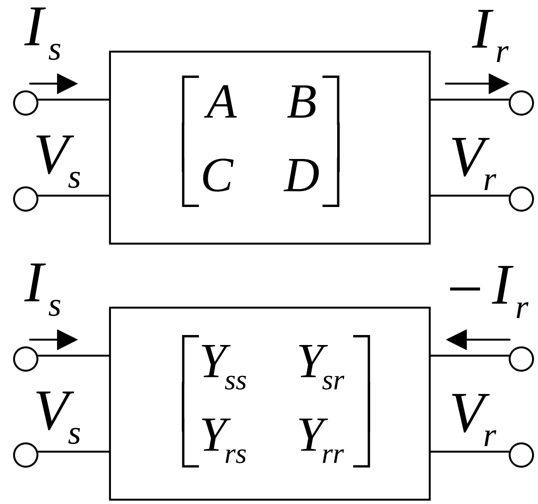
四端子定数で
AD-BC=1
となることの説明

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix}$$

四端子定数方式では、I_r の向きは端子から流出方向が正、Y 行列方式では電流はすべて端子への流入方向が正。



Y 行列方式に変換してみる。

$$V_s = AV_r + BI_r \leftrightarrow I_r = \frac{1}{B}V_s - \frac{A}{B}V_r$$

$$I_s = CV_r + DI_r \leftrightarrow I_s = \frac{D}{B}V_s - \frac{AD-BC}{B}V_r$$

$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D/B & -(AD-BC)/B \\ 1/B & -A/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_s \\ -I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D/B & -(AD-BC)/B \\ -1/B & A/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix}$$

$$Y_{sr} = Y_{rs} \leftrightarrow -1/B = -(AD-BC)/B \leftrightarrow AD-BC = 1$$

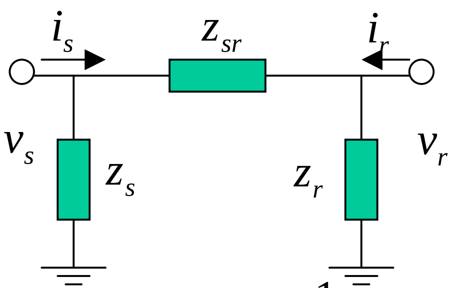
すなわち、$AD-BC=1$ は Y 行列が対称であることと等価である。

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix}$$ である。$\left(\because \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1 \right)$

Y行列の対称性のチェック

（電流は s, r とも端子に流入する向きを正にとる）

（1）π 形回路、L 形回路、単純 Z



$$v_r = 0,\ v_s = 1 \rightarrow i_r = -\frac{1}{z_{sr}} = Y_{rs},\ i_s = \frac{1}{z_s} + \frac{1}{z_{sr}} = Y_{ss}$$

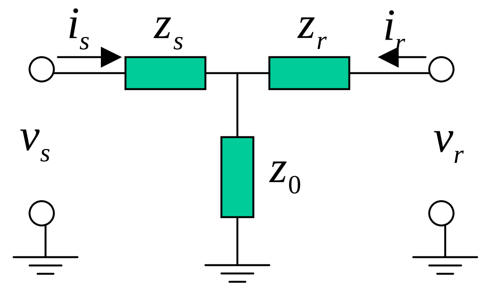
$$v_s = 0,\ v_r = 1 \rightarrow i_s = -\frac{1}{z_{sr}} = Y_{sr},\ i_r = \frac{1}{z_r} + \frac{1}{z_{sr}} = Y_{rr}$$

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z_{sr}} + \dfrac{1}{z_s} & -\dfrac{1}{z_{sr}} \\ -\dfrac{1}{z_{sr}} & \dfrac{1}{z_{sr}} + \dfrac{1}{z_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

$z_s \neq z_r$ でも対称性がある。z_s, z_r の一方を∞にしても成り立つからL形回路でも成り立つ。

$z_s \rightarrow \infty, z_r \rightarrow \infty$から、$z_{sr}$ だけの単純インピーダンスときにも成り立つことが分かる。

(2) T形回路



$v_r = 0,\ v_s = 1$とすると、

$$i_r = -\frac{1}{z_s + \dfrac{z_r z_0}{z_r + z_0}} \times \frac{z_0}{z_r + z_0} = -\frac{z_0}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} = Y_{rs}$$

$$i_s = \frac{1}{z_s + \dfrac{z_r z_0}{z_r + z_0}} = \frac{z_r + z_0}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} = Y_{ss}$$

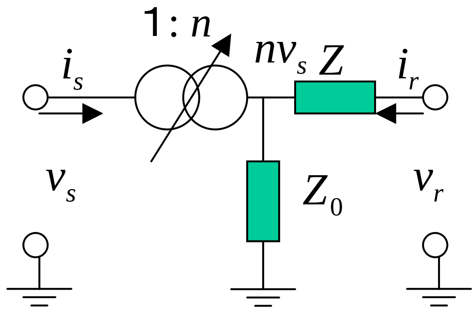
$v_s = 0,\ v_r = 1$とすると、

$$i_s = -\frac{1}{z_r + \dfrac{z_s z_0}{z_s + z_0}} \times \frac{z_0}{z_s + z_0} = -\frac{z_0}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} = Y_{sr}$$

$$i_r = \frac{1}{z_r + \dfrac{z_s z_0}{z_s + z_0}} = \frac{z_s + z_0}{z_s z_r + z_s z_0 + z_r z_0} = Y_{rr}$$

$Y_{sr} = Y_{rs}$ が成り立つ。

(3) 変圧器等価回路



$$i_r = \frac{v_r - nv_s}{z}$$

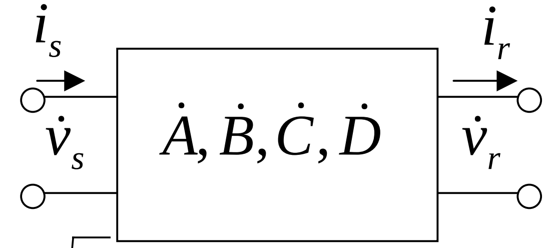
$$i_s = n\left(\frac{nv_s}{z_0} - i_r\right) = \frac{n^2 v_s}{z_0} - \frac{nv_r - n^2 v_s}{z}$$

$$= n^2\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right)v_s - \frac{n}{z}v_r,$$ すなわち、

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^2\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right) & -\frac{n}{z} \\ -\frac{n}{z} & \frac{1}{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

$$\therefore Y_{rs} = Y_{sr} = -\frac{n}{z}$$

(4) 分布定数回路



分布定数回路では、

$$\dot{A} = \cosh\dot{\gamma}\,l = \dot{D},$$

$$\dot{B} = \dot{Z}_0 \sinh\dot{\gamma}\,l$$

$$\dot{C} = \frac{1}{\dot{Z}_0}\sinh\dot{\gamma}\,l,\ \ \dot{\gamma} = \sqrt{\dot{z}\,\dot{y}},\ \dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}$$

$\dot{z}, \dot{y}$は単位長あたりのインピーダンス,アドミタンス

これから、$\dot{A}\dot{D} - \dot{B}\dot{C} = \cosh^2\dot{\gamma}\,l - \sinh^2\dot{\gamma}\,l = 1$

$$\because \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = e^x \times e^{-x} = 1$$

Y行列形式を用いると

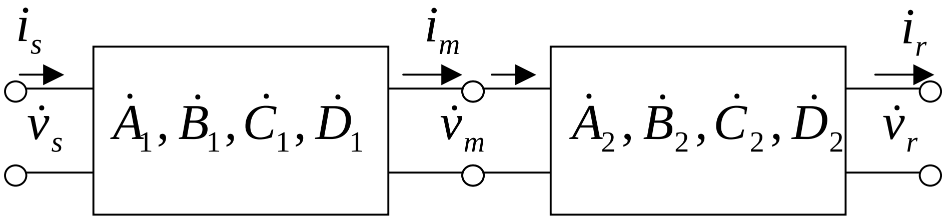
$$\begin{bmatrix} i_s \\ -i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D}/\dot{B} & -\left(\dot{A}\dot{D} - \dot{B}\dot{C}\right)/B \\ -1/\dot{B} & \dot{A}/\dot{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_s \\ \dot{v}_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{D}/\dot{B} & -1/\dot{B} \\ -1/\dot{B} & \dot{A}/\dot{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_s \\ \dot{v}_r \end{bmatrix}$$

$$\therefore \dot{Y}_{sr} = \dot{Y}_{rs} = -\frac{1}{\dot{B}}$$

二つの四端子回路のカスケード接続

以下、$\dot{V}$ 等の・を省略して表記する。



$$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ i_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_m \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix}$$

から、$\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ i_r \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$AD - BC = \left(A_1 A_2 + B_1 C_2\right)\left(C_1 B_2 + D_1 D_2\right) - \left(A_1 B_2 + B_1 D_2\right)\left(C_1 A_2 + D_1 C_2\right)$$

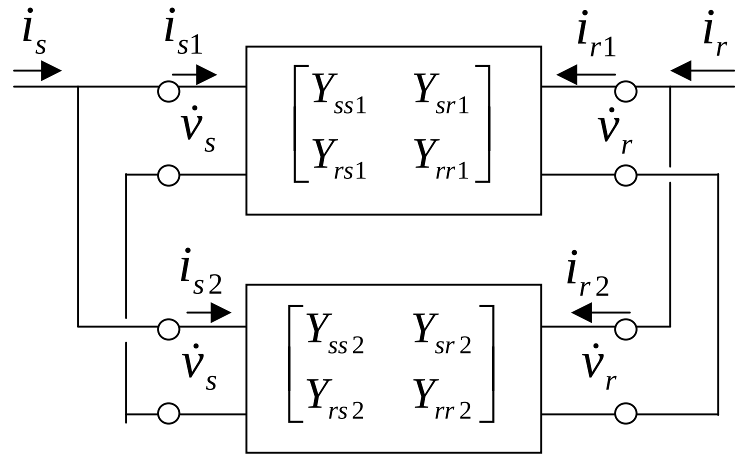
$$= A_1 A_2 C_1 B_2 + A_1 A_2 D_1 D_2 + B_1 C_2 C_1 B_2 + B_1 C_2 D_1 D_2$$

$$- A_1 A_2 C_1 B_2 - A_1 B_2 D_1 C_2 - B_1 D_2 C_1 A_2 - B_1 C_2 D_1 D_2$$

$$= \left(A_1 D_1 - B_1 C_1\right)\left(A_2 D_2 - B_2 C_2\right) = 1 \times 1 = 1$$

これにより、要素となる四端子について AD-BC=1 が成り立つなら、カスケード接続後の合成四端子定数についてAD-BC=1 が成り立つ。
回路が前記の π 回路などの要素のカスケードな組み合わせで出来ていれば Y 行列は対称で AD-BC=1 が成り立つことが言える。

二つの四端子回路の並列接続



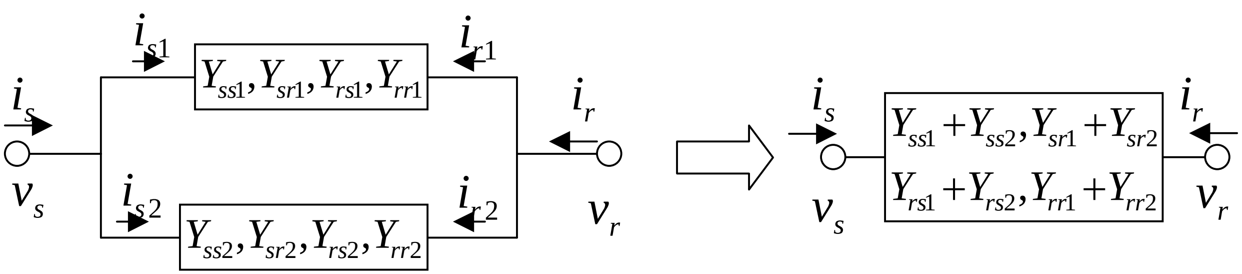
以下、$\dot{V}$ 等の・を省略して表記する。

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{r1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{s2} \\ i_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss1} & Y_{sr1} \\ Y_{rs1} & Y_{rr1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{ss2} & Y_{sr2} \\ Y_{rs2} & Y_{rr2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{ss1} + Y_{ss2} & Y_{sr1} + Y_{sr2} \\ Y_{rs1} + Y_{rs2} & Y_{rr1} + Y_{rr2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$$

各四端子要素が前記の$(1)\sim(4)$の形である場合は$Y_{sr} = Y_{rs}$と、対称になる。

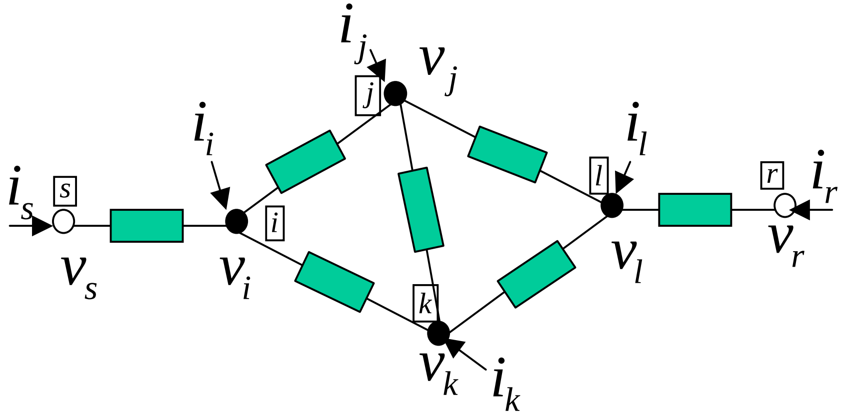
零電位面を省略して図示すると次のようになる。



次ページ以降の図でも、色付き長方形は、上図のような
2 端子間の Y 行列を表しているものとする。

複数の四端子要素を任意の形で接続した一般の回路から1個の四端子を作る場合

零電位面を省略して、要素となる四端子回路（零電位面を除くと 2 端子）を多数接続した場合を考える。要素となる各四端子回路は前頁までの考察で Y 行列で代表できる。



この回路網全体のY行列は、各端子ごとに接続される4端子(零電位面を除き2端子)のY行列要素から次のように和をとることによって得られる。

総端子数をnとするとき、まず、はじめに、n行n列のYの全要素を0にしておく。

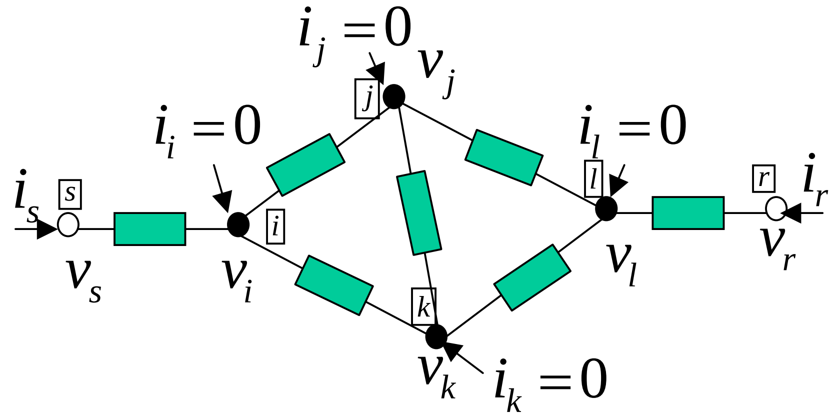
つぎに、端子mに着目し、m $(m=1,2,\cdots,n)$に接続される相手端子をxとして、すべてのxのY行列要素（y_{mmx}, y_{mx}で表す）を次式により加算して作る。

$Y_{mm}=Y_{mm}+y_{mmx}, Y_{mx}=Y_{mx}+y_{mx}$ (xはmの全隣接端子)。

(例、$m=k$のとき、$x=i,j,l$), $Y_{kk}=y_{kki}+y_{kkj}+y_{kkl}, Y_{ki}=y_{ki}, Y_{kj}=y_{kj}, Y_{kl}=y_{kl}$

以上から、次の回路方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_s \\ \vdots \\ i_r \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{1s} & \cdots & Y_{1r} & Y_{1n} \\ Y_{s1} & Y_{ss} & \cdots & Y_{sr} & Y_{sn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Y_{r1} & Y_{rs} & \cdots & Y_{rr} & Y_{rn} \\ Y_{n1} & Y_{ns} & \cdots & Y_{nr} & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ v_n \end{bmatrix} \Rightarrow I=YV \text{ と表示}$$



この回路網の中の端子sと端子rに着目し、これ以外の端子に外部から流入する電流を0とすると端子s,rに対する四端子回路になる。（右図）
このときの四端子定数を求めるには次のようにすればよい。
$I=YV$から、$Z=Y^{-1}$を用いて、$V=ZI$とする。

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{1s} & \cdots & Z_{1r} & Z_{1n} \\ Z_{s1} & Z_{ss} & \cdots & Z_{sr} & Z_{sn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Z_{r1} & Z_{rs} & \cdots & Z_{rr} & Z_{rn} \\ Z_{n1} & Z_{ns} & \cdots & Z_{nr} & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_s \\ \vdots \\ i_r \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{1s} & \cdots & Z_{1r} & Z_{1n} \\ Z_{s1} & Z_{ss} & \cdots & Z_{sr} & Z_{sn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Z_{r1} & Z_{rs} & \cdots & Z_{rr} & Z_{rn} \\ Z_{n1} & Z_{ns} & \cdots & Z_{nr} & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i_s \\ 0 \\ i_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1s} & Z_{1r} \\ Z_{ss} & Z_{sr} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{rs} & Z_{rr} \\ Z_{ns} & Z_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

すなわち、$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sr} \\ Z_{rs} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$が得られる。各枝が前記(1) ~ (4)のように対称行列となる要素から出来ていれば、$Y_{ij}=Y_{ji}$,逆行列Zでも$Z_{ij}=Z_{ji}$と対称である。すなわち、端子s,r間の四端子定数については、$AD-BC=1$が成り立つといえる。
Zで表すと四端子定数は次のようになる。

$$v_s = Z_{ss} i_s + Z_{sr} i_r,\ v_r = Z_{rs} i_s + Z_{rr} i_r \leftrightarrow i_s = (v_r - Z_{rr} i_r)/Z_{rs} = (1/Z_{rs}) v_r + (Z_{rr}/Z_{rs})(-i_r)$$

$$v_s = Z_{ss}(v_r - Z_{rr} i_r)/Z_{rs} + Z_{sr} i_r = (Z_{ss}/Z_{rs}) v_r - (Z_{sr} - Z_{ss} Z_{rr}/Z_{rs})(-i_r)$$

すなわち、

$$v_s = \left(\frac{Z_{ss}}{Z_{rs}}\right)v_r + \left(\frac{Z_{ss}Z_{rr}}{Z_{rs}} - Z_{sr}\right)(-i_r)$$

$$i_s = \left(\frac{1}{Z_{rs}}\right)v_r + \left(\frac{Z_{rr}}{Z_{rs}}\right)(-i_r)$$

$$A = \frac{Z_{ss}}{Z_{rs}}, B = \frac{Z_{ss}Z_{rr}}{Z_{rs}} - Z_{sr}, C = \frac{1}{Z_{rs}}, D = \frac{Z_{rr}}{Z_{rs}}$$

$$\therefore AD - BC = \frac{Z_{ss}}{Z_{rs}}\frac{Z_{rr}}{Z_{rs}} + \left(Z_{sr} - \frac{Z_{ss}Z_{rr}}{Z_{rs}}\right)\left(\frac{1}{Z_{rs}}\right) = \frac{Z_{sr}}{Z_{rs}}$$

前記(1)~(4)の対称な要素を用いれば、Y行列が対称で、Z行列も対称となり

$Z_{sr} = Z_{rs} \rightarrow Z_{sr}/Z_{rs} = 1$,すなわち、$AD - BC = 1$となる。

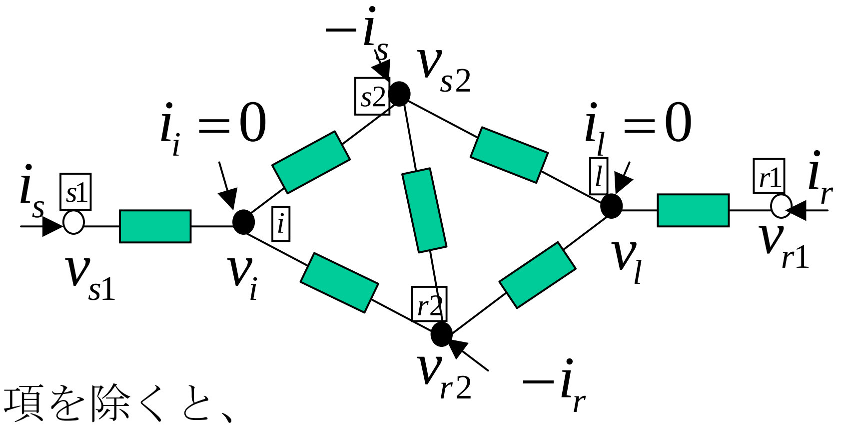
実際、$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sr} \\ Z_{rs} & Z_{rr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$のとき、$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} Z_{rr} & -Z_{sr} \\ -Z_{rs} & Z_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{rr} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}$となり、

$Y_{sr} = Y_{rs}$ならば、$Z_{sr} = Z_{rs}$で対称となることがわかる$(\Delta = Z_{ss}Z_{rr} - Z_{sr}Z_{rs})$。

以上から、任意の受動回路網（s, r 端子以外の端子に流入する電流が 0 かつ内部に電源がない ）から2端子（零電位面を含めると4端子）を取り出し四端子回路を作るとその四端子定数について AD-BC = 1 が成り立つことが分かる。(前記(1)~(4) の要素で通常の回路要素を代表できると考えている）

次に、回路網中の零電位面以外から、四端子を選定し四端子回路を形成した場合を考える。要素となる各四端子回路は前頁までの考察で 対称なY 行列で代表できる。

この回路網の中の端子 $s1, s2$と端子$r1, r2$に着目し、これ以外の端子に外部から流入する電流を0とする。端子$s1$に流入する電流i_s が端子$s2$から流出し端子$r1$に流入する電流i_r が端子$r2$ から流出するものとすれば次式が成り 立つ。（右図）



$I = YV$から、$Z = Y^{-1}$を用いて、$V = ZI$ とし $i = 0$ の項を除くと、

$$\begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ v_{r1} \\ v_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s1s1} & Z_{s1s2} & Z_{s1r1} & Z_{s1r2} \\ Z_{s2s1} & Z_{s2s2} & Z_{s2r1} & Z_{s2r2} \\ Z_{r1s1} & Z_{r1s2} & Z_{r1r1} & Z_{r1r2} \\ Z_{r2s1} & Z_{r2s2} & Z_{r2r1} & Z_{r2r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ -i_s \\ i_r \\ -i_r \end{bmatrix}$$

、$v_s = v_{s1} - v_{s2}, v_r = v_{r1} - v_{r2}$として書き直すと、

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} - v_{s2} \\ v_{r1} - v_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s1s1} - Z_{s2s1} - Z_{s1s1} + Z_{s2s2} & Z_{s1r1} - Z_{s2r1} - Z_{s1r2} + Z_{s2r2} \\ Z_{r1s1} - Z_{r2s1} - Z_{r1s2} + Z_{r2s2} & Z_{r1r1} - Z_{r2r1} - Z_{r1r2} + Z_{r2r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

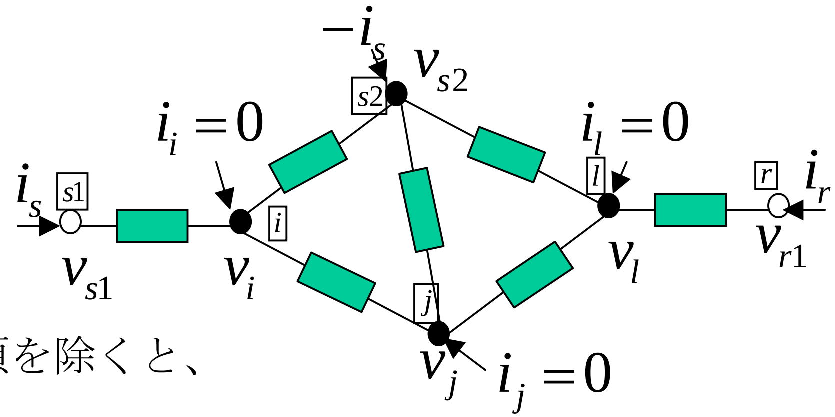
Y行列が対称なら、Z行列も対称で、$Z_{ij} = Z_{ji}$であるから、上式を

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sr} \\ Z_{rs} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

と書いたとき、$Z_{sr} = Z_{rs}$と対称になることが分かる。

次に、回路網中の零電位面を一つだけ含むように、四端子を選定し四端子回路を形成した場合を考える。要素となる各四端子回路は前頁までの考察で 対称なY 行列で代表できる。

この回路網の中の端子 $s1, s2$ と端子 r に着目し、これ以外の端子に外部から流入する電流を0とする。端子 $s1$ に流入する電流 i_s が端子 $s2$ から流出し端子 r に流入する電流 i_r が零電位面から流出するものとすれば次式が成り立つ。（右図）



$I = YV$ から、$Z = Y^{-1}$ を用いて、$V = ZI$ とし $i = 0$ の項を除くと、

$$\begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s1s1} & Z_{s1s2} & Z_{s1r} \\ Z_{s2s1} & Z_{s2s2} & Z_{s2r} \\ Z_{rs1} & Z_{rs2} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ -i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$
、$v_s = v_{s1} - v_{s2}$ として書き直すと、

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} - v_{s2} \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{s1s1} - Z_{s2s1} - Z_{s1s2} + Z_{s2s2} & Z_{s1r} - Z_{s2r} \\ Z_{rs1} - Z_{rs2} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

Y 行列が対称なら、Z 行列も対称で、$Z_{ij} = Z_{ji}$ であるから、上式を

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ss} & Z_{sr} \\ Z_{rs} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$
と書いたとき、$Z_{sr} = Z_{rs}$ と対称になることが分かる。

以上から、任意の受動回路網（s, r 端子以外の端子に流入する電流が 0 かつ内部に電源がない ）から4端子を取り出し四端子回路を作るとその四端子定数についてAD-BC = 1 が成り立つことが分かる。(前記(1)~(4) の要素で通常の回路要素を代表できると考えている）