二桁乗算の簡単化補記

二桁乗算簡単化補記

二桁乗算も特別な場合には非常に簡単にできる。その例は「二桁乗算の簡単化」で述べた(手法2, 3, 6)。
これに反し、一般的に、いつでも応用可能な方法の例は手法1, 4、5として示した。
今回は、もう一つ、二桁以下の数の二乗を暗記しておけばどんな場合でも使える方法を紹介する。真偽の程は不明だが、インド人は二桁の九九を暗記する訓練を受けるとのこと、この場合は約1万個あるいは2数の大小に順序をつけた片側だけとしても約5千個の暗記が必要となる。
これに比べれば二乗の数は0から99までの100 個でよいので負担は少ない。
この方法は手法4の応用としてAを2数の平均値とする場合に等しい。
たとえば、理由は次ページ以下に説明するが、奇数どうしまたは偶数どうしの場合の例は、

$$83 \times 69 = 76^2 - 7^2 = 5776 - 49 = 5727$$

$$38 \times 96 = 67^2 - 29^2 = 4489 - 841 = 3648$$

奇数×偶数または偶数×奇数の場合の例は、

$$74 \times 59 = 66^2 - 7^2 + 59 = 4356 - 49 + 59 = 4366$$

$$37 \times 68 = 52^2 - 15^2 + 37 = 2704 - 225 + 37 = 2516$$

などとなる。

(説明1、　2数が偶数どうしまたは奇数どうしの場合)

2数を、X, Y,かつ$X \geq Y$,和の半分をA,差の半分をBとすると、

$A=\dfrac{X+Y}{2}$, $B=\dfrac{X-Y}{2}$, 両式の和と差を作ると、

$A+B=X$, $A-B=Y$, 従って、$XY=(A+B)(A-B)=A^2-B^2$となる。

ここで、計算の便利のために、$A=\dfrac{X+Y}{2}=\dfrac{X-Y}{2}+Y=B+Y$を利用する。

すなわち、2数の差の半分のBを先に求め、それに小さい数Yを加えるとAになることを使う。

X, Yが奇数どうしあるいは偶数どうしの場合はA, Bは整数になるので次のように計算できる。

83×69では、差の半分$B=(83-69)/2=14/2=7$, 和の半分は、小さい方の69に$B=7$を加えて, $A=Y+B=69+7=76$, したがって、

$83\times 69=76^2-7^2=5776-49=5727$

38×96では、$B=(96-38)/2=58/2=29$, $A=29+38=67$,したがって、

$38\times 96=67^2-29^2=4489-841=3648$

(説明2、偶数$\times$奇数または奇数$\times$偶数の場合)

2数を、X, Y, かつ$X \geq Y$とする。大きい方のXを$X = X'+1$ $(X' = X - 1)$と書けば、XとX'は偶奇が逆になるので、X'とYは偶数どうしまたは、奇数どうしとなることが分かる。このとき、$X \times Y = \left(X'+1\right)\times Y = X'\times Y + Y$となる。

$A = \dfrac{X'+Y}{2}$, $B = \dfrac{X'-Y}{2}$と置く。$A = Y + B$である。両式の和と差を作ると、

$A + B = X'$, $A - B = Y$, 従って、$X'Y = \left(A+B\right)\left(A-B\right) = A^2 - B^2$となる。

$\therefore\ XY = X'\times Y + Y = A^2 - B^2 + Y$

74×59では、$B = \left(73-59\right)/2 = 14/2 = 7$, Aは、小さい方59に$B = 7$を加えて

$A = Y + B = 59 + 7 = 66$, したがって、

$74\times 59 = 66^2 - 7^2 + 59 = 4356 - 49 + 59 = 4366$

37×68では、$B = \left(67-37\right)/2 = 30/2 = 15$, $A = 37 + 15 = 52$,したがって、

$37\times 68 = 52^2 - 15^2 + 37 = 2704 - 225 + 37 = 2516$

2桁数の2乗を暗記するのは、高齢者にとっては大きな負担とも考えられるがボケ防止?の頭の体操と思えば出来ないことではない。

次ページに二乗の表を示す。

0	0	20	400	40	1600	60	3600	80	6400
1	1	21	441	41	1681	61	3721	81	6561
2	4	22	484	42	1764	62	3844	82	6724
3	9	23	529	43	1849	63	3969	83	6889
4	16	24	576	44	1936	64	4096	84	7056
5	25	25	625	45	2025	65	4225	85	7225
6	36	26	676	46	2116	66	4356	86	7396
7	49	27	729	47	2209	67	4489	87	7569
8	64	28	784	48	2304	68	4624	88	7744
9	81	29	841	49	2401	69	4761	89	7921
10	100	30	900	50	2500	70	4900	90	8100
11	121	31	961	51	2601	71	5041	91	8281
12	144	32	1024	52	2704	72	5184	92	8464
13	169	33	1089	53	2809	73	5329	93	8649
14	196	34	1156	54	2916	74	5476	94	8836
15	225	35	1225	55	3025	75	5625	95	9025
16	256	36	1296	56	3136	76	5776	96	9216
17	289	37	1369	57	3249	77	5929	97	9409
18	324	38	1444	58	3364	78	6084	98	9604
19	361	39	1521	59	3481	79	6241	99	9801

a. $X=26$〜75のとき、

$X^2=(X-25)\times100+(X-50)^2$

$=(X-25)//(X-50)^2$

例、 $37^2=(37-25)//(37-50)^2$

$=12//13^2=12//169=1369$

$68^2=(68-25)//(68-50)^2$

$=43//18^2=43//324=4624$

b. $Y=76$〜125のとき、

$Y^2=(Y-50)\times2\times100+(Y-100)^2$

$=(Y-50)\times2//(Y-100)^2$

例、 $87^2=(87-50)\times2//(87-100)^2$

$=37\times2//13^2=74//169=7569$

$93^2=(93-50)\times2//(93-100)^2$

$=43\times2//7^2=86//49=8649$

記憶が曖昧になったときに計算で求めるには、次のようにして確かめられる。

①1位の数が0のときの2乗は簡単に求められる。

②1位が5のときも、$75^2=(7\times8)//25=5625$、 $85^2=(8\times9)//25=7225$ のように簡単である。

③最低限 1〜25の2乗を記憶しておくと、右に示すように計算できる。