二桁乗算の簡単化について

二桁数同士の掛け算は日常よく現れるが、これについて電卓なしの、暗算あるいは簡単なメモの利用などで計算のスピードアップや検算に役立てる方法をご紹介する。

<u>復習</u>　小学校以来習って来た最も一般的な掛け算は、たとえば

$43\times56=43\times6+43\times5\times10=258+2150=2408$

とする方式である。これは、X と $[ab]=(10a+b)$ との積として一般的に書けば、

$X\times(10a+b)=X\times b+X\times a\times10$

であり、まず、$X\times b$ を書き次に $X\times a$ を 1 行下に一桁左にずらして書いて加える方法である。

この方法では、一般には暗算では難しい。

<u>手法１</u>　従来方法を少し変形し、

$43\times56=(4\times5\times100+3\times6)+(4\times6+3\times5)\times10=2018+390=2408$

とする方法がある。これは、10位の数同士の積 $4\times5=20$ の 100 倍に、1 位の数同士の積 18 を加え、10位と 1 位のたすき掛けの積の和 39の 10倍加える方式で、一般的に書けば、

$(10a+b)\times(10c+d)=(ac\times100+bd)+(ad+bc)\times10$

で $(ac\times100+bd)$ の部分（上の例では $2000+18=2018$）が、桁の重なりがなく 2018 と、一気に書下ろしができる点で扱いやすい。

// を 100倍、/ を 10倍の意味とすれば、$[ab]\times[cd]=(ac//bd)+(ad+bc)/$ と表記できる。

上記例では $43\times56=(4\times5//3\times6)+(4\times6+3\times5)/=2018+390=2408$

<u>手法２</u>．　10位の数が同じで 1 位の数の和が 10 である場合。

例　$42\times48=4\times5//2\times8=2016,\ 74\times76=7\times8//4\times6=5624$

すなわち、10位の数（4、7）に一つ多い数

（５、８）を掛けて１００倍し、１位の数の積を加える。この証明は、$b+c=10$ に注意して、次の通り。

$$(10a+b)(10a+c)=100a^2+10a(b+c)+cd=100a^2+100a+cd$$
$$=100a(a+1)+cd=a(a+1)//cd$$

つまり、$a(a+1)$ の１００倍に、cd を加えればよい。

<u>手法３</u>．１０位の数の和が１０で、１位の数が同じ場合。

例　$24\times 84=(2\times 8+4)//4^2=2016,\ 47\times 67=(4\times 6+7)//7^2=3149$

すなわち、１０位の数の積に１位の数を加えて１００倍し、１位の数の２乗を加える。

この証明は、次のとおり。

$$(10b+a)(10c+a)=100bc+10a(b+c)+a^2=100bc+100a+a^2$$
$$=100(bc+a)+a^2=(bc+a)//a^2$$

<u>手法４</u>．手法２，３とは異なり、いつでも正しい方法（いつでも暗算化に役立つとは限らないがうまく使えばかなり有効である）として紹介する。これは、二つの数 X, Y の双方または一方が、あるラウンドな数 A（１０の倍数など）に近いときに便利な方法である。

例　$\underset{X}{\overset{+3}{73}}\times\underset{Y}{\overset{+6}{76}}=\underset{A}{70}\times\underset{\substack{X+\Delta y\\ Y+\Delta x}}{\overset{\substack{73+6\\ 76+3}}{79}}+\underset{\Delta x}{3}\times\underset{\Delta y}{6}=5548,\quad \underset{X}{\overset{-3}{47}}\times\underset{Y}{\overset{+2}{52}}=\underset{A}{50}\times\underset{\substack{X+\Delta y\\ Y+\Delta x}}{\overset{\substack{47+2\\ 52-3}}{49}}+(-\underset{\Delta x}{3})\times\underset{\Delta y}{2}=2444$

すなわち、A として左の例では 70、右の例では 50 をとり、$\Delta x=X-A, \Delta y=Y-A$ と置いて、A に $X+Y-A=X+\Delta y=Y+\Delta x$ を掛け、それに差分の積 $\Delta x\times\Delta y$ を加える。

この証明は次のとおり。

$$XY=(A+X-A)(A+Y-A)=A^2+A(X-A+Y-A)+(X-A)(Y-A)$$
$$=A(X+Y-A)+(X-A)(Y-A)=A(X+\Delta y)+\Delta x\Delta y=A(Y+\Delta x)+\Delta x\Delta y$$

左の例では、$A=70, \Delta x=73-70=3,\ \Delta y=76-70=6$

右の例では、$A=50, \Delta x=47-50=-3,\ \Delta y=52-50=2$

Aは任意であるから、左の例で$A=80$とすると、次のとおりとなる。

$$\overset{-7}{\underset{X}{73}}\times\overset{-4}{\underset{Y}{76}}=\underset{A}{80}\times\overset{\substack{73-4\\76-7}}{\underset{\substack{X+\Delta y\\Y+\Delta x}}{69}}+\underset{\Delta x}{(-7)}\times\underset{\Delta y}{(-4)}=5520+28=5548$$

・<u>手法4の表記法の工夫</u>

手法4を次のように表記するとメモ利用などに便利である。

$$\overset{-7}{73}\overset{69}{\underset{80}{\times}}\overset{-4}{76}=69\times80+(-7)\times(-4)=5520+28=5548$$

すなわち、×の下にAを、X、Yの上に$\Delta x=X-A$と$\Delta y=Y-A$を、×の上にたすき掛けの和である$X+\Delta y$(または$Y+\Delta x$)$=A+(\Delta x+\Delta y)$を書く。計算は×の上下の掛け算に$\Delta x\times\Delta y$を加えればよい。左辺の表記だけをメモすれば大概は暗算化できよう。

<u>Aの選び方</u>は、ΔxとΔyの少なくとも一方の絶対値が5以下になるようにする。

$$\overset{3}{73}\overset{71}{\underset{70}{\times}}\overset{-2}{68}=71\times70+3\times(-2)=4970-6=4964$$

手法4は$\Delta x,\Delta y$の一方が小さければ他方が多少大きくても使える。たとえば、

$$\overset{3}{73}\overset{59}{\underset{70}{\times}}\overset{-14}{56}=59\times70+3\times(-14)=4130-42=4088$$ である。

１位の数の和が１０のときは、簡単になる。Aとして平均値をとるのもよい。

$$\overset{3}{73}\overset{30}{\underset{70}{\times}}\overset{-43}{27}=30\times70+3\times(-43)=2100-129=1971$$

$$\overset{23}{73}\overset{50}{\underset{50}{\times}}\overset{-23}{27}=50^2-23^2=2500-529=1971$$

特に、X、Yが１００または５０に近くΔx、Δyが１桁にできる場合はA＝１００または、A＝５０とするとよい。

$$\overset{-7}{93}\overset{91}{\underset{100}{\times}}\overset{-2}{98}=91\times100+(-7)\times(-2)=9114$$

$$\overset{3}{53}\underset{50}{\overset{49}{\times}}\overset{-4}{46}=49\times 50+3\times(-4)=2450-12=2438$$

手法4は、次のように二乗の計算にも応用できる。

$$\overset{-3}{37}\underset{40}{\overset{34}{\times}}\overset{-3}{37}=34\times 40+(-3)^2=1360+9=1369$$

$$\overset{3}{73}\underset{70}{\overset{76}{\times}}\overset{3}{73}=76\times 70+3^2=5320+9=5329$$

$$\overset{-2}{98}\underset{100}{\overset{96}{\times}}\overset{-2}{98}=96\times 100+(-2)^2=9604$$

二乗の計算にはさらに別の方法もあるので後節で取り上げる。

<u>手法　5</u>.ラウンドな数同士の掛け算にして、差分を修正する。手法1の拡張でもある。

例

$$78\times 69=(80\times 70+2)-80-70\times 2=5382,\quad 91\times 71=90\times 70+1+(90+70)=6461$$
$$78\times 31=(80\times 30-2)+80-30\times 2=2418,\quad 91\times 19=(90\times 20-1)-90+20=1729$$

この証明は、 $\Delta x=X-A,\ \Delta y=Y-B$ として次式。

$$XY=(A+X-A)\times(B+Y-B)=AB+(X-A)(Y-B)+A(Y-B)+B(X-A)$$
$$=(AB+\Delta x\Delta y)+(A\Delta y+B\Delta x)$$

表記法としては次の方法が考えられる。

(右辺は一桁の掛け算なので暗算化は容易)

$$\underset{8/}{\overset{-2}{78}}\ \underset{-8/}{\overset{-14/}{\times}}\ \underset{7/}{\overset{-1}{69}}=\{8\times 7//(-2)\times(-1)\}+(-14-8)/=(56//2)-22/=5602-220=5382$$

$$\underset{8/}{\overset{-2}{78}}\ \underset{+8/}{\overset{-6/}{\times}}\ \underset{3/}{\overset{+1}{31}}=\{8\times 3//(-2)\times 1\}+(-6+8)/=(24//-2)+2/=2398+20=2418$$

<u>手法　6</u>.適当な数 m があって、一方の m 倍がラウンドな数になる場合は、これと他方を m で割った数との積、あるいは乗算結果を m で割る方法。

例　$88\times 25=22\times 100=2200(m=4),\quad 89\times 25=89\times 100\div 4=2225(m=4)$

$$86\times 23=\overset{-7}{43}\underset{50}{\overset{39}{\times}}\overset{-4}{46}=1950+28=1978,\quad 94\times 27=\overset{-3}{47}\underset{50}{\overset{51}{\times}}\overset{4}{54}=2550-12=2538$$

二乗の計算

（１）手法１はいつでも使えるが、たすき掛けの積が小さいときが扱いやすい。手法２、３の使用は極めて限定されるが条件が合えば大変便利である。手法４は比較的便利に使える。

例

$23^2 = 409 + 120 = 529$　手法　1

$35^2 = 1225,\ 57^2 = 3249$　手法　２、３。”５，５”の場合のみ。

$87^2 = \overset{-3}{87}\underset{90}{\overset{84}{\times}}\overset{-3}{87} = 7569$　手法　４。

（２）X＝２５～７５ $\left(|X - 50| \le 25\right)$ の二乗

　２５以下の数の二乗を覚えているか別途計算すれば以下の方法で簡略化できる。

例　（証明は次項参照）

$$43^2 = (43 - 25) // (43 - 50)^2 = 1849$$

$$58^2 = (58 - 25) // (58 - 50)^2 = 3364$$

$$28^2 = (28 - 25) // (28 - 50)^2 = 3 // 22^2 = 3 // 484 = 784$$

$$74^2 = (74 - 25) // (74 - 50)^2 = 49 // 24^2 = 49 // 576 = 5476$$

（３）X＝７５～１２５ $\left(|X - 100| \le 25\right)$の二乗

１００以上を含んでいるが同様に扱える。

$$78^2 = (78 - 50) \times 2 // (100 - 78)^2 = 56 // 22^2 = 56 // 484 = 6084$$

$$86^2 = (86 - 50) \times 2 // (100 - 86)^2 = 72 // 14^2 = 72 // 196 = 7396$$

$$93^2 = (93 - 50) \times 2 // (100 - 93)^2 = 86 // 7^2 = 86 // 49 = 8649$$

$$123^2 = (123 - 50) \times 2 // (123 - 100)^2 = 146 // 23^2 = 146 // 529 = 15129$$

証明

（２）（３）の証明は次の通り。

$$X^2=(A+X-A)^2=A^2+2A(X-A)+(X-A)^2$$

$$=A(2X-A)+(X-A)^2=2A(X-A/2)+(X-A)^2$$

$A=50$ とすれば、

$$X^2=100(X-25)+(X-50)^2=(X-25)//(X-50)^2$$

$A=100$ とすれば、

$$X^2=200(X-50)+(X-100)^2=(X-50)\times 2//(100-X)^2$$

さらに、$A=50n$ とすれば、

$$X^2=100n(X-25n)+(X-50n)^2=(X-25n)\times n//(X-50n)^2$$

n は $|X-50n|\le 25$ となるように選ぶ。

たとえば、A＝２００，n＝４ として、

$$187^2=(187-100)\times 4//(187-200)^2=87\times 4//13^2=348//169=34969$$

即ち、二桁に限らず三桁でも計算できる。

また、Ｘ＝４１～５９、９１～１０９、１４１～１５９・・・では、$(X-A)^2$ が一桁数の二乗となり、桁の重なりがなく計算が容易である。

例　n＝３、$158^2=(158-75)\times 3//(158-150)^2=83\times 3//8^2=249//64=24964$

（４）　二乗公式法

$(10a+b)^2=a^2\times 100+2ab\times 10+b^2=a^2//2ab/b^2$ による方法

例

$43^2=4^2//2\times 4\times 3/3^2=16//24/9=1849$

$78^2=7^2//2\times 7\times 8/8^2=49//112/64=6084$

（５）　一つ隣が既知の場合

たとえば、$25^2=625$ は手法２で計算可能であり、これをもとに前後に拡大できる。

$26^2=25^2+25+26=676,\ \ 27^2=26^2+26+27=729$

$24^2 = 25^2 - 25 - 24 = 576,\ 23^2 = 24^2 - 24 - 23 = 529$
この証明は次の通り。

$$(N+1)^2 - N^2 = (N+1) + N \to (N+1)^2 = N^2 + N + (N+1)$$

（6） 二乗計算の応用

手法 4 の A の選び方の所でも述べたが、A として X、Y の平均値を取ると二乗の差になる。二桁数の 2 乗を暗記するとよい。

$A = \dfrac{X+Y}{2}$ とすれば、

$$XY = \left(\frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2}\right)\left(\frac{X+Y}{2} - \frac{X-Y}{2}\right) = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2$$
$$= A^2 - (A-Y)^2 = A^2 - (X-A)^2$$

X、Y の一方が奇数のときは、そのままでは平均値に小数を含むが、次のようにすれば求められる。

二つの数の内大きい方を X、小さい方を Y とする。$X = A + 1$ とすれば、A と Y は奇数同士または偶数同士になる。

$X = A + 1$ とすると、
$XY = (A+1)Y = AY + Y = (X-1)Y + Y$ であるから
$AY = (X-1)Y$ について 上と同様に計算し、結果にYを加算すればよい。
逆に、$Y = B + 1$とすれば、$XY = XB + X = X(Y-1) + X$ であるから、小さい数から1を引いて計算した結果に大きい数を加える方法でもよい。

例

$53 \times 26 = 52 \times 26 + 26 = 39^2 - 13^2 + 26 = 1521 - 169 + 26 = 1378$
$78 \times 69 = 77 \times 69 + 69 = 73^2 - 4^2 + 69 = 5329 - 16 + 69 = 5382$
$78 \times 69 = 78 \times 68 + 78 = 73^2 - 5^2 + 78 = 5329 - 25 + 78 = 5382$
$81 \times 62 = 80 \times 62 + 62 = 4960 + 62 = 5022$
$82 \times 61 = 82 \times 60 + 82 = 4920 + 82 = 5002$

