2元1次方程式を逆行列を使って解く方法

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

行列形式で書くと

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$、 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$の逆行列を両辺の左から掛けて、

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, $\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{次ページ参照。}}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} de - bf \\ -ce + af \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{de - bf}{ad - bc} \\ \dfrac{af - ce}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

すなわち、$x = \dfrac{de - bf}{ad - bc}$, $y = \dfrac{af - ce}{ad - bc}$

一般に、$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$…これは覚えておくと便利。

ただし、$ad-bc \neq 0$ のときにのみ逆行列が存在する。

右辺は$ad-bc$(たすき掛けの積の差)を分母とし、もとの行列の

a, dを入れ変えb, c の符号を変えるとできる

[確認]

逆行列を左から掛けると$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -bc+ad \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆行列を右から掛けると$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例１

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$$ 、行列形式で書くと、$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{12-10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 16-12 \\ -20+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

すなわち、$x = 2,\ y = -1$

例２

$$\begin{cases} 4u + 5v = 13 \\ 3u + 2v = 8 \end{cases}$$ 、行列形式で書くと、$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{8-15}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} 26-40 \\ -39+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

すなわち、$u = 2,\ v = 1$

例3

平面歪み状態での応力が与えられているとき、歪みを求める。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

$K = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$,これから、逆行列を用いて、

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{K\left\{(1-\nu)^2 - \nu^2\right\}} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix}$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y \\ (1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x \end{bmatrix}$$

となり$\varepsilon_x, \varepsilon_y$が得られます。