{rs} \rightarrow Z_{sr} / Z_{rs} = 1$, すなわち、 $AD - BC = 1$ となる。

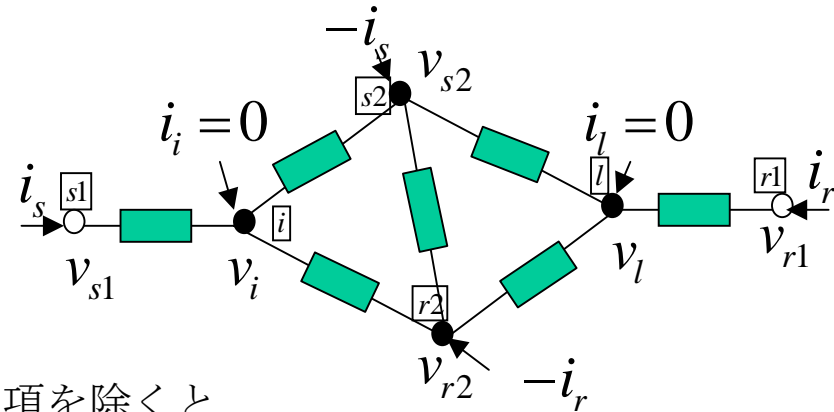
$$\text{実際、} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sr} \\ Z_{rs} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \text{ のとき、} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_{rr} & -Z_{sr} \\ -Z_{rs} & Z_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{rr} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} \text{ となり、}$$

$Y_{sr} = Y_{rs}$ ならば、 $Z_{sr} = Z_{rs}$ で対称となることがわかる($\Delta = Z_{ss}Z_{rr} - Z_{sr}Z_{rs}$)。

以上から、任意の受動回路網(s, r 端子以外の端子に流入する電流が0かつ内部に電源がない)から2端子(零電位面を含めると4端子)を取り出し四端子回路を作るとその四端子定数について $AD - BC = 1$ が成り立つことが分かる。(前記(1)~(4)の要素で通常の回路要素を代表できると考えている)

次に、回路網中の零電位面以外から、四端子を選定し四端子回路を形成した場合を考える。要素となる各四端子回路は前頁までの考察で対称なY行列で代表できる。

この回路網の中の端子 $s1, s2$ と端子 $r1, r2$ に着目し、これ以外の端子に外部から流入する電流を0とする。端子 $s1$ に流入する電流 i_s が端子 $s2$ から流出し端子 $r1$ に流入する電流 i_r が端子 $r2$ から流出するものとするれば次式が成り立つ。(右図)



$I = YV$ から、 $Z = Y^{-1}$ を用いて、 $V = ZI$ とし $i = 0$ の項を除くと、

$$\begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ v_{r1} \\ v_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s1s1} & Z_{s1s2} & Z_{s1r1} & Z_{s1r2} \\ Z_{s2s1} & Z_{s2s2} & Z_{s2r1} & Z_{s2r2} \\ Z_{r1s1} & Z_{r1s2} & Z_{r1r1} & Z_{r1r2} \\ Z_{r2s1} & Z_{r2s2} & Z_{r2r1} & Z_{r2r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ -i_s \\ i_r \\ -i_r \end{bmatrix}, \quad v_s = v_{s1} - v_{s2}, v_r = v_{r1} - v_{r2} \text{ として書き直すと、}$$

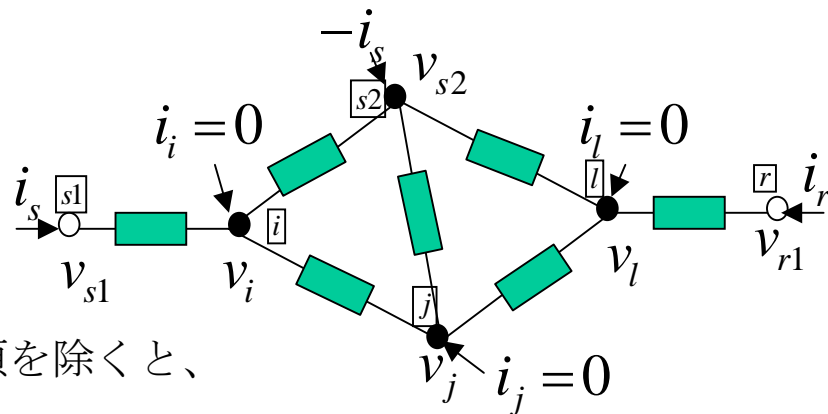
$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} - v_{s2} \\ v_{r1} - v_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s1s1} - Z_{s2s1} - Z_{s1s1} + Z_{s2s2} & Z_{s1r1} - Z_{s2r1} - Z_{s1r2} + Z_{s2r2} \\ Z_{r1s1} - Z_{r2s1} - Z_{r1s2} + Z_{r2s2} & Z_{r1r1} - Z_{r2r1} - Z_{r1r2} + Z_{r2r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

Y行列が対称なら、Z行列も対称で、 $Z_{ij} = Z_{ji}$ であるから、上式を

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sr} \\ Z_{rs} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \text{ と書いたとき、} Z_{sr} = Z_{rs} \text{ と対称になることが分かる。}$$

次に、回路網中の零電位面を一つだけ含むように、四端子を選定し四端子回路を形成した場合を考える。要素となる各四端子回路は前頁までの考察で対称なY行列で代表できる。

この回路網の中の端子 $s1, s2$ と端子 r に着目し、これ以外の端子に外部から流入する電流を0とする。端子 $s1$ に流入する電流 i_s が端子 $s2$ から流出し端子 r に流入する電流 i_r が零電位面から流出するものとするれば次式が成り立つ。(右図)



$I = YV$ から、 $Z = Y^{-1}$ を用いて、 $V = ZI$ とし $i = 0$ の項を除くと、

$$\begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s1s1} & Z_{s1s2} & Z_{s1r} \\ Z_{s2s1} & Z_{s2s2} & Z_{s2r} \\ Z_{rs1} & Z_{rs2} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ -i_s \\ i_r \end{bmatrix}, v_s = v_{s1} - v_{s2} \text{ として書き直すと、}$$

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} - v_{s2} \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s1s1} - Z_{s2s1} - Z_{s1s2} + Z_{s2s2} & Z_{s1r} - Z_{s2r} \\ Z_{rs1} - Z_{rs2} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

Y 行列が対称なら、 Z 行列も対称で、 $Z_{ij} = Z_{ji}$ であるから、上式を

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sr} \\ Z_{rs} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \text{ と書いたとき、} Z_{sr} = Z_{rs} \text{ と対称になることが分かる。}$$

以上から、任意の受動回路網 (s, r 端子以外の端子に流入する電流が0かつ内部に電源がない) から4端子を取り出し四端子回路を作るとその四端子定数について $AD - BC = 1$ が成り立つことが分かる。(前記(1)~(4)の要素で通常の回路要素を代表できると考えている)