

二桁乗算の簡単化について

二桁数同士の掛け算は日常よく現れるが、これについて電卓なしの、暗算あるいは簡単なメモの利用などで計算のスピードアップや検算に役立てる方法をご紹介します。

復習 小学校以来習って来た最も一般的な掛け算は、たとえば

$$43 \times 56 = 43 \times 6 + 43 \times 5 \times 10 = 258 + 2150 = 2408$$

とする方式である。これは、 X と $[ab] = (10a + b)$ との積として一般的に書けば、

$$X \times (10a + b) = X \times b + X \times a \times 10$$

であり、まず、 $X \times b$ を書き次に $X \times a$ を 1 行下に一桁左にずらして書いて加える方法である。

この方法では、一般には暗算では難しい。

手法 1 従来方法を少し変形し、

$$43 \times 56 = (4 \times 5 \times 100 + 3 \times 6) + (4 \times 6 + 3 \times 5) \times 10 = 2018 + 390 = 2408$$

とする方法がある。これは、10 位の数同士の積 $4 \times 5 = 20$ の 100 倍に、1 位の数同士の積 18 を加え、10 位と 1 位のたすき掛けの積の和 39 の 10 倍加える方式で、一般的に書けば、

$$(10a + b) \times (10c + d) = (ac \times 100 + bd) + (ad + bc) \times 10$$

で $(ac \times 100 + bd)$ の部分（上の例では $2000 + 18 = 2018$ ）が、桁の重なりがなく 2018 と、一気に書下ろしができる点で扱いやすい。

// を 100 倍、/ を 10 倍の意味とすれば、 $[ab] \times [cd] = (ac // bd) + (ad + bc) /$ と表記できる。

上記例では $43 \times 56 = (4 \times 5 // 3 \times 6) + (4 \times 6 + 3 \times 5) / = 2018 + 390 = 2408$

手法 2 . 10 位の数が同じで 1 位の数の和が 10 である場合。

例 $42 \times 48 = 4 \times 5 // 2 \times 8 = 2016$, $74 \times 76 = 7 \times 8 // 4 \times 6 = 5624$

すなわち、10 位の数 (4、7) に一つ多い数

(5、8)を掛けて100倍し、1位の数の積を加える。この証明は、 $b+c=10$ に注意して、次の通り。

$$(10a+b)(10a+c) = 100a^2 + 10a(b+c) + cd = 100a^2 + 100a + cd \\ = 100a(a+1) + cd = a(a+1)//cd$$

つまり、 $a(a+1)$ の100倍に、 cd を加えればよい。

手法3 . 10位の数の和が10で、1位の数が同じ場合。

$$\text{例 } 24 \times 84 = (2 \times 8 + 4) // 4^2 = 2016, 47 \times 67 = (4 \times 6 + 7) // 7^2 = 3149$$

すなわち、10位の数の積に1位の数を加えて100倍し、1位の数の2乗を加える。この証明は、次のとおり。

$$(10b+a)(10c+a) = 100bc + 10a(b+c) + a^2 = 100bc + 100a + a^2 \\ = 100(bc+a) + a^2 = (bc+a) // a^2$$

手法4 . 手法2, 3とは異なり、いつでも正しい方法(いつでも暗算化に役立つとは限らないがうまく使えばかなり有効である)として紹介する。これは、二つの数 X, Y の双方または一方が、あるラウンドな数 A (10の倍数など)に近いときに便利な方法である。

$$\text{例 } \begin{array}{c} +3 \quad +6 \\ X \quad Y \end{array} 73 \times 76 = 70 \times \begin{array}{c} 73+6 \\ 76+3 \\ A \quad X+\Delta y \\ Y+\Delta x \end{array} 79 + 3 \times 6 = 5548, \quad \begin{array}{c} -3 \quad +2 \\ X \quad Y \end{array} 47 \times 52 = 50 \times \begin{array}{c} 47+2 \\ 52-3 \\ A \quad X+\Delta y \\ Y+\Delta x \end{array} 49 + (-3) \times 2 = 2444$$

すなわち、 A として左の例では70、右の例では50をとり、 $\Delta x = X - A, \Delta y = Y - A$ と置いて、 A に $X+Y-A = X+\Delta y = Y+\Delta x$ を掛け、それに差分の積 $\Delta x \times \Delta y$ を加える。

この証明は次のとおり。

$$XY = (A+X-A)(A+Y-A) = A^2 + A(X-A+Y-A) + (X-A)(Y-A) \\ = A(X+Y-A) + (X-A)(Y-A) = A(X+\Delta y) + \Delta x \Delta y = A(Y+\Delta x) + \Delta x \Delta y$$

左の例では、 $A=70, \Delta x=73-70=3, \Delta y=76-70=6$

右の例では、 $A=50, \Delta x=47-50=-3, \Delta y=52-50=2$

A は任意であるから、左の例で $A=80$ とすると、次のとおりとなる。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 73-4 & & \\ & & & & 76-7 & & \\ -7 & -4 & & & & & \\ 73 \times 76 = 80 \times 69 + (-7) \times (-4) = 5520 + 28 = 5548 \\ X & Y & A & \frac{X+\Delta x}{Y+\Delta y} & \Delta x & \Delta y & \end{array}$$

・ 手法 4 の表記法の工夫

手法 4 を次のように表記するとメモ利用などに便利である。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 73-4 & & \\ & & & & 69-7 & & \\ -7 & -4 & & & & & \\ 73 \times 76 = 69 \times 80 + (-7) \times (-4) = 5520 + 28 = 5548 \\ & 80 & & & & & \end{array}$$

すなわち、 \times の下に A を、 X 、 Y の上に $\Delta x = X - A$ と $\Delta y = Y - A$ を、 \times の上にたすき掛けの和である $X + \Delta y$ (または $Y + \Delta x$) = $A + (\Delta x + \Delta y)$ を書く。計算は \times の上下の掛け算に $\Delta x \times \Delta y$ を加えればよい。左辺の表記だけをメモすれば大概は暗算化できよう。

A の選び方 は、 Δx と Δy の少なくとも一方の絶対値が 5 以下になるようにする。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & 71-2 & \\ & & & & 70 & & \\ 73 \times 68 = 71 \times 70 + 3 \times (-2) = 4970 - 6 = 4964 \\ & 70 & & & & & \end{array}$$

手法 4 は $\Delta x, \Delta y$ の一方が小さければ他方が多少大きくても使える。たとえば、

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & 59-14 & \\ & & & & 70 & & \\ 73 \times 56 = 59 \times 70 + 3 \times (-14) = 4130 - 42 = 4088 \quad \text{である。} \\ & 70 & & & & & \end{array}$$

1 位の数の和が 10 のときは、簡単になる。A として平均値をとるのもよい。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & 30-43 & \\ & & & & 70 & & \\ 73 \times 27 = 30 \times 70 + 3 \times (-43) = 2100 - 129 = 1971 \\ & 70 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 23 & 50-23 & \\ & & & & 50 & & \\ 73 \times 27 = 50^2 - 23^2 = 2500 - 529 = 1971 \\ & 50 & & & & & \end{array}$$

特に、 X 、 Y が 100 または 50 に近く Δx 、 Δy が 1 桁にできる場合は $A=100$ または、 $A=50$ とするとよい。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & -7 & 91-2 & \\ & & & & 100 & & \\ 93 \times 98 = 91 \times 100 + (-7) \times (-2) = 9114 \\ & 100 & & & & & \end{array}$$

$${}_{50}^{3\ 49\ -4} 53 \times 46 = 49 \times 50 + 3 \times (-4) = 2450 - 12 = 2438$$

手法 4 は、次のように二乗の計算にも応用できる。

$${}_{40}^{-3\ 34\ -3} 37 \times 37 = 34 \times 40 + (-3)^2 = 1360 + 9 = 1369$$

$${}_{70}^3\ 76\ 3\ 73 \times 73 = 76 \times 70 + 3^2 = 5320 + 9 = 5329$$

$${}_{100}^{-2\ 96\ -2} 98 \times 98 = 96 \times 100 + (-2)^2 = 9604$$

二乗の計算にはさらに別の方法もあるので後節で取り上げる。

手法 5. ラウンドな数同士の掛け算にして、差分を修正する。手法 1 の拡張でもある。例

$$78 \times 69 = (80 \times 70 + 2) - 80 - 70 \times 2 = 5382, \quad 91 \times 71 = 90 \times 70 + 1 + (90 + 70) = 6461$$

$$78 \times 31 = (80 \times 30 - 2) + 80 - 30 \times 2 = 2418, \quad 91 \times 19 = (90 \times 20 - 1) - 90 + 20 = 1729$$

この証明は、 $\Delta x = X - A$, $\Delta y = Y - B$ として次式。

$$\begin{aligned} XY &= (A + X - A) \times (B + Y - B) = AB + (X - A)(Y - B) + A(Y - B) + B(X - A) \\ &= (AB + \Delta x \Delta y) + (A \Delta y + B \Delta x) \end{aligned}$$

表記法としては次の方法が考えられる。

(右辺は一桁の掛け算なので暗算化は容易)

$${}_{8/-8/7/}^{-2\ -14/\ -1} 78 \times 69 = \{8 \times 7 // (-2) \times (-1)\} + (-14 - 8) / = (56 // 2) - 22 / = 5602 - 220 = 5382$$

$${}_{8/+8/3/}^{-2\ -6/\ +1} 78 \times 31 = \{8 \times 3 // (-2) \times 1\} + (-6 + 8) / = (24 // -2) + 2 / = 2398 + 20 = 2418$$

手法 6. 適当な数 m があって、一方の m 倍がラウンドな数になる場合は、これと他方を m で割った数との積、あるいは乗算結果を m で割る方法。

$$\text{例 } 88 \times 25 = 22 \times 100 = 2200 (m = 4), \quad 89 \times 25 = 89 \times 100 \div 4 = 2225 (m = 4)$$

$$86 \times 23 = {}_{50}^{-7\ 39\ -4} 43 \times 46 = 1950 + 28 = 1978, \quad 94 \times 27 = {}_{50}^{-3\ 51\ 4} 47 \times 54 = 2550 - 12 = 2538$$

二乗の計算

(1) 手法 1 はいつでも使えるが、たすき掛けの積が小さいときが扱いやすい。手法 2、3 の使用は極めて限定されるが条件が合えば大変便利である。手法 4 は比較的便利に使える。

例

$$23^2 = 409 + 120 = 529 \quad \text{手法 1}$$

$$35^2 = 1225, \quad 57^2 = 3249 \quad \text{手法 2、3。"5,5"の場合のみ。}$$

$$87^2 = \overset{-3}{87} \times \overset{-3}{87} = 7569 \quad \text{手法 4。}$$

(2) $X = 25 \sim 75$ ($|X - 50| \leq 25$) の二乗

25 以下の数の二乗を覚えているか別途計算すれば以下の方法で簡略化できる。

例 (証明は次項参照)

$$43^2 = (43 - 25) // (43 - 50)^2 = 1849$$

$$58^2 = (58 - 25) // (58 - 50)^2 = 3364$$

$$28^2 = (28 - 25) // (28 - 50)^2 = 3 // 22^2 = 3 // 484 = 784$$

$$74^2 = (74 - 25) // (74 - 50)^2 = 49 // 24^2 = 49 // 576 = 5476$$

(3) $X = 75 \sim 125$ ($|X - 100| \leq 25$) の二乗

100 以上を含んでいるが同様に扱える。

$$78^2 = (78 - 50) \times 2 // (100 - 78)^2 = 56 // 22^2 = 56 // 484 = 6084$$

$$86^2 = (86 - 50) \times 2 // (100 - 86)^2 = 72 // 14^2 = 72 // 196 = 7396$$

$$93^2 = (93 - 50) \times 2 // (100 - 93)^2 = 86 // 7^2 = 86 // 49 = 8649$$

$$123^2 = (123 - 50) \times 2 // (123 - 100)^2 = 146 // 23^2 = 146 // 529 = 15129$$

証明

(2)(3)の証明は次の通り。

$$X^2 = (A + X - A)^2 = A^2 + 2A(X - A) + (X - A)^2$$

$$= A(2X - A) + (X - A)^2 = 2A(X - A/2) + (X - A)^2$$

$A = 50$ とすれば、

$$X^2 = 100(X - 25) + (X - 50)^2 = (X - 25) \times 2 // (X - 50)^2$$

$A = 100$ とすれば、

$$X^2 = 200(X - 50) + (X - 100)^2 = (X - 50) \times 2 // (100 - X)^2$$

さらに、 $A = 50n$ とすれば、

$$X^2 = 100n(X - 25n) + (X - 50n)^2 = (X - 25n) \times n // (X - 50n)^2$$

n は $|X - 50n| \leq 25$ となるように選ぶ。

たとえば、 $A = 200$ 、 $n = 4$ として、

$$187^2 = (187 - 100) \times 4 // (187 - 200)^2 = 87 \times 4 // 13^2 = 348 // 169 = 34969$$

即ち、二桁に限らず三桁でも計算できる。

また、 $X = 41 \sim 59$ 、 $91 \sim 109$ 、 $141 \sim 159 \dots$

では、 $(X - A)^2$ が一桁数の二乗となり、桁の重なりがなく計算が容易である。

例 $n = 3$ 、 $158^2 = (158 - 75) \times 3 // (158 - 150)^2 = 83 \times 3 // 8^2 = 249 // 64 = 24964$

(4) 二乗公式法

$$(10a + b)^2 = a^2 \times 100 + 2ab \times 10 + b^2 = a^2 // 2ab / b^2 \text{ による方法}$$

例

$$43^2 = 4^2 // 2 \times 4 \times 3 / 3^2 = 16 // 24 / 9 = 1849$$

$$78^2 = 7^2 // 2 \times 7 \times 8 / 8^2 = 49 // 112 / 64 = 6084$$

(5) 一つ隣が既知の場合

たとえば、 $25^2 = 625$ は手法2で計算可能であり、これをもとに前後に拡大できる。

$$26^2 = 25^2 + 25 + 26 = 676, \quad 27^2 = 26^2 + 26 + 27 = 729$$

$$24^2 = 25^2 - 25 - 24 = 576, \quad 23^2 = 24^2 - 24 - 23 = 529$$

この証明は次の通り。

$$(N+1)^2 - N^2 = (N+1) + N \rightarrow (N+1)^2 = N^2 + N + (N+1)$$

(6) 二乗計算の応用

手法4のAの選び方の所でも述べたが、AとしてX、Yの平均値を取ると二乗の差になる。二桁数の2乗を暗記するとよい。

$$A = \frac{X+Y}{2} \text{ とすれば、}$$

$$\begin{aligned} XY &= \left(\frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2} \right) \left(\frac{X+Y}{2} - \frac{X-Y}{2} \right) = \left(\frac{X+Y}{2} \right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2} \right)^2 \\ &= A^2 - (A-Y)^2 = A^2 - (X-A)^2 \end{aligned}$$

X、Yの一方が奇数のときは、そのままでは平均値に小数を含むが、次のようにすれば求められる。

二つの数の内大きい方をX、小さい方をYとする。X=A+1とすれば、AとYは奇数同士または偶数同士になる。

X=A+1 とすると、

$$XY = (A+1)Y = AY + Y = (X-1)Y + Y \text{ であるから}$$

AY=(X-1)Yについて上と同様に計算し、結果にYを加算すればよい。

逆に、Y=B+1とすれば、XY=XB+X=X(Y-1)+Xであるから、小さい数から1を引いて計算した結果に大きい数を加える方法でもよい。

例

$$53 \times 26 = 52 \times 26 + 26 = 39^2 - 13^2 + 26 = 1521 - 169 + 26 = 1378$$

$$78 \times 69 = 77 \times 69 + 69 = 73^2 - 4^2 + 69 = 5329 - 16 + 69 = 5382$$

$$78 \times 69 = 78 \times 68 + 78 = 73^2 - 5^2 + 78 = 5329 - 25 + 78 = 5382$$

$$81 \times 62 = 80 \times 62 + 62 = 4960 + 62 = 5022$$

$$82 \times 61 = 82 \times 60 + 82 = 4920 + 82 = 5002$$