

## 2元1次方程式を逆行列を使って解く方法

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

行列形式で書くと

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ の逆行列を両辺の左から掛けて、}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ 次ページ参照。}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} de - bf \\ -ce + af \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{de - bf}{ad - bc} \\ \frac{af - ce}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

すなわち、 $x = \frac{de - bf}{ad - bc}$ ,  $y = \frac{af - ce}{ad - bc}$

一般に、 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ...これは覚えておくと便利。

ただし、 $ad-bc \neq 0$  のときにのみ逆行列が存在する。

右辺は $ad-bc$ (たすき掛けの積の差)を分母とし、もとの行列の $a, d$ を入れ変え $b, c$ の符号を変えるとできる

[確認]

$$\begin{aligned} \text{逆行列を左から掛ける} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -bc+ad \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{逆行列を右から掛ける} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 例1

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}、行列形式で書くと、\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{12-10} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16-12 \\ -20+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

すなわち、 $x = 2, y = -1$

## 例2

$$\begin{cases} 4u + 5v = 13 \\ 3u + 2v = 8 \end{cases}、行列形式で書くと、\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{8-15} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{-1}{7} \begin{bmatrix} 26-40 \\ -39+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

すなわち、 $u = 2, v = 1$

### 例3

平面歪み状態での応力が与えられているとき、歪みを求める。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

$K = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ , これから、逆行列を用いて、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} &= \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{K \left\{ (1-\nu)^2 - \nu^2 \right\}} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \\ &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y \\ (1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x \end{bmatrix} \text{となり } \varepsilon_x, \varepsilon_y \text{ が得られます。}$$